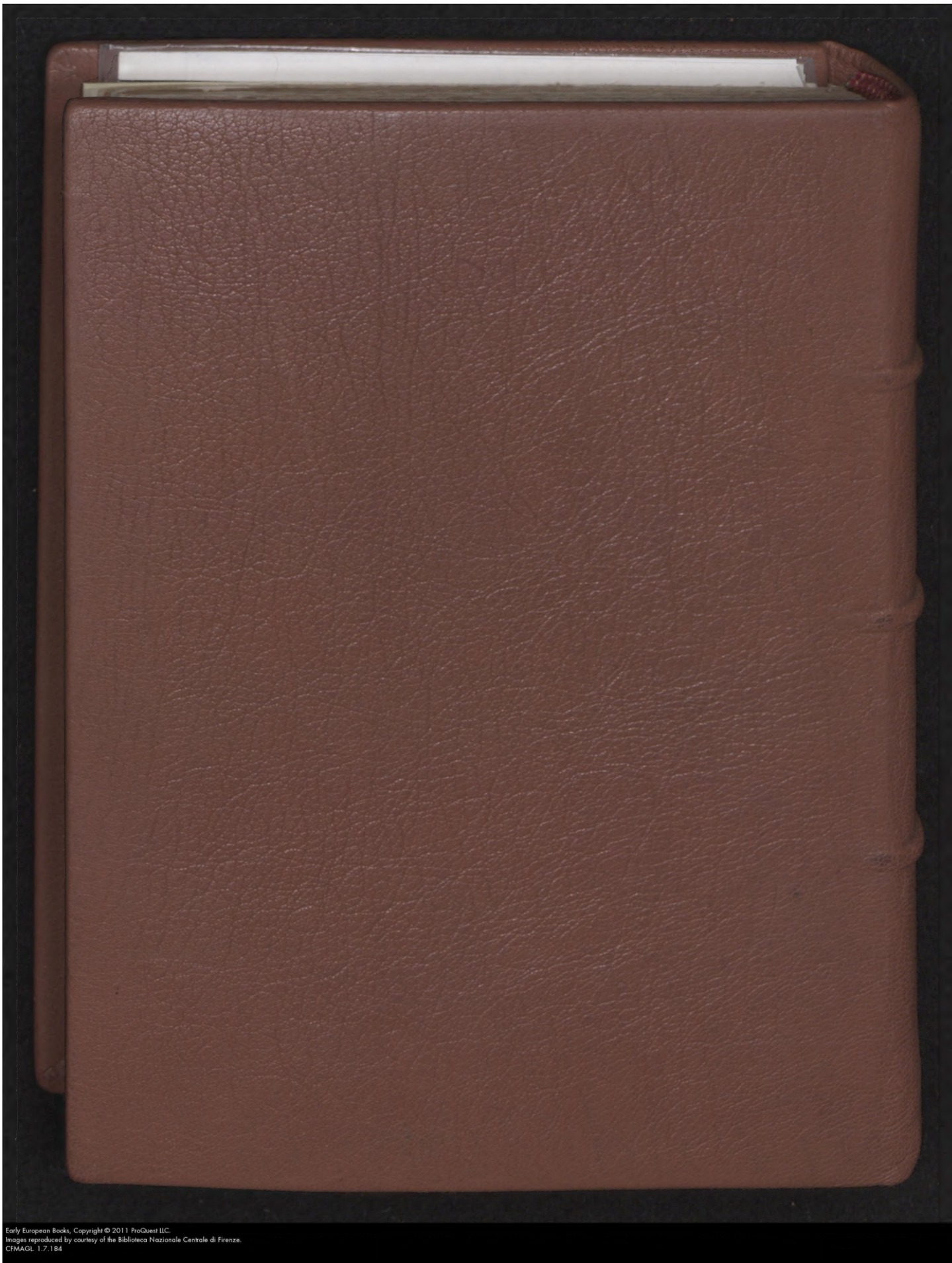




Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CMAAGL 1.7.184





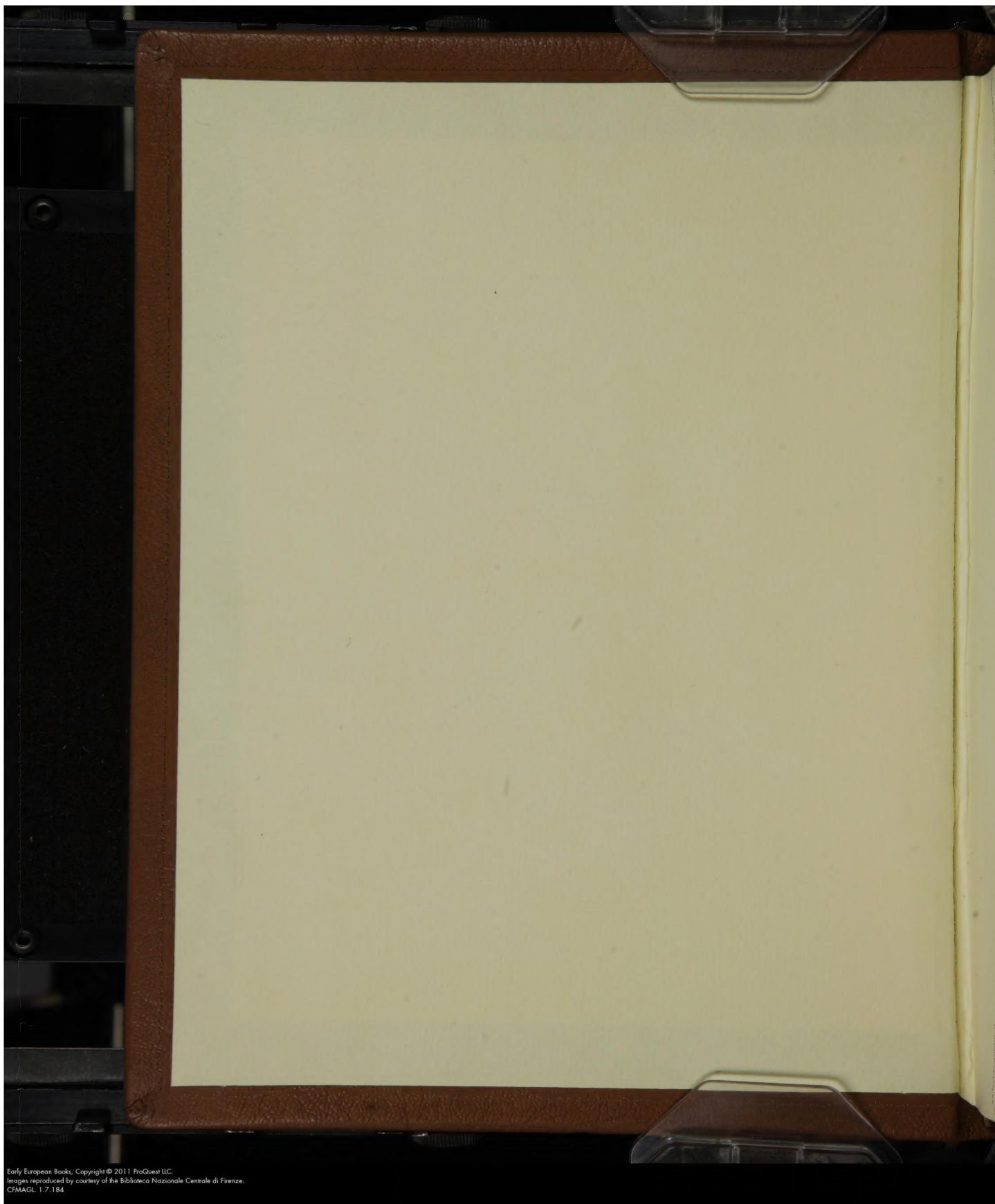
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.184



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.184



Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CINMAGL. 1.7.184













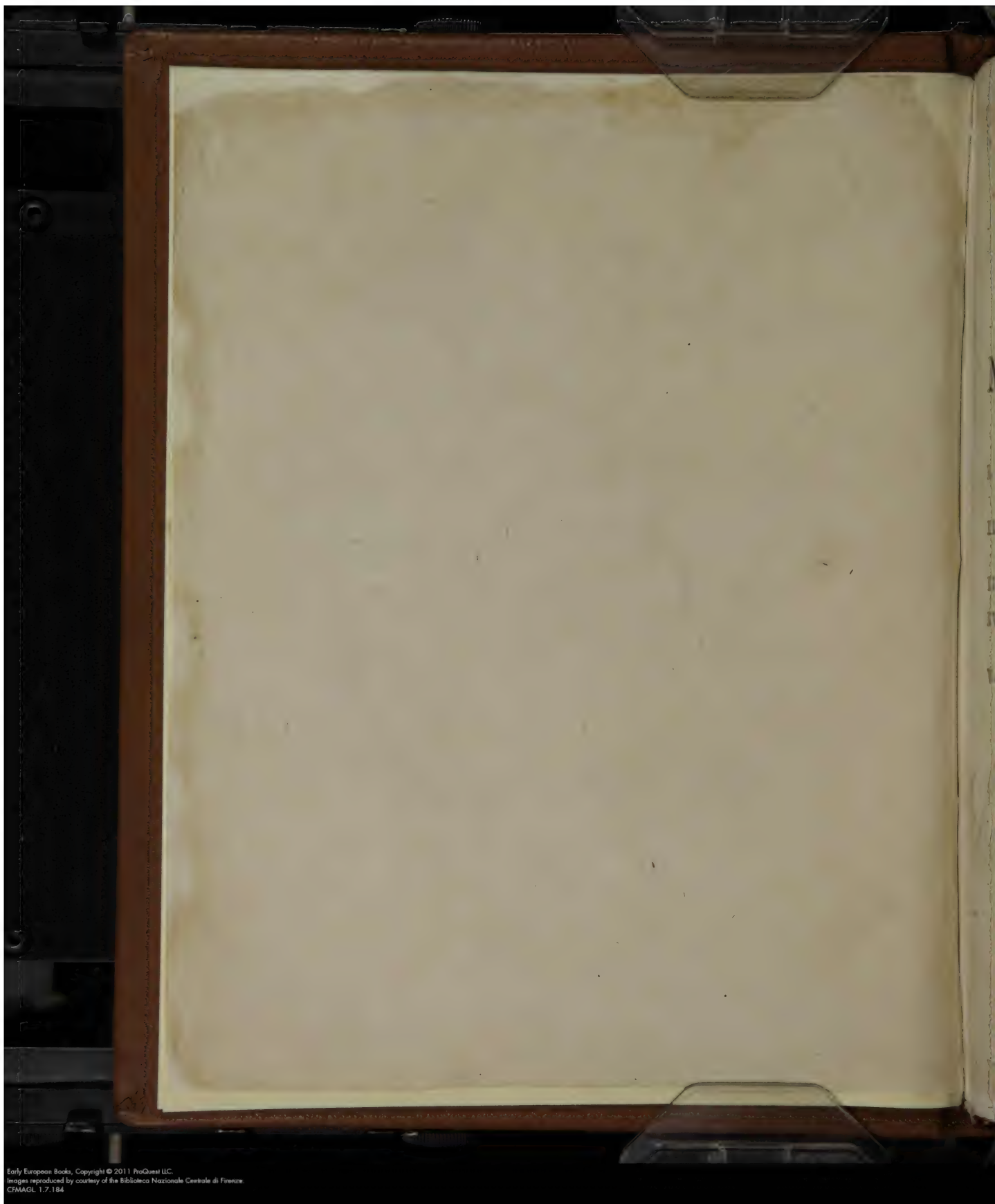


1-1-184

W. 211

S. 11. 00

120



14-104- B- 6

FRANCISCI à SCHOÖTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QVINQUE.

I. PROPOSITIONUM ARITHMETICARUM ET GEOMETRICARUM CENTURIA.

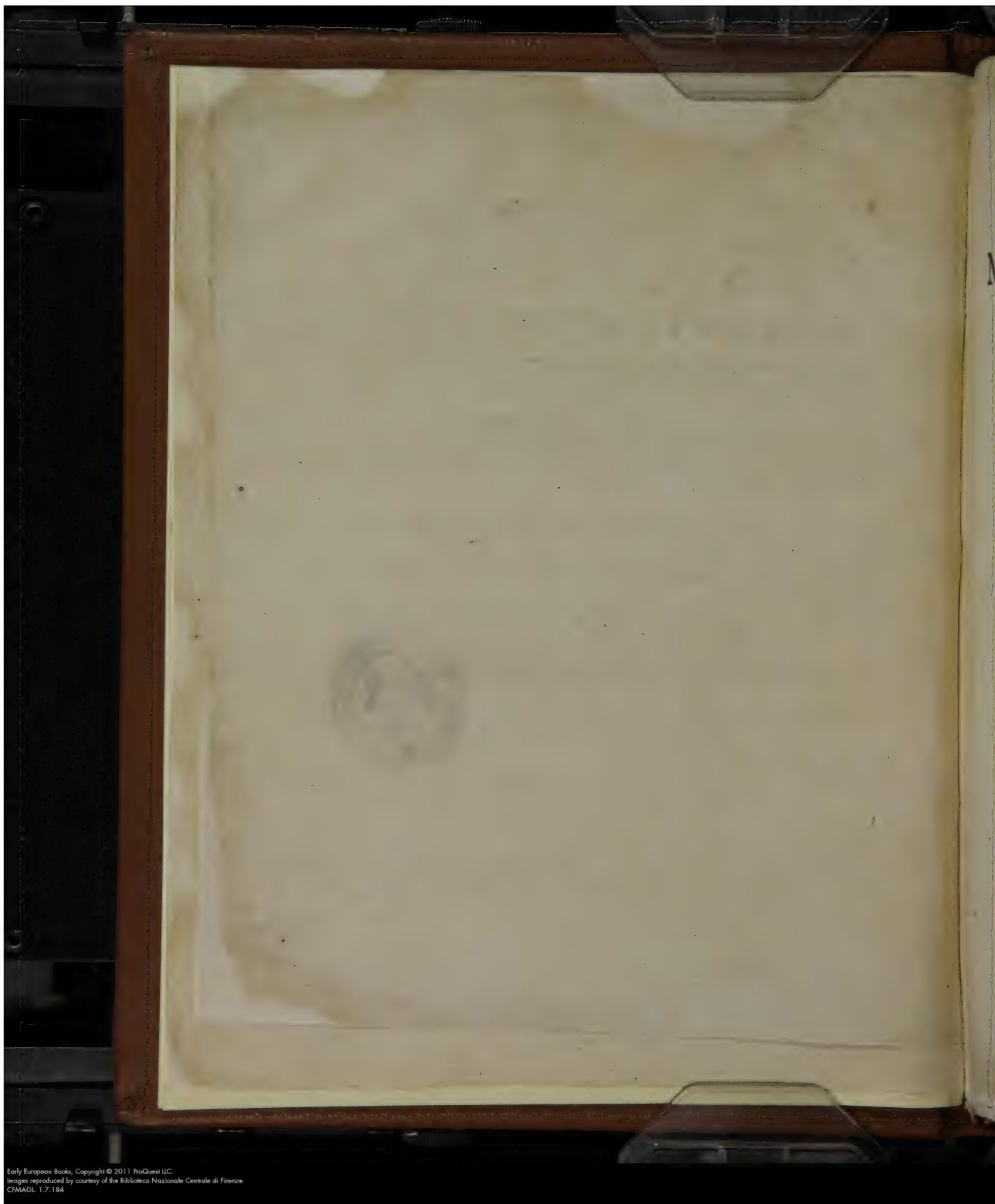
II. CONSTRUCTIO PROELEMATUM SIMPLICIUM GEOMETRICORUM.

III. APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.

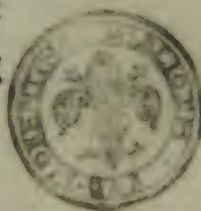
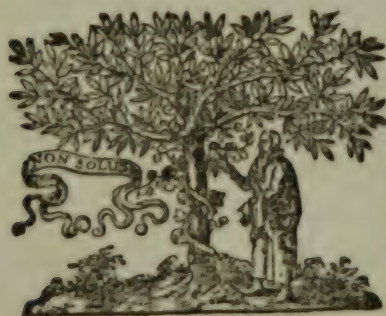
IV. ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIO.

V. SECTIOES MISCELLANÆ TRIGINTA.

Quibus accedit CHRISTIANI HUGENII Tractatus,
de Ratiociniis in Alca Ludo.



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Mathematicos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARVM
LIBER PRIMVS.
CONTINENS
PROPOSITIONVM
ARITHMETICARVM
ET
GEOMETRICARVM
CENTURIAM.



LYGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiae Typographi.
c15 IDC LVII.





Nobilissimis, Potentissimisq; Dominis,
D. D. PRÆSIDI ac SENATORIBUS CURIÆ
HOLLANDIÆ, ZEELANDIÆ,
&
WEST-FRISIÆ,

Studiorum Mathematicorum Patronis, summè
colendis.

Nobilissimi, Potentissimiq; Domini



VM inter res cunctas, quas uni-versi hu-
jus autor Deus, pro immensa sua tum sa-
pientia tum bonitate, in terris produxit, nil
mente humanâ, inveniatur præstabilius,
dolendum meritò est divino hoc munere, per
quod conditoris nostri gerimus imaginem,
nos adeò frequenter & tam turpiter abuti. Etenim, quoties,
voluptati pravisque affectibus serviendo, insuper habito re-
ctæ rationis ductu, meliorem nostri partem negligimus, to-
ties, originis nostræ immemores, à recto tramite miserè ad-
modum aberramus. Ne itaque pecudum ritu vitam transi-
gamus, cum quibus corpus ejusque motus habemus commu-

† 3

nes,

nes, solâ mente ab iisdem distincti, omni ope enitendum est, ut, relictis sensuum corporisque illecebris, hanc, quâ excellimus, præcipuè excolamus divinæ auræ particulam, & eam veritatis indagatiōi, à cuius cognitione omnis ejus dependet perfectio, continuè assuesciamus.

Inter omnes autem mentis exercitationes, quæ huc conducere possunt, nullæ æquè utiles reperiuntur ac Mathematicæ; quæ sicut ceteras certitudinis evidentiâ antecellunt, ita apud eruditos & quoslibet ingenio præstantes viros summam adeptæ sunt dignitatem. Enimverò cum sensuum suffragium, quod sæpissime nos fallit, in exercitationibus hisce nullam mereatur fidem, sed mens sola circa illas versetur: fit ut eadem exercitatione hæc simile quid acquirat quod corpus multifariâ membrorum agitatione; promptitudinem scilicet in exequendis iis, in quibus se exercuit. Adeò ut mens hæc ratione accommodata planè aptaque reddatur ad verè ac solidè judicandum, & res quaslibet, non tantum in Mathematicis, sed etiam Philosophicis quibusvis, ut & in civili vita, cum certitudine inquirendas & perspicendas.

Quapropter cum ex omnibus Mathematicis Exercitationibus, quæ præcipuè huc spectant atque censentur utiles, nullæ ita puræ deprehendantur, quàm quæ Arithmetice & Geometriæ subjiciuntur, indeque Matheſis puræ nomine veniant, jure meritoque Arithmetica & Geometria ante reliquas omnes Mathematicæ scientiæ partes, quæ sanè complures sunt, addiscuntur, ipsisque primus inter illas locus assignatur. Quibus dum reliquæ ceu fulcimentis innituntur,
accidit

IV

accidit ut mens humana iisdem imbuta, velut per gradus quosdam à minorum consideratione ad majorum, à naturalium ad divinorum, & à corruptibilium ad aeternorum manuducatur cognitionem. Harum beneficio mens nostra, ut divinus testatur Plato, humo tollitur & tanquam binis alis in cælum subvehitur; adeoque à terrenis hisce atque caducis omnibus abducitur ad cælestium contemplationem. Unde discit, assuescitque supra sortem suam ac conditionem se erigere, veritati fidem habere, & Deum Opt. Max. cunctarum rerum creatorem, ex immensis ac infinitis ejus operibus hanc viâ rectè cognoscere, atque ad eum solùm, si Sacrarum Literarum studium jungas, quibus solis salutis nostræ comprehenditur ratio, omnem laudem, omnemque gratitudinem ac reverentiam referre.

Hæ binæ artes seu scientiæ, cum per se subsistant nec aliarum egeant demonstratione auxiliòve, utpote quæ contra ex illis suam nanciscuntur firmitudinem, meritò à Philone reliquarum artium omnium Metropolis, & Philosophiæ Anse à Xenocrate appellatæ sunt. Quinimò, si pro rei dignitate loqui velimus, non ineptè Scientiarum Ianua ac Mysteriorum Reformatio dici possunt: quippe quæ, thesauros suos aperientes, resolvunt, pandunt, atque manifestant quicquid ante menti obscurum occultumque videbatur. Hæc igitur fuit causa, cur Veteres, ut studiis suis optimè consulere, & tyrones recti firmique judicii capaces redderent, eas ante omnia didicerint atque docuerint, ipseque inde artes seu scientiæ Mathemata, id est, Disciplinæ dictæ fuerint. Hoc autem
vel

vel inde liquet, quòd Plato, cujus temporibus hæc maxime
floruere, illas Viam ad Eruditionem Compendiariam, uni-
cumque tramitem, quo quis rectâ ad perfectam rerum om-
nium cognitionem pervenire potest, vocaverit. Vnde etiam
eos, qui in Arithmetica jam versati erant, ad discendas in-
vestigandasque artes quaslibet aptos solertesque pronuncia-
vit, & Geometriæ ignaros è Schola sua eliminavit. Imò
eiusque Geometriam extulit, ut vel ipsam à Deo semper
exerceri, ejusdemve interventu cuncta dirigi dicere solitus
fuerit. Hoc utique indicare volens, eum, qui à teneris in
Disciplinis hisce se exercuerit, Deo quasi assimilari, ipsius-
que ingenium formari ad verè ac infallibiliter de re qualibet
judicandum. Quod ipsum in discendis aliis artibus ac scien-
tiis apprimè utile est ad veritatem, quæ cujusque scientiæ fi-
nis est, ab ejus contrario discernendam; atque ad dubitatio-
nem omnem, præjudicium, & temeritatem evitandam. Cui
sententiæ adstipulatur etiam Athenæus, existimans unum-
quemque per disciplinas hæc perfici, modò jam inde à pue-
ro vitam ad virtutes componere studeat: quandoquidem ipsæ,
dum minimè existunt contentiosæ, sedatos quoque animos
gignunt; atque hoc item præ cæteris omnibus disciplinis sibi
vendicant, quòd nullo fuco aut verborum lenocinio, quibus
aliquis facile seduci potest, ornari se patiantur; sed contentæ
sint simpliciter doceri, & suos amatores summâ animi tran-
quillitate ac jucunditate persusos dimittere.

Præter verò tot tantasque harum disciplinarum utilita-
tes, est etiam, Nobilissimi atque Potentissimi Viri, quod
Vos

V

Vos speciatim concernit, quippe qui earum usum in componendis litibus, in decidendis causis, in defendendo jure tuendisque legibus, & in injuria vindicanda assidue deprehenditis. Quin etiam experientia edocti estis, Arithmeticam esse quæ expendit ac recipit, quæ emit ac vendit, nec sine eâ ulla hominum negotia expediri, eorumque controversias dirimi posse. Idem locum obtinet in Geometria, quâ figuræ qualibet agrorum, saltuum, stagnorum, paludum, prædiorum, ac fundorum mensurantur, delineantur, dividuntur, illorumque damnum & jactura æstimantur atque compensantur; adeò ut ejusdem beneficio dissidia quævis mensurationis & divisionis componantur, falsi limites indicentur, verique restituantur, injuriæ obviam eatur, confusio evitetur, paxque inter dissidentes concilietur. E quibus omnibus, dum nihil sine Arithmetica & Geometrica proportionem perficitur, atque hæc præmia & pœnas ratione personarum ac dignitatum distribuat; illa autem circa permutationes versetur, liquido constat, quanta sit cum Arithmetica tum Geometria necessitas in quotidiana hominum conversatione, ac præsertim in causis forensibus, & quam ob causam Iustitia in commutativam & distributivam apud Iurisconsultos divisa fuerit. His adde, quòd absque illarum adminiculo plurimæ Romanæ Leges, de hæreditatum divisione, agrorum accremento, fluviorum cursus mutatione, partiendis fructibus aliorum fundorum, similibusque rebus agentes, quarum in jure civili sæpe mentio fit, non rectè intelligi queant; at verò in statuendis pretiis, in computandis debitis, in æstimanda noxa eaque resti-

††

restituenda, in perpendendis delictis, ac ferè omnibus, quæ inter mortales quotidie accidunt, semper habendam esse rationem temporis & loci, quando ac ubi, ut & quanti aliquid sit venditum, locatum, permutatum, transactum, oppignoratatum atque redemptum; nec non quâ conditione hæc emptio, locatio, permutatio, transactio, oppignoratio juxta & redemptio facta sit. Quæ omnia luculenter satis ostendunt, binas hæc artes in edito judicii loco ac ipso Tribunali consedissee, atque à Themide destinatas ad quodvis Justitiæ pondus æque lancis examine expendendum, & unicuique suum adjudicandum.

Quocirca cum per eas, uti dictum est, reliquæ omnes scientiæ ac artes facilius rectiusque addiscantur, atque ipsæ unicum vinculum sint, quo subsistant, & in omnibus porro commerciis, negotiationibus, ut & opificiis ritè dirigendis tam multas præbeant commoditates; haud immeritò creditur, nullam bene constitutam Rempublicam sine iis consistere posse, sed earum exercitio bene ac fœliciter geri, simulque scientias omnes, bonas artes, & opificia quævis in ea quàm maximè florere. Testis est sagax atque prudens harum provinciarum regimen, ubi hæc disciplina, ut usui publico inserviant, magno ipsarum commodo, publicè atque vernaculâ linguâ docentur. Vbi etiam Vos, Nobilissimi, Potentissimiq; Viri, quò prædictæ artes, Arithmetica nempe & Geometria in dignitate sua conserventur, suæque evidentia ac certitudine quotidie exercentur, & in omni negotio atque administratione sacra sint anchora & amussis, optimâ ratione judicatis

VI
dicatis Geodetarum solertiam in supputando, mensuran-
do, dividendo, aliisque eò spectantibus, priusquam munus
suum obire possint, iusto examini esse subjiendam, neque
alium admittitis, quàm qui certa earundem artium edide-
rit specimina, suaque infallibili demonstratione noverit con-
firmare.

Vnde consideratâ singulari hac vestrâ curâ, non abs re
fore judicavi, si Exercitationes hasce Arithmeticas pariter
atque Geometricas sacras Vobis facerem. In quibus variæ,
jucundæ, quotidieque occurrentes quæstiones sive proposi-
tiones pertractantur: docentes, quo pacto plures calculi, ad
quos absolvendos quilibet hætenus specialibus regulis, sine
ullâ earum causæ aut ortus cognitione usus est, per vulga-
res regulas, unicuique sermè cognitæ, expediri possint; ut &
quibus modis plures dimensiones atque divisiones, quæ ante
tædioso ac prolixo calculo perficiebantur, per multò expedi-
torem artificiosè præstentur; ac denique quâ viâ plures in-
cognitæ vel quæsitæ lineæ breviter seu compendiosè inve-
niantur. Idque tam ad tyronum introductionem & exer-
citationem, quàm ad eosdem harumque artium studiosos,
quò ad altiora contendant, cum invitandos tum excitan-
dos.

Quibus omnibus bene perspectis, futurum confido, No-
bilissimi Potentissimiq; Domini, ut hunc meum labo-
rem, qui vestris dignitatibus singulari observantiâ à me
offertur ac consecratur, æquo benevoloque animo sitis acce-
pturi, & vestram in clientelam lubentes admissuri. Præ-

† † 2

sertim

*fertim cum hæ exercitationes charissimæ meæ patriæ bono in
publicam lucem proferantur, earumque etiam fructus in
Iustitia administranda ad Vos redundare possit. Finiam
itaque, D. O. M. precibus humillimis obsecrans, ut vestra
consilia omnia prosperè evenire faciat ad Reipublicæ nostræ
salutem, Vosque quàm diutissimè servet incolumes.*

Nobilissimi, Potentissimiq; Domini

Vester devotissimus cliens

Lugd. Bat. Idibus
Septemb. Anno
cdo lxxvi.

FR. à SCHOOTEN.

EXER.



EXERCITATIONES
MATHEMATICÆ,
AC PRIMUM
DE
ARITHMETICIS
PROPOSITIONIBVS.

I.



Quatuor personæ conducunt currum, quo vehantur Leydā Amstelodamum, 9 florenis, & 10 stutris, hâc conditione, ut, si in via adhuc alii advenerint, id in ipsarum cedat emolumentum. Jam postquam Aelsmeriam pervenerunt, tribus Amstelodamo milliaribus, contingit adhuc duas ascendere, promittentes se pro ratione aliarum soluturas. Quæritur, quantum singulæ tum priorum tum posteriorum solvere debeant, si Leyda distet Amstelodamo 8 milliaribus?

A

Opera-

Operatio fiat, ut sequitur.

perf. milliar.

$$\begin{array}{r} 4 \rightarrow 8 \mid 32 \\ 2 \rightarrow 3 \mid 6 \\ \hline 38 \rightarrow 190 \end{array}$$

9 flor. 10 stuf.

stufri solvendi

$$- \left\{ \begin{array}{l} 32 \\ 6 \end{array} \right\} \text{ fit } \left\{ \begin{array}{l} 160 \text{ à } 4 \text{ primis, quod divi-} \\ \text{sum per } 4, \text{ dat } 40 \text{ stufros,} \\ \text{pro singulis} \\ 30 \text{ à } 2 \text{ reliquis, quod divi-} \\ \text{sum per } 2, \text{ dat } 15 \text{ stufros,} \\ \text{pro singulis.} \end{array} \right.$$

Vel sic:

Quoniam singulæ priorum pro ratione duarum reliquarum solve-
re debent, ut 8 ad 3 (pro ratione nempe milliarium, quæ profectæ
sunt) & priores duplæ sint posteriorum, sequitur rationem pecuniæ
4 priorum ad pecuniam 2^{rum} posteriorum esse compositam ex ratione
8 ad 3, & ex ratione 2 ad 1. Unde tota summa 9 fl. 10 st. dividenda
est in duas partes, quæ inter se sint ut 16 ad 3. Omnino ut sequens
indicat calculus.

$$\begin{array}{r} 8 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \\ \hline 16 \rightarrow 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \text{ fl. } 10 \text{ stuf.} \\ 3 \rightarrow 190 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{stufri solvendi} \\ \left\{ \begin{array}{l} 16 \\ 3 \end{array} \right\} \text{ fit } \left\{ \begin{array}{l} 160 \text{ à } 4^{\text{or}} \text{ primis, quod divisum per} \\ 4, \text{ dat } 40 \text{ stuf. pro singulis} \\ 30 \text{ à } 2^{\text{bus}} \text{ reliquis, quod divisum per} \\ 2, \text{ dat } 15 \text{ stuf. pro singulis.} \end{array} \right. \\ \text{ut supra.} \end{array}$$

II.

Si 27 ulnæ Amstelodami valent 16 ulnas Lugduni, & 3
ulnæ Lugdunenses valent 5 ulnas Antverpienses, & 4 ulnæ
Antverpienses sint æquales 5 ulnis Colonienfibus; inve-
nire quot ulnæ Amstelodamenses contineantur in 200
ulnis Colonienfibus.

In pi-

Inspectatur sequens operatio.

$$\begin{array}{r}
 27-16 \\
 3-5 \\
 4-5 \\
 200 \\
 \hline
 64800-400
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2 \text{ facit} \\
 64800 \left\{ \begin{array}{l} 162, \text{ ulnae Amstelodamenses continentur} \\ 400 \left\{ \text{in 200 ulnis Colonienfibus.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

III.

Cum 7 lb sacchari valent 2 lb gariophyllorum, & 3 lb garioph. tantum constant quanti 13 lb piperis, & 1 lb pip. constet 12 stutris: Invenire quanti constet cista sacchari pendens 476 lb.

$$\begin{array}{r}
 7-2 \\
 3-13 \\
 1-12 \\
 476 \\
 \hline
 21-148512
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{facit} \\
 148512 \left\{ \begin{array}{l} 7072 \text{ stutris, vel } 353 \text{ flor. \& 12 stut.} \\ 21 \left\{ \end{array} \right.
 \end{array}$$

IV.

Duo studiosi proficiscuntur in Italiam, quorum unus 7 diebus prius discedit altero, conficiens singulis diebus 9 miliaria: Quæritur, si alter quotidie emetiatur 12 miliaria, quanto temporis spatio primum sit assequutus?

Vide sequentem operationem.

A 2

Prior

Prior præcedit 7 diebus
Conficiens quotidie 9 milliaria

Præcessit ergo prior 63 milliariibus.

Ex 12 milliariibus, quæ posterior quotidie est emensus

Subtr. 9 milliaria, à prioræ confecta:

Restant 3 milliaria, quæ à posteriore quotidie conficiuntur ultra milliaria prio-
ris.

Fiat itaque

milliar.	Diem	milliar.
3	1	63

| facit 21 diebus.

Examen

Mult. 21 dies, quibus 1 ^{da} est profectus	Ad 21 dies, quibus 2 ^{da} est profectus
per 12 milliaria:	adde 7 dies, quibus 1 ^{ma} præcessit,
$\frac{42}{21}$	fiunt 28 dies, quibus 1 ^{ma} est profectus
	per 9 milliaria
	fiuntque 252 milliaria, à 1 ^{mo} confecta,
Et fiunt 252 milliaria, à 2 ^{da} confecta.	cum 2 ^{da} eum affecutus est.

V.

Insula in ambitu est 36 milliarium. Si jam eodem tem-
pore, & ex eodem loco duo proficiscuntur tabellarii, in-
vicem sequentes, quorum unus quotidie conficit 9, & al-
ter 7 milliaria: Invenire, quanto temporis spatio ite-
rum sint conventuri, ut & quot milliaria & ambitus uter-
que absolverit.

milliaria

Subtr. $\begin{cases} 9 \\ 7 \end{cases}$	Die	milliaria
2	1	36

| facit 18 diebus.

Mult. 18 dies	Multipl. 18 dies
per 9 mill.	per 7 mill.

fiunt 162 mill. quæ prior confecit	fiunt 126 mill. quæ posterior confecit;
------------------------------------	--

(18
divid. 162 \int 4 $\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 prior absolvit.

(18
divid. 126 \int 3 $\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 posterior absolvit.

VI. Si

VIII.

Emit aliquis agrum 450 perticarum, jugerum 1000 florenis; hâc conditione, ut prætium duobus perfolvat temporibus, & primo quidem tempore 350 florenos plus quàm secundo: Quæritur, quantum singulis temporibus solvere debeat?

Jugerum	flor.	pert.	flor.
pert. 600	1000	450	facit 750 prætium agri
			Adde { 375 semissem
			175 semissi ipsius 350
			summa 550 flor. primo tempore solvendi
			subt { 375
			175
			Relinq. 200 flor. 2 ^{do} tempore solvendi

IX.

Emit lanio 50 boves, jam quæritur, si singulis septimanis 2 boves mactare velit, donec omnes post 25 septimanas mactati sint, quot boves per idem temporis spatium eodem pretio alere possit?

Facit 26 boves eodem pretio per 25 septimanas alere potest, quo 50 boves, si singulis septimanis duos mactet. Quod ut inveniatur, adde 50 & 2, eritque 26, semissis summa 52, numerus bœum quæsitus.

X.

Duo studiosi A & B simul Leydâ discedunt in Gallias, quorum A quotidie conficit 6 milliaria, & B primo quidem die 1 milliare, secundo 2, tertio 3 milliaria, & sic deinceps, sequenti die unum semper milliare plus conficiens. Quæritur, quanto tempore primum sit assequuturus?

Facit 11 diebus.

Ad

ARITHMETICÆ.

Ad quod inveniendum, sumatur duplum ipsius 6, quod est 12, à quo si auferatur 1, relinquetur 11, numerus quæsitus.

XI.

Frumentarius duplex habet frumentum, utpote triticum & siliginem, vendit autem tritici modium 7 flor. 10 stufr. & 8 den: Quæritur, si tres modii tritici ipsi tanti constent quanti 4 modii siliginis, quo pretio modium siliginis vendere debeat?

NOTA. Hac quæstus solvi potest per rationem compositam ad modum propositionis secunda, sicut hic videre est.

		flor. stufr. den.
4— — — 3		7 ... 10 ... 8
1 — 2408 den.		20
4 — 7224		150 stufr.
		16
	(1	908
3	244 (1	15
7224 { 2856 11 2		2408 den.
4	16	
	facit 5 flor. 12 stufr. & 14 den.	

XII.

Si 1 lb aromatis Amstelodami emitur 12 solidis, 6 gro., quanti constabit 1 lb Antverpiensis, cum 19 lb Amstelodamenses æquantur 20 Antverpiensibus?

Facit 11 sol. 10 gr. 12 m.

Institu-

Instituatur operatio per rationem compositam, ut sequitur.

20—19	Sol. gro.
1—150	12...6
20—2850	12
(1	24
(1 20	126
2850 { 142 { 11.	150 gr.
20 { 12 {	

Aliter, per Regulam Proportionum conversam, hoc pacto:

It Amst. Sol. gr. It Antv.

19-----12...6-----20

12

24

126

150 gr.

19

1350

15

2850

(1	20
2850 { 142 { 11.	20 { 12 {

XIII.

Cerevisarius habet ahenum cerevisiæ, 45 vasorum, cujus vas ipsi constat 4 flor. 16 stuf. : Quæritur, ad quot vasa decoquere debeat, ut vas ei constet 6 flor. Facit ad 36 vasa.

Operare juxta Regulam Proportionum inversam, ut sequitur.

flor.	stuf.	vasa	flor.
4 ...	16-----	45-----	6
20	96 stuf.	20	120 stuf.
45		7	
480		3320 { 36.	
384		220 {	
4320			

Ut au-

Ut autem cognoscatur, postquam numeri vulgari modo sunt collocati, num juxta directam an verò inversam proportionum regulam, sit operandum: Notari debet, num quæstio sit ejus naturæ, ut, si tertius numerus, in regula, major sit primo, tum quoque quartus seu quæsitus major requiratur secundo; vel, si tertius primo minor sit, tum etiam quartus minor requiratur secundo, hoc enim si contingat, operatio instituenda erit secundum regulam directam, multiplicando scilicet secundum per tertium numerum, & productum dividendo per primum; Contrario verò contingente, operandum erit juxta regulam inversam, multiplicando nempe primum per secundum numerum, & productum dividendo per tertium.

XIV.

Si 1 lb cinamomi constet 3 flor., 1 lb gariophyllorum 4 flor. 10 stuf., 1 lb nucum musc. 3 flor. 15 stuf., 1 lb piperis 16 stuf., & 1 lb zingiberis 15 stufis. Quæritur, si singulorum aromatum idem numerus librarum exspectatur, & in totum expendere velimus 1600 flor. quot libræ cujusque speciei sint recipiendæ?

flor. stuf.

3 ... 0 . Cinam.

4 ... 10 . Garioph.

3 ... 15 . Nucum

16 . Pip.

15 . Zing. cujusque aromatis flor.

12 ... 16 ————— 1 lb ————— 1600 facit 125 lb, cujusque speciei.

Eodem modo invenietur, si 10 nummi aurei commutandi* ridders sint in ducatonos, imperiales, solidos, & stufros, ita ut cujusque speciei idem sumendus sit numerus, singulorum recipiendos esse 12 nummos.*

B

XV. Aro-

XV.

Aromatopola Leydensis petit Amstelodamum, ad emenda aromata, videlicet: piper, gariophillos, & zingiber; ubi 1 lb piperis ipsi offertur pro 16 stuf., 1 lb garioph. pro 4 flor. 10 stuf., & 1 lb zing. pro 15 stufis: Quæritur, si in totum expendere velit 229 florenos, & sumendo 13 lb piperis, accipiat 2 lb garioph.; & sumendo 3 lb garioph. accipiat 7 lb zingib., quot lb singularum specierum recipere debeat?

$$\begin{array}{r} 13 \text{ — } 2 \quad 3 \text{ — } 7 \\ 3 \dots 3 \quad 2 \dots 2 \\ \hline 39 \text{ — } 6 \text{ — } 14 \end{array}$$

lb	stuf.			
39	16	624		
6	90	540	229 flor.	
14	15	210		stuf.
		1374	4580 stuf.	
		3	10	

$$\left\{ \begin{array}{l} 624 \\ 540 \\ 210 \end{array} \right\} \text{ facit } \left\{ \begin{array}{l} 2080, \text{ quod div. per } 16, \text{ fiunt } 130 \text{ lb Pip.} \\ 1800, \text{ quod div. per } 90, \text{ fiunt } 20 \text{ lb Garioph.} \\ 700, \text{ quod div. per } 15, \text{ fiunt } 46\frac{2}{3} \text{ lb Zing.} \end{array} \right.$$

* een g gul.
hoc est,
28 stuf.

*Eodem modo invenitur, si permutandi sint 189 aurei Gallici, in patacones, * aureos, & solidos, & duplo plures patacones expetantur quàm solidi, recipiendos esse 264 patac. 132 aur. & 44 solidos.*

XVI.

Sex prædiati A, B, C, D, E, & F aggere prædia sua cingere cupiunt, in ambitu continente 1270 pedes; hac conditione, ut illi, qui, priusquam aggerem extruere possunt, fossam suam implere debent, 14 pedes ejusdem aggeris minus perficiendos habeant. Quæritur, si prædium ipsius A sit 30, B 20, C 45 D 40, E 36, & F 50 perticarum, & ipsis A, C, E, & F fossas implere obtingat, quot pedes singulis ex ambitu sint adjudicandi?

perticæ

perticæ		Mult. 14 pedes			
A. 30.		per 4			
B. 20.		fiunt 56 pedes			
C. 45.					
D. 40.	pedes	perticæ		pedes	pedes
E. 36.	Ambitus 1270			In examen adde singulorum	
F. 50.	adde 56				
221		1326			
		$\left\{ \begin{array}{l} A. 30. \\ B. 20. \\ C. 45. \\ D. 40. \\ E. 36. \\ F. 50. \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} A. 180, \text{ subtr. } 14 \\ B. 120 \\ C. 270, \text{ subtr. } 14 \\ D. 240 \\ E. 216, \text{ subtr. } 14 \\ F. 300, \text{ subtr. } 14 \end{array} \right\}$	
		fiuntque perticæ ex ambitu pro		$\left\{ \begin{array}{l} A. 166 \\ B. 120 \\ C. 256 \\ D. 240 \\ E. 202 \\ F. 286 \end{array} \right\}$	
				fiuntque 1270 pedes, ambitus, ut requirebatur.	

XVII.

Tres, societate initâ, contribuunt, nimirum, A & B simul 540 flor., B & C 360 flor., & A & C 450 flor.; peracto autem negotio lucrati sunt 150 flor.: Queritur, quid unusquisque contribuerit atque lucratus sit?

flor.
A & B. 540
B & C. 360
A & C. 450
Summa 1350 duplum eorum pecuniæ.
semissis 675 pecunia ipsorum A, B, & C.
subtr. 360 pecuniam ipsorum B & C.
rel. 315 pecunia ipsius A. Quæ si auferatur ex 540 fl. pecuniâ ipsorum A & B, relinquetur 225 flor., pecunia ipsius B. Hinc cum B & C simul contribuunt 360 flor., sequitur C contribuisse 135 florenos.

Lucrum singulorum sic inuenies

Summa totius		Singulorum		Singulorum	
pecuniæ		pecunia		lucrum.	
675		$\left\{ \begin{array}{l} A. 315 \\ B. 225 \\ C. 135 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} A. 70 fl. \\ B. 50 fl. \\ C. 30 fl. \end{array} \right\}$	
150		B 2			

XVIII. Si

XVIII.

Si 125 lb piperis plus 4 florenis valeant 60 florenos plus
13 lb: Quæritur, quantum persolvi debeat pro sacco, pen-
dente 512 lb?

	lb	flor.	flor.	lb
Ex	125	+	4	æquale 60 + 13
Subtrah. utrinque	13	lb &	4 fl.
Remanent	112	lb	æqual.	56 flor.
Tum fiat				
	lb	flor.		lb
	112	—	56	— 512 facit 256 flor.

XIX.

Si 100 lb sacchari minus 3 flor. tantum valent quantum
36 floreni plus 5 lb: Quanti constabit cista, pendens
475 lb?

	lb	flor.	flor.	lb
Ad	100	— 3	æqual.	36 + 5
Adde utrinque 3. flor. minus 5 lb.	— 5 lb		+	3 flor.
	fiuntque	95 lb	æqual.	39 flor.
Tum fiat,				
	lb	flor.		lb
	95	— 39	— 475	facit 195 flor.

XX.

Si 3 ulnæ panni veneunt 6 aureis Gallicis & 12 stufis;
& eâdem ratione pro 25 ulnis solvantur 51 aurei Gallici &
12 stufri: Quæritur, quot stufros aureus valuerit?

3 ulnæ

3 ulnæ æqual. 6 aur. + 12 stuf.
 hoc est, 1 ulnæ æqual. 2 aur. + 4 stuf.
 & 15 ulnæ æqual. 50 aur. + 100 stuf.

Unde 51 aur. + 12 stuf. æquantur 50 aur. + 100 stuf.
 Subtr. utrinque 50 aur. & 12 stuf. 50 aur. + 12 stuf. 50 aur. + 12 stuf.
 relinq. 1 aur. æqualis 88 stuf.
 hoc est, 1 aureus valet 4 fl. & 8 stuf.

XXI.

Si 12 poma & 15 pira emantur 3 stufis, & eâdem ratio-
 ne 10 poma & 50 pira 5 stufis, quot igitur singulorum uno
 stufro ementur?

stuf.	poma	pira	stuf.	poma	pira	pomis	piris
3	12	& 15	5	10	& 50	æqual.	10 & 50
3	1	4 & 5					

Subtr. utrinque 10 poma; & 25 pira.

	10 pom.	25 pir.
& relinq.	10 poma æqual.	25 pir.
5		
vel	2 pom.	æqual.
3		
	6 pom.	æqual.
		15 pir.

Item ad inventendum, quot poma & pira scorsim pro stufro emantur, ita
 fiat

Ad 12 poma
 stuf. adde 6 poma, vel 15 pira stuf.
 3 ——— 18 pom. ——— 1 | facit 6 poma pro 1 stufro.

Hinc si 6 poma tantundem valeant ac 15 pira, & 9 poma emantur 1 stufro; se-
 quitur 15 pira pro 1 stufro emi posse.

XXII.

Si 3 lb gariophyllorum, 2 lb piperis, & 1 lb zingiberis
simul consent 186 stufis: atque 3 lb pip. 2 lb zing. & 1
lb garioph. simul 116 stufis: itemque 3 lb zing. 2 lb
garioph. & 1 lb pip. simul 142 stufis: Quæritur, quantum
1 lb cuiusque constiterit? stuf.

facit 1 lb Garioph. 48.

Pip. 16.

Zing. 10.

Id quod sequenti modo invenitur.

	Ex	3 G. 3 P. 3 Z... 222
Add. {	subtr. 3	3 G. 2 P. 1 Z... 186
		1 G. 3 P. 2 Z... 116
		2 G. 1 P. 3 Z... 142
	Reliq.	1 P. 2 Z... 36

summa 6 G. 6 P. 6 Z... 444

femissis 3 G. 3 P. 3 Z... 222

triens 2 G. 2 P. 2 Z... 148

Ex 2 G. 2 P. 2 Z... 148

subtr. 1 P. 2 Z... 36

Reliq. 2 G. 1 P... 112

Ex 2 G. 1 P. 3 Z... 142

subtr. 2 G. 1 P... 112

Reliq... 3 Z... 30

Hoc est, 1 Z... 10, & 2 Z... 20, id

quod subductum ex 1 P. 2 Z... 36,

relinquit 1 P... 16. Et hoc

rursus ex 2 G. 1 P... 112, rema-

net 2 G... 96, hoc est, 1 G... 48.

48.

XXIII.

Si milites 24 singulis diebus fodiant 16 virgas, & 18 alii
quotidie 15 virgas; Quæritur, quanto tempore simul perfi-
cient vallum 4650 virgarum?

Virg.

$$\begin{array}{r} \text{Virg.} \\ \text{Add. } \left\{ \begin{array}{l} 16. \\ 15. \end{array} \right. \\ \hline 31 \end{array}$$

Fiat itaque: 31 virgæ perficiuntur 1 die (intellige ab omnibus simul militibus), quot diebus perficiuntur 4650 virgæ? facit 150 diebus.

XXIV.

Si boves aliquot intra 8 dies depascunt 5 jugera, & aliquot alii intra 7 dies 3 jugera; Quæritur, quanto temporis spatio agrum depascant 126 $\frac{1}{2}$ jugerum?

Dies Jugera Dies Jugera

$$8 - 5 - 7 \mid \text{facit } 4\frac{1}{2}$$

add. 3 jug.

$$\begin{array}{r} \text{dies jug.} \\ 7\frac{3}{8} \text{ jug.} - 7 - 126\frac{1}{2} \mid \text{facit } 120 \text{ diebus.} \end{array}$$

XXV.

Insula ambitum habet 134 milliarium. Jam verò eodem tempore ex eodem loco duo tabellarii tendunt ad diversas partes, quorum unus 2 diebus conficit 11 milliaria, & alter 3 diebus 17 milliaria: Quæritur, quanto temporis spatio sibi invicem sint obviam venturi, ut & quot milliaria uterque absolverit?

dies mill. dies milliar

$$2 - 11 - 3 \mid 16\frac{1}{2}$$

add. 17 milliari. dies milliari.

$$3\frac{1}{3} \text{ milliari.} - 3 - 134 \mid \text{facit } 12 \text{ diebus.}$$

Milliaria à singulis contacta, invenies hoc modo:

dies milliari. dies milliari.

$$\begin{array}{r} 2 - 11 - 12 \mid 66 \text{ à } 1^{\text{mo}} \text{ perfecta} \\ 3 - 17 - 12 \mid 68 \text{ à } 2^{\text{do}} \text{ perfecta.} \end{array}$$

XXVI. Qui.

XXVI.

Quidam volens molere 215 modios tritici, adit molitorem 3 habentem molas, quarum primâ singulis horis molit 2 modios, secundâ 2^{bus} horis 5 modios, & tertiâ 3^{bus} horis 8 modios: Quæritur, quanto tempore totum triticum moleatur, si omnibus molis imponatur, & quantum tritici singulis molis sit imponendum?

Ad evitandas fractiones, inveniatur, per 38 prop. lib. 7. Elem: Euclidis, minimus numerus, qui per 1, 2, & 3 dividi potest absque reliquo, qui est 6; instituaturque operatio, ut sequitur.

horæ	modii	horæ	mod.	
1	— 2	— 6		facit 12
2	— 5	— 6		facit 15
3	— 8	— 6		facit 16
summa 43 — 6 — 215				hor. mod.
				facit 30 horis, totum triticum moleatur.

Modii autem, singulis molis imponendi, sic inveniuntur. modii

$$43 - 215 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 15 \\ 16 \end{array} \right\} \text{facit} \left\{ \begin{array}{l} 60 \text{ 1^{ma} molæ} \\ 75 \text{ 2^{da} molæ} \\ 80 \text{ 3^{tia} molæ} \end{array} \right.$$

XXVII.

Quatuor mercenarii opus aliquod perficere possunt, videlicet,

A bis	3	septimanis
B ter	4	septimanis
C quinquies	6	septimanis
& D novies	8	septimanis.

Quæritur, quanto tempore id ipsum simul laborantes, absolvent?

Sep-

Septim. vicibus. Septim. vicibus

$$3 - 2 - 24 \mid \text{facit } 16$$

$$4 - 3 - 24 \mid \text{facit } 18$$

$$6 - 5 - 24 \mid \text{facit } 20$$

$$8 - 9 - 24 \mid \text{facit } 27$$

summa 81 vicibus, simul perficiunt opus 24 septimanis.

vices Septim. viciis

$$81 - 24 - 1 \mid \text{facit } \frac{8}{27} \text{ Septimanis, hoc est, 2 diebus, \& } \frac{1}{3} \text{ horis opus hoc simul perficere possunt.}$$

XXVIII.

Fons aliquis habet 4 epistomia A, B, C, D, infra quæ labrum existit, quod per A impletur 8 horis, per B 9, per C 12, & per D 18 horis. Labrum autem hoc cum habeat 4 foramina E, F, G, H, & evacuetur per E 7, per F 6, per G 4, & per H 3 horis: Quæritur, si labrum aqua plenum sit, & omnia simul epistomia, foraminaque aperiantur, quanto temporis spatio labrum evacuabitur?

hor. vice hor. vicibus

$$8 - 1 - 72 \mid \text{facit } 9$$

$$9 - 1 - 72 \mid \text{facit } 8$$

$$12 - 1 - 72 \mid \text{facit } 6$$

$$18 - 1 - 72 \mid \text{facit } 4$$

Hoc est, simul 27 vicibus, labrum impletur 72 horis.

vic. hor. vic.

$$27 - 72 - 1 \mid \text{facit } \frac{8}{3} \text{ horis, labrum semel impletur per omnia epistomia.}$$

hor. vice hor. vicibus

$$7 - 1 - 84 \mid \text{facit } 12$$

$$6 - 1 - 84 \mid \text{facit } 14$$

$$4 - 1 - 84 \mid \text{facit } 21$$

$$3 - 1 - 84 \mid \text{facit } 28$$

Hoc est, simul 75 vicibus, labrum evacuatur 84 horis.

C

vic.

vic. hor. vice

75 — 84 — 1 | facit $\frac{28}{3}$ horis, labrum semel evacuatur per omnia foramina. Quare cum interim per epistomia $\frac{21}{50}$ aquæ pars totius labri influxerit (nimirum, quantum oritur dividendo $\frac{28}{3}$ per $\frac{5}{3}$): sequitur $\frac{28}{3}$ horarum spatio reliquum duntaxat, utpotè $\frac{22}{3}$ aquæ totius labri partem, per impletionem & evacuationem, elapsam esse. Unde si fiat, $\frac{22}{30}$ pars aquæ ipsius labri effluit $\frac{28}{3}$ horis, quot horis effluet 1, aqua sc. totius labri? fietque $1\frac{27}{9}$ horis.

XXIX.

Civis Leydenfis emit bovem 18 libris Flandricis, erogans arrhæ nomine 8 stufros, servoque donans 12 stufros; expendit autem pro vectigali nummum septimum, id est, 15 flor. 8 stuf. & 9 den. & insuper pro impositione urbana nummum quadragesimum, id est, 2 flor. 14 stuf. dein pellem vendens, accipit 10 flor., eique contingunt 95 lb adipis, lb à $4\frac{1}{2}$ stuf. Postremò, lanei expensis iisque, quæ ipsi ulterius in emolumentum cedere possunt, compensatis,prehendit, nudam carnem pendere 605 lb. Quæritur, quanti constet 1 lb? facit 3 stuf. $2\frac{1}{2}$ den. circiter.

18 libra Flandrica $\begin{matrix} 3326(4 \\ 208000 \end{matrix} \textcircled{1} \left\{ \begin{matrix} 15428 \textcircled{1} \\ 7 \end{matrix} \right.$

6

Add. $\left\{ \begin{matrix} 108 \text{ flor. bovis empti} \\ 4. \text{ arrha} \\ 6. \text{ pecunie donata} \\ 15428 \text{ nummi } 7^{\text{mi}} \\ 27. \text{ nummi } 40^{\text{mi}} \end{matrix} \right. \begin{matrix} 208000 \textcircled{1} \\ 40 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 270 \\ 20000 \textcircled{1} \\ 40 \end{matrix} \right.$

flutr. $\begin{matrix} 4\frac{1}{2} \text{ flutr.} \\ 90000 \textcircled{1} \\ 40 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ lb adipis} \\ 225 \textcircled{1} \\ 95 \end{matrix} \right.$

Summa 127 128 flor. in toto expensi add. $\left\{ \begin{matrix} 10 \dots \text{ flor. pellis} \\ 21375 \text{ flor. adipis} \dots \end{matrix} \right. 21375 \textcircled{1}$

Subtr. 31375 flor. iterum recepti 31375

Relinq. 95753 flor. pro nuda carne dati

lib. flor. lib.

605 — 95753 $\textcircled{1}$ — 1

1

95753 $\textcircled{1}$

1

86

320 flor.

95753 $\textcircled{1}$ $\left\{ \begin{matrix} 158 \textcircled{1} \\ 20 \end{matrix} \right.$

605 $\left\{ \begin{matrix} 160 \\ 16 \end{matrix} \right.$

vel flutr. 3160

16

96

16

& den. 256

XXX.

Si quis singulis septimanis lucretur 5 flor. 8 flutr. & quotidie expendat 10 flutr. 8 den: Quæritur, quantum anni spatio superlucrabitur, assumpto anno 52 septimanarum?

Septim. flor. Septim. flor.

1 — 54 $\textcircled{1}$ — 52 | facit 280 | 8, lucratur in anno

dies flor. 7 | facit 191 | 1, expendit in anno

1 — 525 $\textcircled{1}$ — dieb. 364 | Relinq. 89 | 7, hoc est, 89 flor. & 14 flutr. anni spatio superlucrabitur.

C 2

XXXI. Si

PROPOSITIONES
XXXI.

Si quis singulis septimanis lucretur 5 flor. 8 stufr., Invenire, quantum quotidie expendere debeat, ut 89 flor. & 14 stufr. anni spatio superlucretur.

Septim. flor. Septim. flor.

I — 54① — 52 | facit 280 | 8 lucratur in anno

subtr. 89 | 7

relinq. 191 | 1 anni spatio consumendum.

dies flor. dies flor.

dies flor. dies flor.
364 — 1911① — 1 | facit 525③, hoc est, 10 stuf. & 8 den. quoti-
die debet expendere.

$$\begin{array}{r} x \\ 782 \\ 191100 \text{ (3)} \left\{ \begin{array}{l} 525 \text{ (3)} \\ 20 \end{array} \right. \\ \hline 10500 \text{ (3)} \end{array}$$

XXXII.

Si quis quorannis superlucetur 89 flor. 14 stufr. quantum superlucrabitur 13 annis, & 7 mensibus? Facit 1218 flor. 8 stufr. & 8 denarios.

897^(I) 12 mens^{bns} super lucr.

13 anni

269 I

827

4485 ..6 mens^{bns} superlucr.

7475..I mens^{bns} superlucr.

flor. 1218 425

2

Aufr. 8 50

16

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 00} \end{array}$$

50

den. 8 | 00

XXXIII. Ali-

XXXIII.

Aliquis conducit mercenarium hâc conditione, ut, si operetur, quotidie pro mercede recipiat 12 stuf., si autem ferietur, sit quotidie soluturus 8 stufros. Quæritur, quot diebus operari & ferari debeat, ut anno, 365 dierum, elapso, neuter alteri existat debitor?

stuf. dies stuf. dies

12 — 1 — 24 | facit 2 operari debet, ad 24 stuf. lucrandos.

8 — 1 — 24 | facit 3 ferari debet, ad assumptos 24 stuf. consumendos.

5 summa dierum profestorum & feriatorum, ad tantum lucrandum quantum expendum.

Tum fiat

5 — 365 $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ facit $\left\{ \begin{smallmatrix} 146 \text{ dies profestos} \\ 219 \text{ dies feriatos} \end{smallmatrix} \right\}$

Aliter.

NOTA, Quoniam dies, quibus operatur, multiplicati per 12 tantum producere debent, quantum reliqui multiplicati per 8: sequitur * 12 stufros ad 8 stufros eam rationem habere debere, quam dies feriat ad profestos. Sed, 4^{or} numeris in eadem ratione existentibus, ut se habet summa duorum priorum ad secundum, ita quoque se habet summa duorum posteriorum ad quartum, * Erit inde:

stuf.

Add. $\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 8 \end{smallmatrix} \right\}$ summa dierum profest. & feriat.

summa 20 — 8 — 365 | ad 146 dies profestos, qui subducti ex 365 diebus, relinquunt 219 dies feriatos.

* per 10
prop. 7 libri
Elem. Euch.
* Vide Clavium ad
prop. 22 li-
bri 7 Elem.
Euclidis.

XXXIV.

Duo opifices opus aliquod perficiendum habent, quorum A illud perficere suscipit 30, & B 20 diebus; Quæritur, si simul operentur, quanto temporis spatio illud absolvent?

C 3

dies

dies opus dies opera

30 — 1 — 60 | facit 2

20 — 1 — 60 | facit 3

summa 5 opera A & B simul perficiunt 60 diebus,
hoc est, quinquies illud opus eodem tem-
pore simul absolvunt.

opera dies opus

5 — 60 — 1 | facit 12 diebus A & B idem opus simul conficiunt.

Aliter.

Quoniam A prædictum opus solus perficere potest 30, & B 20 diebus; pater, si simul operantes illud aliquo tempore absolvant, dies ipsius A ad dies ipsius B, eam rationem habere, quam pars à B confecta ad partem ab A confectam; & consequenter * summam dierum A & B esse ad dies ipsius B, sicut summa duarum partium ab A & B confectarum (hoc est, totum opus) ad partem ipsius A.

* *Ut in antecedenti quaestione.*

Quare operatio instituenda est, ut sequitur.

dies

A. 30

B. 20 B dies Opus

summa dierum A & B. $\frac{50}{50} - 20 - 1$ | facit $\frac{2}{5}$ partes operis, quas confecit A. Unde B reliquas $\frac{3}{5}$ partes confecit.

Jam fiat, A absolvit totum opus, hoc est, 1, diebus 30, quanto tempore absolveret igitur $\frac{2}{5}$ partes ipsius operis? facit 12 diebus. Unde A & B simul absolvunt opus 12 diebus, ut supra.

Adhuc aliter.

A. 30

B. 20

B

A

summa. $\frac{50}{50} - 20 - 30$ | facit 12 diebus, ut ante.

XXXV.

Si Mars perficiat cursum suum 2 annis, & Jupiter 12 annis, & sint simul in primo gradu Arietis; Quæritur tempus primæ conjunctionis, ut & gradus Zodiaci, in quo illa contingat?

Con-

Conjunctionis tempus quare, ut sequitur.

Anni gradus Annus gradus

2 — 360 — 1 | facit 180

12 — 360 — 1 | facit 30 Ann. gradus

reliq. 150 — 1 — 360 | facit $2\frac{1}{2}$ annis.

Vel brevius, hoc modo:

Quoniam Jupiter cursum suum absolvit 12 annis, & Mars 2 annis: sequitur, si simul sint in primo gradu Arietis, & aliquando iterum conjungantur, annos Jovis ad annos Martis eam rationem habere, quam gradus à Marte interim confecti ad gradus Jovis: & consequenter*, ** Vide Clavium 22 prop. 7. libr. Euclidis.* differentiam annorum Jovis & Martis ad annos Martis eandem habere rationem, quam differentia graduum Martis & Jovis, hoc est, 360 gr. vel 1 periodus, ad gradus Jovis.

Vnde operatio sic se habet.

Anni

12 Jovis

2 Martis. Anni Martis. periodus seu 360 gr.

differ. 10 — 1 — 1 | facit $\frac{1}{10}$ partem periodi seu 72 gr. conficit Jupiter intra tempus 1^{ma} conjunctionis. Quare incidet illa in 12 gradū Geminorū.

Jam fiat, Jupiter cursum suum absolvit 12 annis, quanto tempore absolvit $\frac{1}{10}$ partem periodi seu cursus sui? facit $2\frac{1}{2}$ annis. Unde Jupiter & Mars $2\frac{1}{2}$ annis, ut supra, conjungentur.

Adhuc aliter.

Jupiter 12

Mars 2 Mars Jupiter

differ. 10 — 2 — 12 | facit $2\frac{1}{2}$ seu $2\frac{1}{2}$ annis, ut ante.

Eadem ratione, si in horologio sint 2 indices, quorum unus bis circumagitur 1 die, & alter semel 30 diebus, atque simul, indicantes idem punctum, moveri incipiant, invenietur eodem rursus conjunctum iri $12\frac{1}{2}$ horis.

XXXVI. Ali-

XXXVI.

Aliquis conducit servum, cui in anno pollicetur se daturum 30 flor. & vestem; jam verò, peractis 7 mensibus, cum inter se dissentirent, servus missionem petit, pro mercede recipiens dictam vestem & adhuc 5 flor. Quæritur, quanti prædicta vestis ipsi æstimata fuerit?

Mens.	flor.	
In 12 .. meretur ..	30, cum veste	
subtr. in 7 .. meretur ..	5, cum veste	mensibus flor.
Relinq. in 5 mens ^{bus} meretur	25 flor.	quot meretur in 7? facit 35
		subtr. 5 recept.
		reling. 30 flor. pro veste.

Ejusdem farinae.

XXXVII.

Mercator 2 naves vino oneravit, in quarum 1^{ma} sunt 150, & in 2^{da} 240 dolia. Locum autem prætervectus, in quo vestigal solvere tenebatur, pendit pro 1^{ma} navi unum dolium & recipit 6 flor., pro secunda verò dolium solvit & insuper 18 flor.: Quæritur, quanti dolium æstimatum fuerit?

Subtr.	Subtr.	
pro 240 doliis solvit 1 dol.	& 18 flor.	
pro 150 doliis solvit 1 dol. minus 6 flor.		doliis
Relinq. pro 90 doliis ... solvit ...	24 flor.	quot igitur solvit pro 150?
	flor.	
	facit 40 pro 1 ^{ma} .	
	add. 6 flor. receptos	
	fiuntque 46 flor. pro doli pretio.	

NOTA, hæc duas quæstiones solvi etiam posse
ad modum quæstionum 18 & 19.

XXXVIII.

Aliquis debet 787 flor., quos solvere cupit dato tritico
filigi

ARITHMETICÆ. 25

filigine, & hordeo, tritici verò modius ipsi constat 7 flor.
15 stufr., filiginis 5 flor. 5 stufr., & hordei 3 flor. 10 stufr.:
Queritur, si, sumptis 3 modis tritici, petantur 2 modii
filiginis, & sumendo 5 modios filiginis requirantur 4 mo-
dii hordei, quot modii singulorum sint recipiendi?

$$\begin{array}{r}
 3-2 \\
 \hline
 5-4 \\
 15-10-8 \\
 \hline
 155 \quad 105 \quad 70 \\
 775 \quad 1050 \quad 560 \\
 155 \\
 \hline
 2325 \\
 1050 \quad 787 \text{ flor.} \\
 560 \quad 20 \\
 3935-15740 \text{ stufr.} \left\{ \begin{array}{l} 2325 \\ 1050 \\ 560 \end{array} \right\} \text{ fit } \left\{ \begin{array}{l} 9300, \text{ quod div. per } 155 \\ 4200, \text{ quod div. per } 105 \\ 2240, \text{ quod div. per } 70 \end{array} \right\} \text{ facit } \left\{ \begin{array}{l} 60 \text{ tritici} \\ 40 \text{ filiginis} \\ 32 \text{ hordei.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

XXXIX.

Dividere 14830 in 4^{or} partes, ita ut $\frac{1}{4}$ primæ partis sint
æquales $\frac{1}{2}$ secundæ, & $\frac{1}{4}$ secundæ æquales $\frac{1}{2}$ tertiæ, & $\frac{1}{4}$ ter-
tiæ æquales $\frac{1}{2}$ quartæ.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 3 \\
 \times \\
 \hline
 3 \quad 4 \\
 9 \dots 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \quad 7 \\
 \times \\
 \hline
 6 \quad 8 \\
 42 \dots 40 \\
 21 \dots 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 11 \\
 \times \\
 \hline
 10 \quad 12 \\
 110 \dots 108 \\
 55 \dots 54
 \end{array}$$

D

9-8

$\begin{array}{r} 9 \text{ --- } 8 \\ 21 \text{ --- } 20 \\ \hline 189 \text{ --- } 168 \text{ --- } 160 \\ \hline 55 \text{ --- } 54 \\ 10395 \text{ --- } 9240 \text{ --- } 8800 \text{ --- } 8640 \\ 5, 2079 \text{ --- } 1848 \text{ --- } 1760 \text{ --- } 1728 \\ 1848 \\ 1760 \\ 1728 \\ 7415 \text{ --- } 14830 \\ \hline 1 \text{ --- } 2 \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} 2079 \\ 1848 \\ 1760 \\ 1728 \end{array} \right\} \text{facit}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A. } 4158 \\ \text{B. } 3696 \\ \text{C. } 4520 \\ \text{D. } 3456 \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} 21 \quad 21 \quad 8 \\ 9 \quad 8 \quad 20 \\ \hline 189 \quad 168 \quad 160 \quad 160 \\ \hline 55 \quad 55 \quad 55 \quad 54 \\ 945 \quad 840 \quad 800 \quad 640 \\ \hline 945 \quad 840 \quad 80 \quad 80 \\ 10395 \quad 9240 \quad 8800 \quad 8640 \end{array}$
--	--	---	---

XL.

Tres personæ dividere debent 170 flor., hâc ratione, ut $\frac{1}{2}$ partis A, $\frac{2}{3}$ partis B, & $\frac{3}{4}$ partis C omnes inter se sint æquales. Invenire singularum partes.

$\begin{array}{r} 1 \text{ --- } 3 \text{ --- } 5 \\ 2 \text{ --- } 4 \text{ --- } 6 \\ \hline 30 \text{ --- } 20 \text{ --- } 18 \\ 2, 15 \text{ --- } 10 \text{ --- } 9 \\ 10 \\ 9 \text{ flor.} \\ 34 \text{ --- } 170 \\ \hline 1 \text{ --- } 5 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 10 \\ 9 \end{array} \right\} \text{facit}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{A. } 75 \text{ fl.} \\ \text{B. } 50 \text{ fl.} \\ \text{C. } 45 \text{ fl.} \end{array} \right.$	$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 1 \\ 3 \quad 4 \quad 3 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 3 \\ \hline 5 \quad 5 \quad 6 \\ 30 \quad 20 \quad 18 \end{array}$
---	--	--	---

XLI.

Quinque laniones simul conducunt agrum, cui A im-
mittit 30 boves, pro 4 mensibus. Quæritur, quanto tem-
pore B 40, C 24, D 20, & E 15 boves illi immittere debe-
ant, ut tandem æqualem mercedis partem persolvant?

A. 30

A. 30	boves	boves	menfes
per 4	menfes	{ B. 40	{ B. 3
Divid. 120	...per.	{ C. 24	{ C. 5
		{ D. 20	{ D. 6
		{ E. 15	{ E. 8

Ejusdem farinae.

XLII.

5 Mercatores conducunt unâ currum, cui A imponit 600 pondo 20 milliaribus vehenda; Queritur, quot pondo B eidem 15, C 12, D 10, & E 8 miliaribus vehenda imponere debeant, ut æquales mercedis partes persolvant?

A. 600 lb	millaria	singulorum pondo
per 20 mill.	{ B. 15	{ B. 800
Divid. 12000.. per.	{ C. 12	{ C. 1000
	{ D. 10	{ D. 1200
	{ E. 8	{ E. 1500

XLIII.

Mercator convenit cum auriga ut vehat 2000 lb milliaribus 25, hâc conditione, ut pro 100 lb, singulis milliaribus ei solvat 2 stufros. Qui, postquam 10 millaria confecit, propter viam salebrosam, 800 lb exonerare fuit coactus, & cum reliquis perrexit ad locum propositû. Queritur, quantum pro mercede auriga recipere debeat?

lb stuf. lb
 100 — 2 — 2000] facit 40 stuf. pro 2000 lb uno milliari vehendis.
 Milliar. stuf. Milliar.
 1 — 40 — 10] facit 400 stuf. pro 2000 lb decē milliaribus vehendis.

$\begin{array}{r} 1000 \text{ lb} \\ \text{lb} \quad \text{stuf.} \quad \text{Subt.} \quad 800 \text{ lb} \\ 100 \text{ — } 2 \text{ — } 1200 \text{ lb} \end{array}$ | facit 24 stuf. pro 1200 lb uno milliari vehendis.

$\begin{array}{r} 25 \text{ mill.} \\ \text{milliar.} \quad \text{stuf.} \quad \text{Subt.} \quad 10 \text{ mill.} \\ 1 \text{ — } 24 \text{ — } 15 \text{ mill.} \end{array}$ | facit 360 stuf. pro 1200 lb quindecim milliariibus vehendis.
 add. 400 stuf. pro 2000 lb decem milliariibus vehendis.
 fit summa 760 stuf. seu 38 floreni, ab auriga pro mercede recipiendi.

XLIV.

Oenopola duplex habet vinum, nimirum 8 stuf. & 14 stuf. cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

$\begin{array}{r} \text{Mult. } 35 \text{ flor.} \\ \text{Mult. } 80 \text{ Canth. seu, doliũ.} \quad \text{per } 20 \text{ stuf.} \\ \text{per } 8 \text{ stuf.} \quad \text{fiuntque } 700 \text{ stuf. constat dolium plenum vino } 8 \text{ \& } 14 \text{ stuf.} \\ \text{fiunt } 640 \text{ stuf.} \dots\dots\dots 640 \text{ subtr.} \\ \text{constat dolium} \quad \text{Relinq. } 60 \text{ stuf. quibus dolium plus constat impletum vino } 8 \\ \text{plenum vino } 8 \text{ stuf.} \quad \text{stuf. \& } 14 \text{ stuf. quàm plenum solo vino } 8 \text{ stuf.} \\ \text{stuf.} \quad \text{rum: vel etiam, quibus canthari } 14 \text{ stuf. in doli} \\ \quad \text{contenti cariores sunt cantharis } 8 \text{ stuf. illorum loco} \\ \quad \text{sumptis.} \\ \text{stuf.} \quad \text{subtr.} \\ \text{Ex } 14 \quad \text{subtr.} \quad \text{Canth.} \quad \text{subtr.} \\ \text{subtr. } 8 \quad \text{subtr. } 80 \text{ Canth. doliũ} \\ \text{6 stuf.} \quad \text{I.} \quad \text{60 stuf.} \quad \text{facit } 10 \text{ canth. } 14 \text{ stuf.} \\ \text{differentia pretii} \quad \text{differentia pretii} \quad \text{rel. } 70 \text{ canth. } 8 \text{ stuf.} \\ \text{unius canthari} \quad \text{cantharorum in} \\ \quad \text{dolio.} \end{array}$

Eodem modo invenitur, si monetarius duplex habeat argentum, utpote 10 den., & 8 denariorum in selibra, illudq. miscere velit, ita ut libra contineat 19 denarios. sumendas ipsi esse 1½ selibras 10 den., & ½ selibr. 8 denariorum.

Ejus.

Ejusdem farina.

XLV.

22 Personæ, nimirum, viri & mulieres, in symposio expenderunt 16 flor., & 16 stuf. : Quæritur, si quilibet virorum solvat 18, & quælibet mulierum 12 stufros, quot viri fuerint & mulieres.

Mult. 22 personas
per 12 stuf.

Mult. 16 flor. 16 stuf.

44
22
sunt 264 stufri; suntque 336 stufri, à viris & mulieribus unâ expensi.
264 subtr.

à 22 mulieribus
expensi.

relinq. 72 stufri, plus expensi à viris simul & mulieribus,
quàm si omnes mulieres fuissent: vel etiam
stufri, quos viri plus expenderunt quàm æquè
multæ mulieres.

stuf.

Ex 18

subtr. 12

relinq. 6

vir.

Subtr.

stuf. 22 Personæ

72 | facit 12 viros

relinq. 10 mulieres.

XLVI.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stuf. & 25 pira 2 stufis. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

poma stuf. poma

10 — 1 — 25 | facit $2\frac{1}{2}$ stuf. constant 25 poma.

subtr. 2 stuf. pretium 25 pirorum

Relinq. $\frac{1}{2}$ stuf. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

D 3.

Subtr.

Subtr.
 pira stuf. pira $9\frac{1}{2}$ stuf. constant 100 poma & pira simul.
 $25 - 2 = 100$ | facit 8 stuf. constant 100 pira
 relinq. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cari-
 ora sunt 100 piris, vel etiam, quibus poma in centena-
 rio contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.
 stuf. differ. poma stuf. differ. 100
 $\frac{1}{2} \text{ ————— } 25 \text{ ————— } 1\frac{1}{2}$ | facit 75 poma
 & 25 pira.

XLVII.

Quo pacto ARCHIMEDES portionem argenti, co-
 ronæ aureæ permixtam deprehenderit.

Vide Vitru-
 vium cap. 3.
 lib. 9.

Rex HIERO, cum auream coronam votivam diis suis in fano quo-
 dam constituisset ponendam, immani pretio faciendam locavit, & au-
 ri certam quantitatem appendit redemptori. Qui subtiliter opus
 confectum Regi restituit, pondus coronæ visus præstitisse. Postea ve-
 rò cum indicium factum esset, dempto auro tantundem argenti coro-
 næ admixtum esse: Indignatus HIERO se contemptum, neque inve-
 niens, quâ ratione id furtum, salvâ coronâ (quæ artificiosè erat con-
 fecta) deprehenderet, ARCHIMEDEM rogavit, ut in se sumeret de
 eo cogitationem. Is cum casu veniret in balneum, ibique, in solium
 descendens, animadverteret, quantum corporis sui in eo insideret,
 tantum aquæ extra solium effluere, duas fecisse dicitur massas æquo
 pondere, quo fuerat corona, unam ex auro, alteram ex argento. Cum
 ita fecisset, vas amplum ad summa labra implevit aquâ, in quo demi-
 sit argenteam massam, cujus quanta magnitudo in vase depressa est,
 tantum aquæ effluxit. Ita, exemptâ massâ, quanto minus factum fue-
 rat, refudit, sextario mensus, ut eodem modo, quo prius fuerat, ad
 labra æquaretur. Ita ex eo invenit, quantum ad certum pondus ar-
 genti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum
 auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eadem
 ratione mensurâ additâ, invenit ex aqua non tantum defluxisse, sed
 tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri
 massa esset quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aqua
 ipsâ

ARITHMETICÆ.

31

ipsâ coronâ demissâ, invenit plus aquæ defluxisse in coronam quàm in auream eodem pondere massam : & ita ex eo, quòd plus defluerat aquæ in corona quàm in massa, ratiocinatus deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptoris.

Cum autem VITRUVIUS de auri quantitate coronæ nullam faciat mentionem, neque etiam quâ ratiocinatione ARCHIMEDES exactam quantitatem argenti coronæ permixti invenerit, poterit Quæstio, posito pondere coronæ 10 selibrarum, & pondere aquæ effluxæ aureæ massæ 1 lb, argenteæ verò massæ $1\frac{1}{2}$ lb, & denique coronæ $1\frac{2}{3}$ lb, solvi, ut sequitur.

lb

Ex $1\frac{1}{2}$, aqua effluxa argenteæ massæ.

subtr. 1, aquam effluxam aureæ massæ.

relinq. $\frac{1}{2}$ lb, aqua plus effluxa ab argentea massa (pendente 10 selibras), quàm ab aurea massa (eiusdem ponderis).

lb

Rursus ex $1\frac{2}{3}$, aqua effluxa coronæ, sive massæ 10 selibrarum ex auro & argento conflata.

subtr. 1, aquam effluxam aureæ massæ eiusdem ponderis.

relinq. $\frac{2}{3}$ lb, aqua plus effluxa à corona, ex auro & argento conflata, quàm si ex solo auro constitisset; vel etiam, differentia aquæ, ab argenti portione in corona plus effluxæ, quàm si eiusdem portionis loco aurum assumptum fuisset.

Tum fiat,

lb aqua dant Selibr. arg. quid lb aqua? Selibr. argenti in corona.

$\frac{1}{2}$ ——— 10 ——— $\frac{1}{9}$ | facit $2\frac{2}{9}$, quod subductum ex 10, relinquit $7\frac{2}{9}$ selibras auri in corona.

Notandum autem, quòd, etiamsi satis fuisset in explorato habere pondus aquæ unius selibræ cum auri tum argenti, quoniam inde faciliè aqua defluxa plurium selibrarum inveniri potuisset, ARCHIMEDES tamen duas massas eiusdem ponderis atque coronæ fecerit, ut eò certius quæsitum obtineret, nec parva aquæ differentia, quæ in unius selibræ pondere explorando fuerit commissa, per multitudinem selibrarum multiplicata, plus quàm par erat excreseceret.

Als.

Aliter.

Si 31 lb argenti ponderent 3 lb minus in aqua quàm in aëre, & 19 lb auri 1 lb minus in aqua quàm in aëre, ponendo coronam, ut supra, in aëre pendisse 10 selibras, at verò in aqua $9\frac{199}{3301}$ selibras, invenimus argenti portionem in corona etiam hâc arte:

Subtr.

	18 lb in aqua, pendent 19	lb auri.
lb argenti in aëre, pendent 28, lb in aqua, quid 19, lb arg. in aëre?	17 $\frac{1}{3}$ lb in aqua, pendent 19	
31 ————— 18	lb argenti.	
	reling $\frac{2}{3}$ lb differentia, quâ 19	
	lb auri plus pendent	
	in aqua quàm 19 lb	
	argenti.	
lb auri in aëre, pendent 18, lb in aqua, quid 10 selibr. pondus cor. in aëre?	9 $\frac{2}{3}$ selibr. pendet corona	
19 ————— 18	ex solo auro in aqua.	
	subtr. $9\frac{199}{3301}$ selibr. pendet corona	
	ex auro & argento	
	permixtum in aqua.	
Tum fiat	subtr.	
lb diff.	selibr. diff. 10 selibr. auri & ar-	
26 lb argent.	genti in corona.	
31 — 19	facit $2\frac{2}{9}$ selibr. argenti	
	in corona.	
	& $7\frac{7}{9}$ selibr. auri in co-	
	rona, ut ante.	
	Relinq $\frac{120}{3301}$ selibr. differentia;	
	quâ corona ex solo auro plus	
	pendet in aqua quàm ex auro	
	& argento conflata; vel etiam	
	differentia, qua detractum au-	
	rum plus pendit in aqua quàm	
	additum argentum.	

Et tantum de Arithmetice Questionibus atque Problematis simplicibus, hoc est, quæ absque ulla radicum extractione solvi possunt. Earum autem, quæ sequuntur, prima est Plana Questio, cum ad quesiti inventionem extrahi debeat \sqrt{Q} ; quæ verò duæ reliquæ, Solidæ sunt, cum ad illas solvendas opus sit extrahere \sqrt{C} .

XLVIII.

Aliquis debet post 12 menses 17579 flor., 12 stuf., & 8 den. convenit autem cum creditore suo de eodem debito persolvendo finitis 6 mensibus, remittendo usuram usuræ

suræ denarii 20 in anno: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur?

NOTA: Cum 17579 flor. 12 stuf. & 8 den., vel 17579625⁽¹⁾ solvendum post 12 menses ad 17155957⁽²⁾ solvendum post 6 menses eandem rationem habere debeat, quam 17155957⁽²⁾ solvendum post 6 menses ad 16742500⁽³⁾ paratâ pecuniâ solvendum; patet, 17155957⁽²⁾ medium esse proportionalem numerum inter 17579625⁽¹⁾ & 16742500⁽³⁾. Ad quem obtinendum, multiplicari debet 17579625⁽¹⁾ per 16742500⁽³⁾, & ex eo quod fit extrahi \sqrt{Q} , & habebitur 17155957⁽²⁾.

Inspecte sequentem operationem.

12 stuf. 8 den.
20 stuf. flor. $\frac{16}{200}$
16 den. — 1 — $\frac{16}{200}$ den., facit $\frac{200}{24}$ vel $\frac{1}{12}$ flor. hoc est, in decimalibus 625⁽¹⁾

Utpote dividendo 5425⁽¹⁾ { 625⁽¹⁾
per ... 8

Solv. post 12 mens. Solv. parat. pec. Solv. post 12 mens.
21 ——— 20 ——— 17579625⁽¹⁾

21 17579625...⁽¹⁾ solv. post 12 menses.
351592500⁽³⁾ 16742500⁽³⁾ solv. paratâ pecuniâ.

21 8789812500.

35159250

70318500

123057375

105477750

17579625

2|94|32|68|71|56|25|20 @

facit 1|7|1|5|5|9|7|3 Solv. post 6 menses, hoc est, 17155 flor. 19 stuf. & 2 den. circiter.

flor. 17155 | 257
20
stuf. 19 | 14
16
84
14
den. 2 | 24

XLIX.

Aliquis debet post 12 menses 17579625③, convenit autem cum creditore suo de eodem debito solvendo finitis 4 mensibus: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, si remittatur usura usuræ denarii 20 in anno: facit 17017 flor. 0 stuf. & 5 denarios.

Post 12 mens.	Parat. pec.	Post 12 mens.	Parat. pec.
21	20	17579625③	facit 16742500③
			16742500③
			8371250000
			334850
			669700
			1171975
			1004550
			167425
			280311306250000⑥
			17579625 ③
			1401556531250000
			56062261250
			168186783750
			252280175625
			196217914375
			140155653125
			196217914375
			28031130625
			4927767647135156250000⑨
		facit	1 7 0 1 7 0 1 6③
			post 4 menses, hoc est, 17017
			flor. 0 stuf. & 5 den. circiter.

L.

Aliquis solvere debet paratâ pecuniâ 16742 flor. & 10 stuf. convenit autem cum creditore suo de eodem debito per-

persolvendo finitis 8 mensibus: Queritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, habendo rationem lucri usuræ ad denarium 20 in anno?

NOTA: Cum 17579625 ③, solvendum post 12 menses, ad 17296033 ③, solvendum post 8 menses, eandem habeat rationem, quam 17296033 ③, solvendum post 8 menses, ad 17017016 ③, solvendum post 4 menses; & eandem quoque quam 17017016 ③, solvendum post 4 menses, ad 16742500 ③, solvendum paratâ pecuniâ: patet, 17017016 ③ & 17296033 ③ esse duos medios proportionales numeros inter 16742500 ③ & 17579625 ③. Ad quos inveniendos, si multiplicetur quadratum ex 16742500 ③ per 17579625 ③, & quadratum ex 17579625 ③ per 16742500 ③, & ex productis numeris extrahatur √C: fient 17017016 ③ & 17296033 ③, quæsi numeri.

Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses

20 ————— 21 ————— 16742500 ③ | facit 17579625 ③

17579625 ③

87898125

35159250

105477750

138216625

123057375

87898125

123057375

17579625

309043215140625 ③

16742500 ③

1545216075703 12500

618086430281250

1236172860562500

2163302505984375

1854259290843750

309043215140625

5 | 174 | 156 | 029 | 491 | 914 | 062 | 500 ③

facit 1 | 7 | 2 | 9 | 6 | 0 | 3 | 3 ③

post 8 menses, hoc est, 17296 flor.

0 stuf. & 10 den. circiter.

E 2

Quo

flor. 17296 033

— 20

stuf. 0 66

— 16

3 96

— 66

den. 10 56

36 PROPOSITIONES ARITHMETICÆ.

*Quo pacto hæ, aliaq. similes usuræ quæstiones compendiosè
per Logarithmorum Tabulas solvende sint, vide cap. 17.
Arithmetica Logarithmica Doctissimi Briggii.*

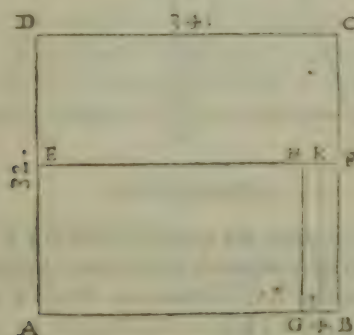
Sequuntur PROPOSI-
TIONES GEOME-
TRICÆ.

PRO-

PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

I.

A Ream quadrilateram $ABCD$, cujus longitudo AB vel DC est 34, & latitudo AD vel BC 32 pedum, dividere; ita ut, dempto communi angiportu $GBFH$, latitudinis GB , 4, pedum, parallelogramma $AGHE$ & $EFCD$ sint inter se æqualia.



Quod ut fiat, ducatur IK ex I , medio ipsius GB , parallela GH vel BF : eritque GI vel IB 2, & AI 32. Deinde multiplicatâ AB 34 per BC 32, fit 1088, area $ABCD$. Cujus semissis 544, erit area gnomonis $EDCBIK$ vel parallelogrammi $AIKE$. Quæ divisa per longitudinem AI 32, dabit latitudinem IK vel AE 17. indicans, quot pedes mensurandi sint ab A ad E , vel à B ad F .

E 3

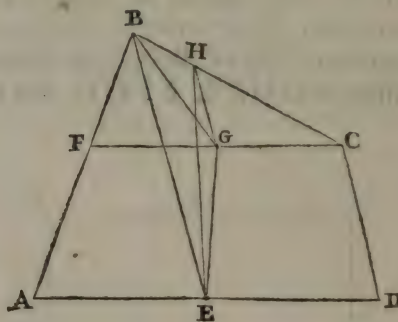
II. Tra-

II.

Trapezium $ABCD$ dividere bifariam, rectâ EH , ductâ ex E , puncto medio lateris AD .

Constructio.

Ductâ CF parallelâ DA , junctâque EB ; ex G , medio ipsius CF , agatur GH parallelâ EB , dico rectam EH fore quæsitam.



Demonstratio.

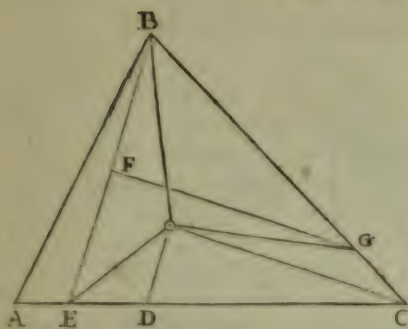
Junctis EG , GB , patet eas quadrilaterum $AFCD$ nec non triangulum FBG dividere bifariam, & propterea segmentum $ABGE$ semissem esse trapezii $ABCD$. Hinc cum $ABGE$ compositum sit ex binis triangulis ABE , EBG ; & EBG per 37 prop. lib 1 Elem. Eucl. sit æquale EBH : erit quoque $ABHE$ (compositum ex ABE & EBH) semissem trapezii $ABCD$, adeoque EH linea quæsitâ.

III.

Triangulum ABC dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ divisione à linea BO .

Con-

Constructio.



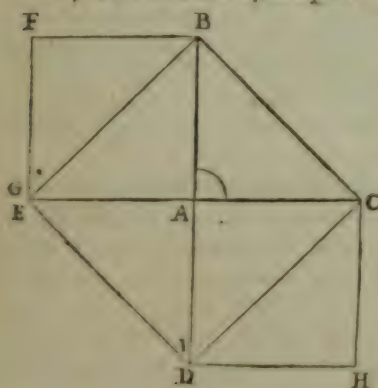
Cujus demonstratio ex 37 prop. lib. 1^{mi} Elem. Euclidis est manifesta.

IV.

In rectangulis triangulis ABC quadratum BCDE, quod à latere BC rectum angulum A subtendente describitur, æquale est quadratis ABFG, ACHI, laterum circa rectum AB, AC.

Hæc est 47 prop. libr. 1^{mi} Elem. Euclidis, alio modo demonstrata.

1^{mus} Casus, ubi AB, AC æquales sunt

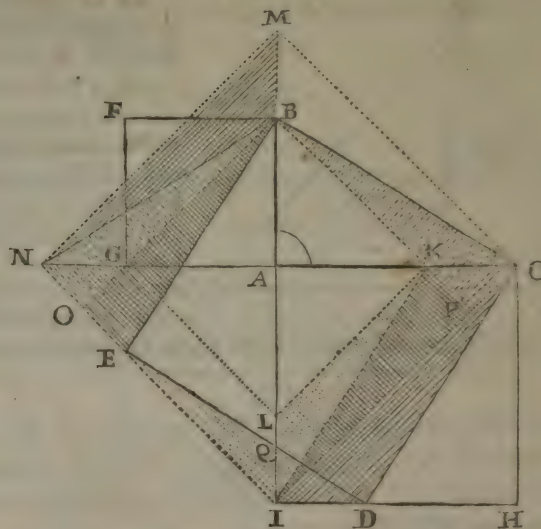


Primum si AB sit æqualis AC, quoniam \square^{um} ABFG æquale est \triangle^{lo} BED, & \square^{um} ACHI æquale \triangle^{lo} BCD, atque hæc bina triangula simul constituunt \square^{um} BCDE: patet, \square^{um} BCDE æquale esse binis \square^{is} ABFG, ACHI.

Si verò AB, AC inæquales sint, sumptis AK, AL singulis æqualibus ipsi AB, jungantur BK, KL, LG, & GB.

2. Casus

2^{us} Casus, in quo AB, AC inaequales sunt.



Deinde sumptis AM, AN singulis æqualibus ipsi AC , agantur $CM, MN, NI, & IC$. Denique junctis BN, IK , productisque BG, BK ad $O & P$, in rectis NI, CI , secetur ED ab AI in Q .

Quibus positis, patet, ut ante, $\square^{um} ABFG$ æquale esse $\triangle^{lo} BGL$ vel BKL , & $\square^{um} ACHI$ æquale $\triangle^{lo} MCI$ vel MNI : ac proinde bina hæc quadrata æqualia esse plano $KBMNILK$. Quare, cum dicantur hæc \square^{ra} æqualia esse $\square^{to} BCDE$, ostendendum est, partes planum $KBMNILK$ constituentes, contineri quoque in $\square^{to} BCDE$. Quod hoc modo fit manifestum.

Figura $KBEQLK$ utrique est communis, hoc est, simul in plano $KBMNILK$ & in $\square^{to} BCDE$ continetur. Deinde bina $\triangle^{la} BNO, OBE$, contenta in plano $KBMNILK$, æqualia sunt binis $\triangle^{lis} BCP, PKI$, contentis in $\square^{to} BCDE$. Similiter quoque bina reliqua $\triangle^{la} NMB, EDI$, in plano $KBMNILK$ contenta, æqualia sunt binis reliquis ICD, ILK , contentis in $\square^{to} BCDE$. Unde, cum omnes partes jam dictæ, quæ continentur in plano $KBMNILK$, continentur etiam in $\square^{to} BCDE$, & utrobique redundet commune $\triangle^{lum} IQD$,

I QD, sequitur planum KBMNILK, hoc est, duo \square^{11} ABFG & ACHI simul sumpta æqualia esse \square^{10} BCDE.

Supplementum seu demonstratio plenior.

Quoniam autem dubitare quis posset de æqualitate dictorum triangulorum, Sciendum est, in 1^{mo} casu descriptis super AB & AC \square^{11} ABFG & ACHI, lineas GAC & BAI^a rectas esse: itemque, GA, AB, AC, & AI omnibus inter se æqualibus existentibus, & angulis ad A rectis, adeoque æqualibus, angulos quoque AGB, ABG, ABC, ACB, ACI, AIC, AIG, & AGI omnes^b inter se æquales esse, & propterea^c semirectos: ut & lineas GB, BC, CI, & IG omnes^d inter se æquales. Id quod ostendit, junctis GB, CI, & IG, figuram GBCI esse quadratam, cujus nimirum anguli recti sunt & latera inter se æqualia ostensa. vel etiam, quòd \square^{10} BCDE, super BC descriptum, idem sit atque illud, quod comprehenditur 4^{or} lineis GB, BC, CI, & IG.

ap 14 Pri-
mi Elem.
Eucl.

bp 5 Pri-
mi Elem.
Eucl.

cp 22 Pri-
mi Elem.
Eucl.

dp 4 Pri-
mi Elem.
Eucl.

Eodem modo in 2^{do} casu erunt quadratæ, figuræ MCIN & BKL G.

Quod ad 2^{dum} casum attinet, in quo angulis BCD & ACH rectis existentibus, ab iisque subducto communi angulo ACD, relinquitur angulus BCA æqualis angulo DCH: patet, Quoniam anguli ad A & C Δ^{11} ABC æquales sunt angulis ad H & C Δ^{11} HDC; & latus AC, propter \square^{10} ACHI, æquale lateri CH, latus quoque BC ipsi CD^e; latusque AB ipsi DH æquale esse. Unde liquet, cum CD ducta sit ad angulos rectos ipsi CB, donec occurrat ipsi IH in D, eandem quoque ipsi BC æqualem fore: adeoque \square^{11} BCDE angulum D cadere in rectam IH. Porro, cum rectangulorum Δ^{10} NAB & BAC latus NA sit æquale lateri AC, latusque AB utrique commune: erit etiam^f angulus ANB ipsi BCA, & angulus NBA ipsi ABC, latusque NB ipsi BC vel CD æquale. Eodem modo in Δ^{11} AKI & ABC æqualia erunt latera IK & BC. Quoniam itaque anguli NBA & ABC æquales sunt ostensi, erunt quoque ab iisdem subductis æqualibus seu semirectis GBA & ABK, reliqui NBO & PBC æquales. Similiter, cum anguli ANB & BCA sint æquales, si ipsis addantur æquales seu semirecti INA & ACI, erunt & anguli ONB & BCP æquales. Hinc, cum Δ^{10} ONB & BCP anguli ad N & B sint angulis ad C & B æquales, latusque NB æquale lateri BC, erunt quoque & latera NO & OB lateribus

ep 26 Pri-
mi Elem.
Eucl.

fp 4 Pri-
mi Elem.
Eucl.

gp 26 Pri-
mi Elem.
Eucl.

F

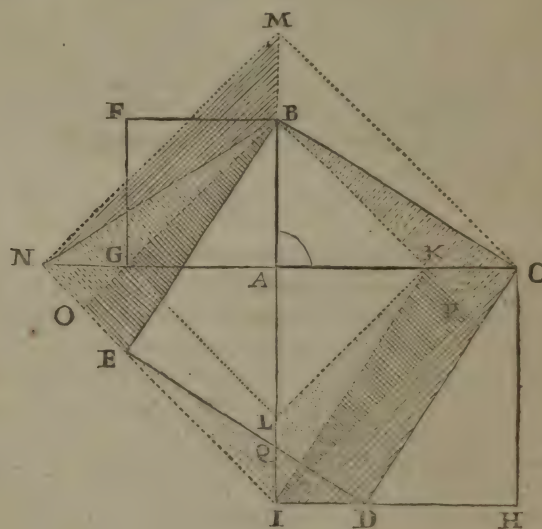
CP

PROPOSITIONES

42

h p 15 Pri-
mi Elem.
Eucl.
i p 32 Pri-
mi Elem.
Eucl.
k p 13 Pri-
mi Elem.
Eucl.
l p 26 Pri-
mi Elem.
Eucl.

CP & PB æqualia, angulusque NOB ipsi BPC, nec non Δ^{sum} NOB ipsi Δ^{lo} BPC. Quare, angulo GNO ut & OGN, hoc est, Δ^{h} AGB, semi-recto existente, adeoque Δ^{i} angulo NOG vel NOB & consequenter Δ^{k} BOE recto, angulus etiam BPC rectus erit. Ideo, quoniam anguli OBP & EBC recti sunt, & ab iisdem subducto communi EBP, anguli OBE & PBC relinquuntur æquales, & proinde bini anguli ad O & B Δ^{li} OBE æquales sunt binis ad P & B Δ^{li} PBC, laterisque OB æquale BP (ut ostensum est): erit quoque latus Δ^{i} OE ipsi PC, latusque EB ipsi



BC æquale: adeò ut BE perpendiculari existente ipsi BC usque ad NI, illa quoque æqualis sit futura ipsi BC, ac proinde \square^{li} BCDE angulus E cadet in rectam NI. Præterea, cum AM ipsi AC, hoc est, Δ^{m} ipsi IH æqualis sit, & AB ipsi DH (ut supra ostensum): erit & reliqua MB reliqua ID æqualis. Eodem modo LI æqualis erit ID. Hinc, quoniam Δ^{li} NMB singula latera æqualia sunt singulis lateribus Δ^{li} ICD, erit quoque Δ^{sum} NMB ipsi Δ^{lo} ICD æquale. Item, cum NI æqualis sit IC, & NO æqualis PC: erit reliqua OI, hoc est, Δ^{o} OB, reli-

m p Con-
structionem.
n p 8 Pri-
mi Elem.
Eucl.
o p 6 Primi
Elem. Eucl.

reliqua IP æqualis. Est autem & OE æqualis ostensa ipsi PC, hoc est, PPK; & EB, hoc est, BC, æqualis ipsi IK. Quare Δ^{um} OBE ipsi Δ^{lo} IKP η æquale erit. Deniq; quoniam NO, OE utraque æqualis est ostensa ipsi PC, & propterea ipsæ inter se æquales sunt; & NO ipsi OG: erit etiam OE ipsi OG æqualis; quæ si auferantur ex æqualibus OI, OB, relinquunt EI æqualem GB, hoc est, LK. Unde cum IE ipsi LK, ED vel BC ipsi KI, & ID ipsi IL æqualis sit: erit itidem Δ^{lum} EID ipsi Δ^{lo} ILK æquale.

p p 6 Primi
Elem. Eucl.
q p 8 Primi
Elem. Eucl.
r p 6 Primi
Elem. Eucl.
s p 8 Primi
Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

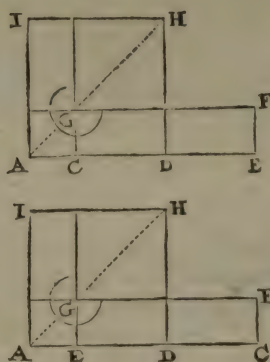
Ex hac propositione constat, si duo Δ^{li} rectanguli latera utcumque cognita sint, quo pacto tertium latus incognitum invenendum sit. Etenim, si ex gr. AB sit 3, & AC 4, ad inveniendam BC: addatur 9, \square^{um} ex AB ad 16, \square^{um} ex AC, & sit 25, \square^{um} ex BC. Cujus $\sqrt{\quad}$, utpote 5, dabit quantum latus BC.

Cognitis autem AB & BC, ad inveniendum AC, subducatur 9, \square^{um} ex AB, 125, \square^{to} ex BC, & relinquatur 16, pro \square^{to} ex AC, cujus radix 4, est AC. Eodem modo, cognitis BC & AC, ut inveniat A B, subtrahendum erit 16, \square^{um} ex AB, a 25, \square^{to} ex BC, & ex reliquo 9, $\sqrt{\quad}$, quæ est 3, erit latus AB.

Similiter liquet, quâ ratione \square^{um} fieri possit, ut puta BCDE, quod sit æquale duobus datis \square^{is} ABFG & ACHI simul sumptis: nimirum ponendo AB latus unius ad rectos angulos ipsi AC lateri alterius. Quomodo etiam ex hac propositione manifestum est, quo pacto \square^{orum} latera collocanda sint, ad unum \square^{um} ex altero \square^{to} tollendum, & ostendendum reliquum \square^{um} .

V.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AD, DC, & super utraque describatur quadratum: excedet quadratum AH majoris AD quadratum GH minoris CD vel DE rectangulo AF, contento sub aggregato & differentia earundem rectarum.

Demonstratio.

Quoniam enim 3^{ta} IG, GD, & DF æqualia sunt, quippe ejusdem longitudinis & latitudinis: patet, si ex gnomone IGD auferatur \square^{lum} IG, & ejus loco addatur \square^{lum} DF, quod \square^{lum} AF sit æquale gnomoni IG D. Quare cum hic gnomon sit differentia, quâ \square^{tum} AH superat \square^{tum} GH: excedet \square^{tum} AH quadratū GH rectangulo AF, contento sub aggregato & differentia ipsarum AD, DC. Id quod cum eo convenit, quod ab Euclide in prop^{ne} 6^{ta} libri 2^{di} Elementorum demonstratum est, ubi docet: si CD & DE sunt æquales, \square^{lum}

CAE unâ cum \square^{to} ex CD vel DE æquale esse \square^{to} ex AD.

VI.

Si ex angulo B cujuscunque trianguli ABC in latus oppositum AC, ceu basin, demittatur perpendicularis BD, cadens extra vel intra triangulum ABC: erit differentia quadratorum, laterum AB, BC circa angulum B, æqualis differentia quadratorum à segmentis AD, DC, inter perpendicularem BD & basis terminos A & C comprehensis.

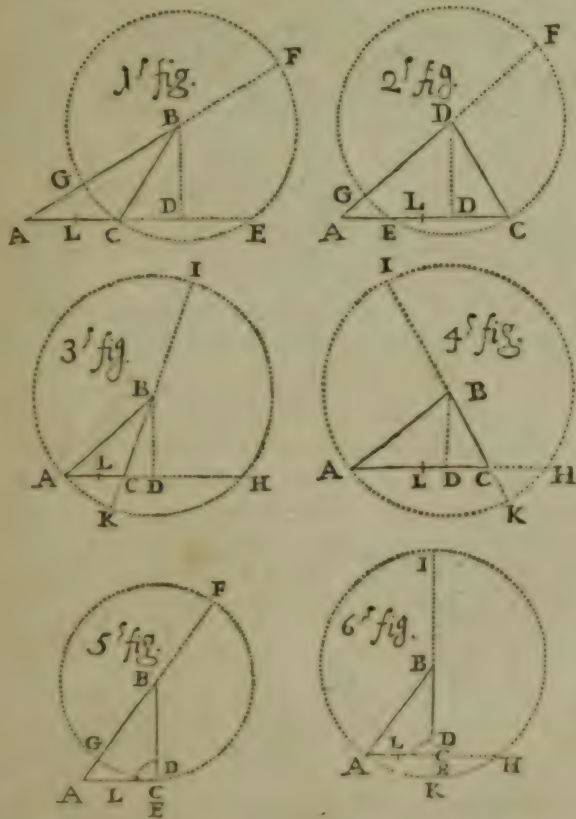
Demonstratio.

Quoniam enim a \square^{tum} ex AB æquale est \square^{tis} ex AD & DB, & \square^{tum} ex BC æquale \square^{tis} ex CD & DB: tantum excedet \square^{tum} ex AB ipsum \square^{tum} ex BC, quantum bina \square^{ta} ex AD, DB excedunt bina ex CD, DB. Sed bina \square^{ta} ex AD, DB superant bina \square^{ta} ex CD, DB, in quantum \square^{tum} ex AD superat \square^{tum} ex CD. Quare & \square^{tum} ex AB tantum excedet \square^{tum} ex BC, quantum \square^{tum} ex AD excedit \square^{tum} ex CD. Quod erat demonstrandum.

1 Co-

1 Corollarium.

Hinc sequitur, si ED sumatur æqualis DC, quoniam \square^{um} ex AD superat \square^{um} ex DC, rectangulo CAE, contento sub aggregato \square^{um} ex DC, b p p r a c c e - d e n t e p r o p .



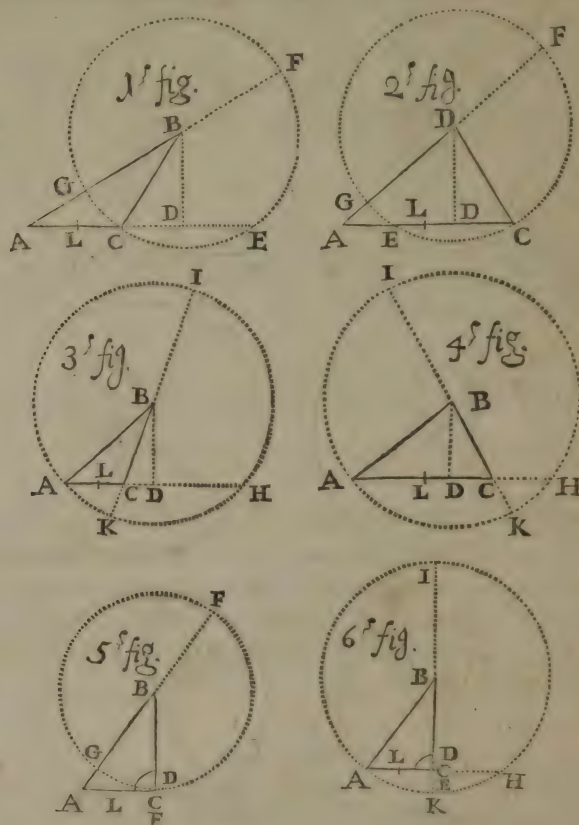
& differentiâ ipsarum AD, DC; atque etiam \square^{um} ex AB excedat \square^{um} ex BC rectangulo, comprehenso sub aggregato & differentiâ laterum AB, BC: Rectangulum CAE huic \square^{lo} esse æquale.

F 3

2 Co-

2 Corollarium.

Unde ulterius liquet, si ex B intervallo BC describatur circulus, secans AB in G, eamque productam in F, quoniam tum AF summa



est, & AG differentia ipsarum AB, BC, idemque circulus transeat quoque per E: Quod $\square^{lum} FAG$ ipsi $\square^{lo} CAE$ sit æquale. Et si $\triangle^{lum} ABC$ fuerit rectangulum in C, quod $\square^{lum} FAG$ æquale sit \square^{to} ex AC. Id quod ab Euclide etiam est ostensum 36^{ta} prop^{ne} libr. 3^{ta} Elementorum.

3 Co-

3 Corollarium.

Similiter patet, si ex B intervallo B A circulus describatur, & A C, C B usque ad circumferentiam producantur in H, I, & K, quoniam rursus I C summa est, & C K differentia ipsarum A B, B C, atque etiam $\square^{\text{lum}} \text{ACK}$, ut supra, (propter æqualitatem rectarum A D, D H) contentum sub summa & differentia ipsarum A D, D C: Quòd $\square^{\text{lum}} \text{ICK}$ sit æquale $\square^{\text{lo}} \text{ACH}$.

Et si $\triangle^{\text{lum}} \text{ABC}$ sit rectangulum in C, quòd $\square^{\text{lum}} \text{ICK}$ sit æquale $\square^{\text{lo}} \text{ACH}$. Id quod Euclides quoque demonstravit 14^{ta} prop^{ne} 2^{di} libri & 35 prop. 3 libri Elementorum.

4 Corollarium.

Unde tandem manifestum sit, divisā A C bisariam in L, quoniam tum A C dupla est A L, & A E dupla L D, adeoque $\square^{\text{lum}} \text{CAE}$ quadruplum $\square^{\text{li}} \text{ALD}$: Quòd differentia \square^{conum} ex A B B C, hoc est, $\square^{\text{lum}} \text{FAG}$ vel ICK sit quadruplum $\square^{\text{li}} \text{ALD}$. Id quod & à Pappo demonstratum est prop^{ne} 120 libri 7 Collectionum Mathematicarum.

S C H O L I U M.

Ex hac propositione constat, quo pacto, cognitis tribus lateribus $\triangle^{\text{li}} \text{ABC}$, *Inspice 1* inveniri possint segmenta basis A D, D C, & perpendicularis B D. Etenim *figuram.* si B D cadat extra A B C, & A B sit, ex: gr: 20, B C 13, & A C 11: ut inveniantur A D, D C, multiplicanda erit A F 33 per A G 7, & productum 231, hoc est, $\square^{\text{lum}} \text{FAG}$ vel CAE , dividendum per A C 11, & habebitur A E 21. Ex qua subductā A C 11, restabit C E 10, hoc est, 5, pro E D vel D C. Cui si addatur A C 11, fiet A D 16.

Vel etiam hoc modo: multiplicando scilicet I C 33 per C K 7, & productum 231, hoc est, aream $\square^{\text{li}} \text{ICK}$ vel ACH , dividendo per A C 11, orietur *Inspice 3* C H 21. Cui addendo A C 11, fiet A H 32. Huius semisus 16, erit A D vel *figuram.* D H. Ex qua subductā A C 11, relinquitur C D 5.

At vero perpendiculari B D cadente intra A B C, si A B sit, verb: gr: 15, B C 13, & A C 14: ad inveniendus A D & D C multiplicetur A F 28 per A G *Inspice 2* 2, & fit 56, $\square^{\text{lum}} \text{FAG}$ vel CAE . Quod divisum per A C 14, dat A E 4. Hac *figuram.* autem ex A C 14 subductā, relinquit E C 10, hoc est, 5, pro E D vel D C. Quā ex A C 14 sublata, restabit A D 9.

Vel etiam sic: Multiplicetur I C 28 per C K 2, & sit $\square^{\text{li}} \text{ICK}$ vel ACH 56. Quod

Inspice 4
figuram.

56. Quod divisum per AC 14, dat CH 4. Huic si addatur AC 14, fiet AH 18, cuius semisus 9 erit ipsa AD vel DH. Quæ ex AC 14 subducta relinquit DC 5.

E quibus facile porro perpendicularis BD inveniri potest, quemadmodum in scholio propⁿⁱ 4 huius est ostensum, vel brevius, hoc modo: Quoniam differentia quadratorum ex CD, CB, per praced. prop. est aequalis rectangulo contento sub aggregato & differentia ipsarum CD, CB; atque etiam subducto $\square CD \dot{a} \square CB$ per 4^{ta} huius relinquatur $\square BD$: Erit \square lum comprehensum sub aggregato & differentia ipsarum CD, CB aequale \square ex BD. Quare si multiplicetur 18, summa ipsarum CD, CB, per 8, earundem differentiam, erit 12, $\sqrt{\quad}$ nimirum producti 144, ipsa longitudo BD.

Hic quoque non ineptè ostendi potest, si \triangle^b rectanguli ABC cognoscatur unum latus circa rectum, ut AC, & aggregatum aut differentia alterius lateris BC & Hypotenuse AB, Quo pacto latera AB, BC seorsim sint invenienda.

Si enim AC sit, ex: gr.; 8, & summa ipsarum AB, BC, hoc est, AF vel IC 32: Dividatur 64, $\square AC$, hoc est, $\square FAG$ vel $\square ICK$, per AF vel IC 32, orieturq; AG vel CK 2, differentia ipsarum AB, BC. Hinc si ex AF 32 auferatur AG 2, relinquetur GF 30. Cuius semisus 15 est ipsa GB, BF, vel BC. Huic si addatur AG 2, fit AB 7. Vel etiam ipsi IC 32 addendo CK 2, & habetur IK 34, cuius semisus IB vel BK 17 erit ipsa AB. E qua subducta CK 2 relinquit CB 15.

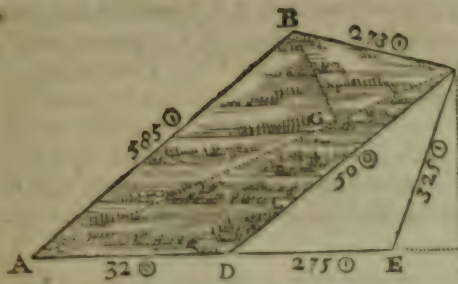
At verò existente AC 8, & AG vel CK 2, ut inveniantur AB & BC: dividatur rursus 64, $\square AC$, hoc est, $\square FAG$ vel $\square ICK$, per AG vel CK 2, orieturq; AF vel IC 32. E qua subducta AG 2, restabit GF 30. Cuius semisus 15, erit ipsa GB, BF, vel BC. Huic si addatur AG 2, fiet AB 17.

Vel etiam ipsi IC 32 addendo CK 2, erit summa IK 34, cuius semisus 17 erit ipsa IB, BK, vel AB. E qua sublatâ CK 2, remanet 15 pro BC.

VII.

Paludis vel stagni quadrilateri ABCD cognitis lateribus AB 58, 50, BC 27, 30, CD 50, & AD 32; productoque latere AD ad E; ita ut DE sit 27, 50, & EC 32, 50: invenire aream ABCD.

Quæ-



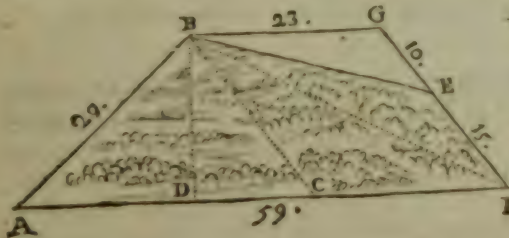
Quærat, ut in præcedenti propositione Cest ostensum, ex tribus \triangle^{li} DCE cognitis lateribus, segmentum externum EF, ut & perpendicularis CF. Fitque EF 125, & FC 300. Tum

juncta AC, multiplicetur AD 320 per 150, semissem nempe ipsius FC: & prodibit 48000, area \triangle^{li} ACD. Deinde additis AD 320, DE 275, & EF 125, sit summa AF 720: cujus \square^{to} , utpote 518400, si addatur 90000, \square FC, habebitur 608400, \square AC. Unde radix, ut 780, erit ipsa AC. Jam quærat^c per tria latera \triangle^{li} ABC perpendicularis BG, sitque BG 16, 380. Cujus semissis ut 8, 190 si multiplicetur per AC 780, exsurgit 638, 820, area \triangle^{li} ABC. Quæ addita ad 48000, aream sc. \triangle^{li} ACD, dabit 1118, 820, aream totius quadrilateri ABCD, utputa 1118 \square decempedarum, & 82 \square pedum. Quærat inveniendâ.

^a p vulgarem regulam, inveniendi areâ trianguli. ^b p 4 hujus, vel p 47 Primæ Elem. Eucl. ^c ut in præced. prop. est ostensum.

VIII.

Latifundii quadrilateri ABEF, mensuranti invii, cognitis lateribus AB 29, AF 59, & FE 15 perticarum, productoque latere FE ad G, ita ut BG æquidistat ipsi AF, invenire aream ABEF, si EG sit 10, & BG 23 perticarum.



Ductâ BC parallela GF, erit BG^a æqualis CF. Quare, si BG 23 auferatur ex AF 59, restabit CA 36, cumque BC sit æqualis GF 25:

patet, si, ut in 6^{ta} propositione per 3^a latera \triangle^{li} ABC quærat^c perpendicularis BD, ipsam fore 20. Cujus semissis 10 si multiplicetur per

^a p 34 Primæ Elem. Eucl.

^b p vulga-
rem regu-
lam inveni-
endi aream
trapezii cū
duobus late-
ribus paral-
lelis.

^c p vulga-
rem regu-
lam inveni-
endi aream
trianguli.

^d p 1 Sexti
Elem. Eucl.

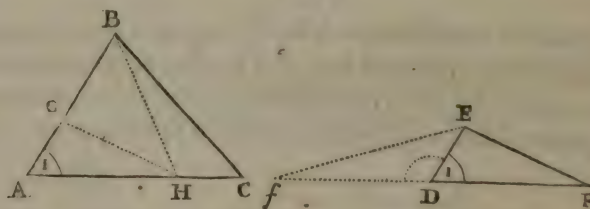
per 82, summam laterum parallelorum BG, AF, ^b prodibit 820, area trapezii ABGE. Tum iuncta BF, multiplicetur CF 23 per 10, semissem ipsius BD, & ^c fit 230, area \triangle^{li} CBF vel FBG. Porro cum \triangle^{la} FBG & EBG ejusdem sint altitudinis, seu in eisdem sint parallelis CB, FG, ac proinde ^d inter se ut bases FG & EG: Hinc si fiat, ut FG 25 ad EG 10, sic 230 area \triangle^{li} FBG, ad 92 aream \triangle^{li} EBG: quā subductā ex tota area ABGF 820, relinquitur 728, area trapezii ABEF. Quæ erat invenienda. Idem fieri quoque potest, ut in prop^{ne} sequenti 10^{ma} est ostensum.

IX.

Triangula ABC, DEF æqualem angulum i habentia inter se sunt, ut rectangula BAC, EDF, contenta sub lateribus BA, AC & ED, DC circa æqualem angulum.

Demonstratio.

Sumptis enim AG, AH æqualibus DE, DF, agantur GH, HB, ^a p 4 Primi eritque \triangle^{li} AGH æquale \triangle^{lo} DEF. Est autem ratio \triangle^{li} ABC ad \triangle^{li} AGH composita ex ratione \triangle^{li} ABC ad \triangle^{li} ABH, & ex ratione \triangle^{li}



^b Est enim

ratio extre- ABH ad \triangle^{li} AGH ^b. Quare cum ^c ABC sit ad ABH, ut AC ad AH; morum cō- & ABH ad AGH, ut AB ad AG: erit ratio \triangle^{li} ABC ad \triangle^{li} AGH

posita ex ra- composita ex ratione AC ad AH, & ex ratione AB ad AG. Sed & tionibus in- ratio \triangle^{li} BAC ad \triangle^{li} GAH ^d composita est ex ratione BA ad AG, rmediis.

^c p 1 Sexti & ex ratione AC ad AH. Erit itaque \triangle^{li} ABC ad \triangle^{li} AGH, hoc est, Elem. Eucl. DEF, ut \triangle^{li} BAC ad \triangle^{li} GAH vel EDF. Quod erat demonst- ^d p 23 Sexti

Elem. Eucl. dum. Idem patet in \triangle^{li} s ABC, DEF, quorum anguli ad A & D duobus simul

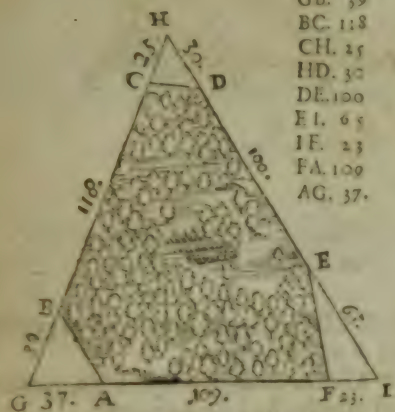
GEOMETRICÆ.

simul rectis sunt æquales: quoniam, fD æquali assumptâ & in dire-
ctum ipsi DF , ΔfDE ipsi ΔDEF est æquale, ut & $\square fDE$ ipsi
 $\square EDF$.

51

e 23^a Pri-
mi Elem.
Eucl.

SCHOLIUM.



GB. 39
BC. 118
CH. 25
HD. 30
DE. 100
EI. 68
IF. 23
FA. 100
AG. 37.

Hinc liquet, quâ ratione
inveniri queat area salus
aut stagni, quod triangulo
inclusi potest. Vi ex: gr: ad
inventendam aream hexa-
goni ABCDEF, triangulo
GHI inclusi, cujus omnes
lineæ, in margini notatæ,
cognitæ sunt. Quæritur
1^a per tria latera, area f ut in 7
 Δ^u GHI 14196. Tum prop. hujus.
fiat, ut 30758, \square HGI,
ad 1443. \square BGA, ita
14196, ad 666, aream
 Δ^u GBA. Rursus fiat, ut

35490, \square GHI ad 750, \square CHD, ita 14196 ad 300, aream Δ^u
CHD; ac denique ut 32955, \square GHI ad 1495, \square FEI, ita 14196 ad
644, aream Δ^u FEI. Vnde additis 666, 300, & 644, summa 1610
subtrahatur ex 14196, & relinquetur 12586, area hexagoni ABCDEF.

X.

Si triangulum ABC & quadrilaterum DEGH æqua-
lem habeant angulum i, lateraque DH, EG sint parallela:
erit triangulum ABC ad quadrilaterum DEGH, sicut re-
ctangulum sub AC, A Bad rectangulum sub DH, EG &
DE.

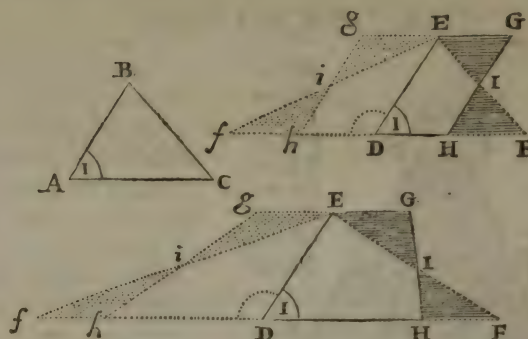
Demonstratio.

Sumpta HF æquali EG in directum ipsi DH, jungatur EF, secans
HG in I: eritque ΔDEF æquale quadrilatero DEGH, propter
æqualia Δ^u EGI & HFI^a. Hinc, cum DF sit communis, & ipsarum DH,
EG,

2^a p 29 &
2^a p 1^a Pri-
mi Elem. Eucl.

G 2

EG, & per præcedentem propositionem $\triangle ABC$ fit ad $\triangle DEF$, hoc est, ad quadrilaterum $DEGH$, sicut $\square CAB$ ad $\square FDE$: patet,

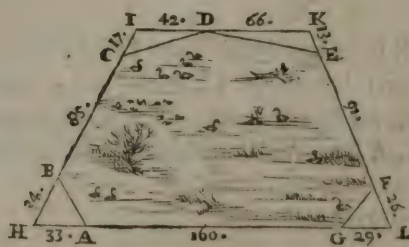


$\triangle ABC$ esse ad quadrilaterum $DEGH$, ut \square sub AG , AB ad \square sub DH , EG & DE . Quod erat demonstrandum.

Idem similiter patet in $\triangle ABC$ & quadrilatero $DEgh$, quorum anguli ad A & D simul sumpti æquales sunt duobus rectis.

SCHOLIUM.

Hinc manifestum est, quo pacto area saltus stagnivæ inveniri queat, quod quadrilatero includi potest, habente duo latera parallela. Si enim, verbi gr.,



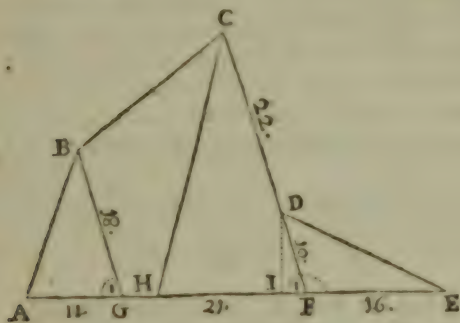
HB.	34
BC.	85
CI.	17
ID.	42
DK.	66
KE.	13
EF.	91
FL.	26
LG.	29
GA.	160
AH.	33.

invenienda sit area heptagoni $ABCDEFG$, comprehensi quadrilatero $HIKL$, ejus latera IK , HL sunt parallela, & segmenta, ut in margine, cognita: que-

queratur primò, ut in 8^{va} prop^{ne} est ostensum, area trapezii HIKL 19800. Tum fiat, ut 44880, \square sub HL, IK & HI, ad 1122, \square sub HA, HB, ita 19800 ad 495, aream \triangle^h HBA. Deinde, ut 44880, \square sub HL, IK & HI, ad 714, \square sub CI, ID, ita 19800 ad 315, aream \triangle^h CID. Rursus, ut 42900, \square sub HL, IK & LK, ad 858, \square sub DK, KE, ita 19800 ad 396, aream \triangle^h DKE. Et denique ut 42900, \square sub HL, IK & LK, ad 754, \square sub GL, LE, ita 19800 ad 348, aream \triangle^h GFL. Unde additis 495, 315, 396, & 348, si summa 1554 subducatur ex 19800, relinquetur 18246, area heptagoni ABCDEFG, quaesita.

XI.

Latifundium ABCDE dividere bifariam rectâ CH, prodeunte ex angulo C; productâ CD ad F, ductâque BG parallelâ CF: datis autem AG 11, GB 18, GF 21, FD 10, DC 22, & FC 16 decempedarum.



Constructio.

Ex 1248, summâ rectangulorum AGB ex BG, CF & GF, subtrahatur 160, \square DFE, ac reliqui 1088 semissis 544 dividatur per CF 32, orietur HF 17 decempedarum.

G 3.

De-

Demonstratio.

Per prop. præced. areæ ABG, GBCF, FDE, ut & area HCF inter se sunt, ut \square^{a} sub AG, GB, sub BG, CF & GF, sub DF, FE, & sub HF, FC. Hinc si CH dividat aream ABCDE bifariam, erunt bina rectangula sub HF, FC & sub DF, FE dimidium trium prædictorum sub AG, GB, sub BG, CF & GF, & sub DF, FE, hoc est, æqualia erunt semissi \square^{li} sub AG, GB, semissi \square^{li} sub BG, CF & GF, & semissi \square^{li} sub DF, FE. A quibus si utrinque auferatur \square sub DF, FE, erit reliquum \square sub HF, FC æquale semissi rectangulorum sub AG, GB, & sub BG, CF & GF, dempto ex eisdem dimidio \square^{lo} sub DF, FE. E quibus patet, additis \square^{lis} sub AG, GB, & sub BG, FC & GF, si ex summa auferatur \square sub DF, FE, semissem reliqui fore \square sub HF, FC. Id quod divisum per CF, unum latus, dat alterum HF. Quod quærebatur.

S C H O L I U M.

Porro si queratur area ABCDE, mensuranda erit aliqua perpendicularium ex B, C, vel D in AE demissarum, ut ex: gr: DI. Quæ & per calculum obtineri potest juxta prop. 6 hujus, exploratâ primum longitudine DE. Quare, si, verb. gr., DI sit 9 perticarum, fiat ut FDI 10, ad DI 9, ita 1408, summa 3^{um} \square^{lorum} sub AG, GB sub BG, CF & GF, & sub DF, FE, ad 4^{um} 12672, cujus dimidium 6336, dabit aream ABCDE.

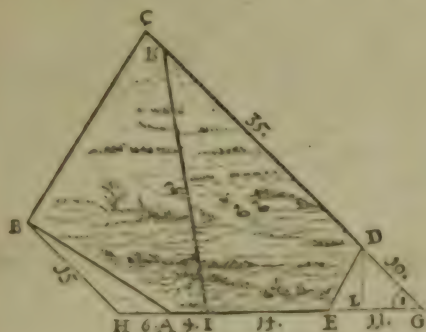
XII.

Area ABCDE mensuranti in via, inclusa trapezio HB CG, cujus latera HB & GC sunt parallela, dividenda est bifariam, rectâ IK, prodeunte ex dato puncto I in latere AE. Jam quæritur, si BH sit 15, HA 6, AI 4, IE 14, EG 11, GD 10, & DC 35 pertic. seu decempedarum, quanta sit, futura CK?

Con-

Constructio.

Subducto 90, \square^{lo} BHA, ex 2210, summâ \square^{lorum} EGD, & sub BH, CG & HG, reliqui 2120 semissis 1060 si dividatur per 1G 25,



oriatur GK 42 $\frac{2}{5}$, seu 424 $\frac{2}{5}$. Quæ ex tota GC 45 $\frac{2}{5}$ ablata, relinquit CD 26 $\frac{2}{5}$. Cujus demonstratio fit ad modum prop^{ns} proximè præcedentis.

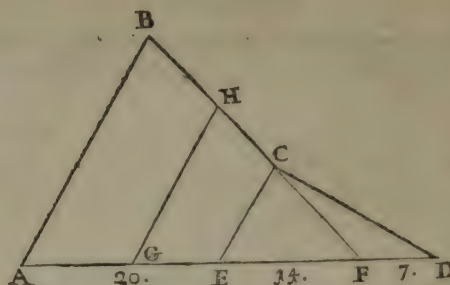
SCHOLIUM.

Porro ad inveniendam aream ABCDE, metienda erit una perpendicularium ex B vel D, ut, ex: gr: DL, quæ & per calculum obtineri potest, ut in 6^{ta} propositione est ostensum, exploratâ prius longitudine ED. Hinc, si DL sit ex: gr: 6 perticarum: sicut ut GD 10 ad DL 6, ita 1900, differentia, quâ \square^{lo} sub BH, CG & HG excedit binâ \square^{lo} BHA, EGD, ad 4^{um} 1140. Cujus semissis 570, erit area ABCDE.

XIII.

Latifundium quadrangulum ABCD, cujus latus BC est productum ad F, in eoque ducta CE parallela ipsi AB, dividendum est bifariam rectâ GH ipsi AB parallelâ: Quæritur punctum G, ubi illa incidet in rectam AD, si AE sit 20, EF 14, & FD 7 perticarum?

Cen.

*Constructio.*

Ex 1156, $\square AF$, subducto 98, $\square EFD$: erit 23, radix ex 529, semisse reliqui, longitudo GF.

Demonstratio.

Per 19 prop: 6^{ta} lib: Elem. Euclidis $\triangle ABF$ est ad $\triangle ECF$, ut
^{a p 1 Sexti} $\square AF$ ad $\square EF$. Est autem ^a $\triangle ECF$ ad $\triangle FCD$, ut EF ad FD , hoc
^{Elem. Eucl.} est, assumptâ communi altitudine EF , ut \square ex EF ad $\square EFD$. Un-
^{b p 22 Quin-} de & ^b $\triangle ABF$ ad $\triangle FCD$ erit, ut \square ex AF ad $\square EFD$. Porro ^c \triangle
^{Elem.} ABF est quoque ad $\triangle GHF$, ut \square ex AF ad \square ex GF . Quare \triangle
^{c p 19 Sexti} ABF , $\triangle GHF$, & $\triangle FCD$ inter se erunt, ut \square ex AF , GF , & $\square EFD$
^{Elem. Eucl.} inter se. Est autem per constructionē \square ex GF dimidium differentiæ,
 quâ \square ex AF excedit $\square EFD$. Unde & $\triangle GHF$ dimidium erit dif-
 ferentiæ, quâ $\triangle ABF$ excedit $\triangle FCD$. Quare si illuc semel & hic bis
 addatur $\triangle FCD$, erunt $\triangle GHF$ & $\triangle FCD$ simul sumpta, hoc est, area
 $GHCD$, dimidium \triangle orum ABF , & $\triangle FCD$ simul sumptorum, hoc
 est, dimidium quadranguli $ABCD$; adeoque recta GH dividens
 $ABCD$ bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex ostensis patet, $\triangle ABF$ esse ad $\triangle FCD$, ut $\square AF$ ad $\square EFD$.

XIV.

Fundus quadrangulus $ABCD$, in quo CE parallela ducta
 est

$\triangle DCK$, reliquum prius $GHCD$ dimidium esse reliqui posterioris $ABCD$: ac proinde lineam GH secare quadrangulum $ABCD$ bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex demonstratis patet: $\triangle ABK$ esse ad $\triangle DCK$, ut $\square AB$ ad $\square ECF$.

SCHOLIUM.

Porro, ut inveniatur, ubinam GH cadat in AD , exploranda prius erit ED , *ep 4 Sexti quasi, verb: gr: sit 6 pert.; erit e propter similitudinem \triangle lorum EFD , IBH , Elem. Eucl. ut $FE 2$ ad $ED 6$, sic $BI 3$ ad IH vel $AG 9$. Ostendens perticas, quibus secans GH distare intelligitur à puncto A versus D in recta AD .*

Denique, AB parallelâ existente ipsi CD , hoc est, CD eâdem existente quæ CE , quia tum $\square ECF$ idem est ac $\square E C$, ad dividendum trapezium $ABCE$ bifariam, addemus \square^{ra} ex AB & EC : erit enim, ut ante, $\sqrt[4]{}$ ex semisse summa longitudo secantis GH . Vt si AB fuerit 31, & EC 17 pert., inveniatur GH 25 perticarum.

Ceterum ut constet, ubi hac incidat in AE , exploratâ prius AE , quæ sit, verb: gr: 21 pert.; subtrahemus GH , hoc est, AI 25, ex AB 31, & restabit IB 6; nec non EC , hoc est, AL 17, ex AB 31, & restabit LB 14. Tum fiat propter \triangle^{la} similia BLC & BIH , ut BL 14 ad LC , hoc est, AE 21, sic BI 6 ad IH vel AG 9. Eodem modo si GH dividat $ABCE$, ut ante, erit \square ex GK semissis \square^{lorum} ex AK & EK .

XV.

Agrum quadrangulum $ABCD$, in quo BE , CF perpendiculares sunt ipsi AD , & BC producta ad G , dividere bifariam rectâ HI ad AD perpendiculari, & invenire in quod punctum ipsius AD incidat, si AE sit 13, EF 9, FG 5, & GD 8 perticarum.

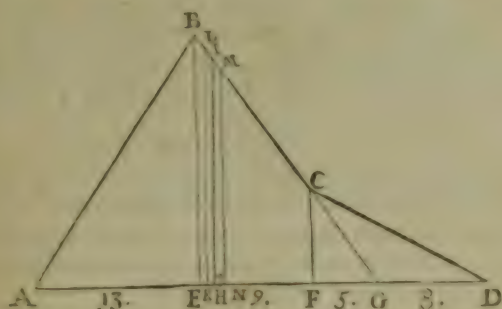
Constructio.

Subducto 40, $\square FGD$, ex 378, $\square AGE$: erit 13, $\sqrt[4]{}$ ex 169, semisse reliqui, longitudo HG .

De-

Demonstratio.

Per 1^{am} prop. 6 lib. Elem. Eucl. $\triangle ABG$ est ad $\triangle EBG$, ut AG ad EG , hoc est, assumptâ communi altitudine EG , ut $\square AGE$ ad $\square EG$. Est autem $\triangle EBG$ ad $\triangle HIG$, ut $\square EG$ ad $\square HG$. Quare ap 19 Sext
Elem. Eucl



$\triangle ABG$ ad $\triangle HIG$ erit, ut $\square AGE$ ad $\square HG$. Sed ut $\triangle HIG$ est ad $\triangle GCD$, ita est, per coroll. 13^{ae} prop^{is} hujus, $\square HG$ ad $\square FGD$. Unde constat $\triangle ABG$, $\triangle HIG$, & $\triangle GCD$ inter se esse, sicut $\square AGE$, $\square HG$, & $\square FGD$ inter se sunt. Jam verò per constructionem $\square HG$ est semissis differentia, quâ $\square AGE$ superat $\square FGD$. Quare & $\triangle HIG$ semissis erit differentia, quâ $\triangle ABG$ superat $\triangle GCD$. Hinc si illic semel & hic bis addatur $\triangle BCD$, erunt bina $\triangle HIG$, $\triangle GCD$, hoc est, area $HICD$, semissis binorum $\triangle ABG$, $\triangle GCD$, hoc est, semissis quadranguli $ABCD$: ac proinde linea HI secans $ABCD$ bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex demonstratis patet: $\triangle ABG$ esse ad $\triangle HIG$, ut $\square AGE$ ad $\square HG$; itemque $\triangle ABG$ ad $\triangle GCD$, ut $\square AGE$ ad $\square FGD$, ap 22 Quinti
Elem.
Eucl.

SCHOLIUM.

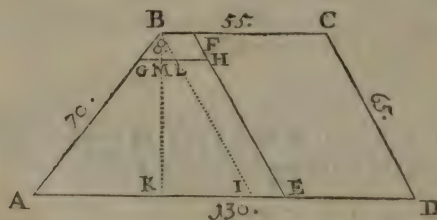
Quoniam in his regionibus fossis communiter agri distingui solent, hinc si ad distinguendas praditas aequales partes, fossa communis sodienda sit, puta, KL MS data latitudinis, verb: gr: 1 pertica seu decempeda; ita ut abscissa partes

H 2

partes $ABLK$, & $NMCD$ sint aequales: Sciendum est, quod, subductis hisce partibus aequalibus ex aequalibus $ABIH$ & $HICD$, reliqua partes $KLIH$ & $HIMN$ quoque sint aequales, ideirco etiam ut in Coroll. preced. prop. $\square HG$ dimidium sit futurum \square totum KG & NG . Quare, si ad inveniendas KH & HN , KN in O bisariam secetur, ac inde quoque \square^{1a} KO & OG simul sint dimidium \square totum KG & NG : constat bina \square^{1a} KO & OG aequalia esse \square^{1o} HG , adeoque valere 169. Est autem KI , & KO $\frac{1}{2}$, adeoque $\square KO$ $\frac{1}{4}$. Hoc ergo si auferatur ex 169, relinquetur $\square OG$ $168\frac{3}{4}$, hoc est, OG $168\frac{3}{4}$. paulo plus quam 1299 $\textcircled{2}$. Cui si addatur KO $\frac{1}{2}$ seu 5 $\textcircled{1}$, fit KG $1349\frac{1}{2}$. Ex hac subducta HG $13\textcircled{2}$, relinquitur KH , paulo plus quam 49 $\textcircled{2}$: itemque ex OG $1299\textcircled{2}$ subducta ON $5\textcircled{2}$, remanet NG $1294\textcircled{2}$. Hac autem ex HG $13\textcircled{2}$, relinquetur paulo minus quam 51 $\textcircled{2}$, pro HN . Ex quibus liquet, quod, cum differentia ne unum quidem pollicem conficiat, si linea KL , NM ducuntur ex veris suis locis vel ex aequali utrinque latitudine a recta HI , in praxi ideirco Geodatica sit usitatum, inventa recta HI , rectas KL , NM ad utramque ejus partem aequaliter sumere, siquidem tam exigua differentia nullius ibi considerationis est.

XVI.

Trapezium $ABCD$, cujus latera BC & AD sunt parallela, dividere, ita ut, dempto communi itinere $GBFH$ latitudinis BM 8 pedum, parallelogrammum $EFCD$ sit æquale trapezio $AGHE$; & invenire AE vel ED , distantiam secantis FE ab angulo A vel D , si AB sit 70, BC 55, CD 65, & AD 130 pedum.



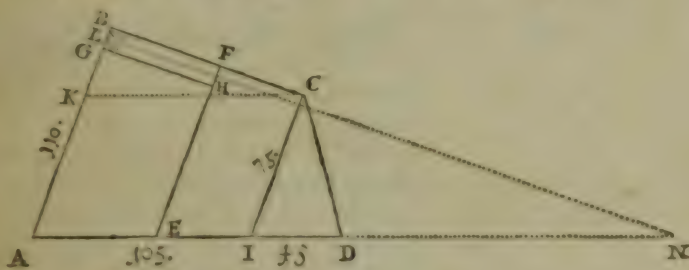
Ducta BI parallelâ CD , quæatur ut in 8^a prop. hujus latitudo BK 56. Tum fiat, ut BK 56 ad AI 175, ita BM 8 ad GL $10\frac{2}{5}$. Quæ addita summæ ipsarum BC, AD , 185, dat $195\frac{2}{5}$, summam ipsarum GH, FC , & AD . Hinc, cum partes $AGHE$ & $EFCD$ ponantur æquales, ac proinde BK 56, latitudo partis $EFCD$, sit ad MK 48, latitudinem partis $AGHE$, sicut summa ipsarum GH, AE ad

ad summam ipsarum FC, ED: patet, si fiat ut 104, summa ipsarum BK, MK, ad MK 48, ita 195 $\frac{5}{7}$ ad 90 $\frac{3}{21}$, summam ipsarum FC, ED. Unde FC vel ED erit 45 $\frac{11}{21}$ pedum, adeoque AE 84 $\frac{76}{21}$ pedum. Quod erat inveniendum.

XVII.

Trapezium ABCD, in quo CI ducta est parallela lateri AB, dividere; ita ut, dempto communi itinere seu parallelogrammo GBFH, cujus latus GB sit 10 pedum, partes AGHE & EFC D sint æquales, & invenire punctum E in recta AD, in quod incidit recta secans EF ipsi AB parallela, si AB sit 110, AI 105, IC 75, & ID 45 pedum.

Ad quod inveniendum operatio instituenda est, ut sequitur.



Ex A B. 110 subtr. IC vel AK. 75 rel KB. 35		subtr. { AB. 110 LB. 5 AL. 105 AN. 315 per AL. 105		Add. { AB. 110 IC. 75 summa 185 per AL. 105 925 185 AECL. 19425 add. ICD. 3375 summa ABCD. 22800 semissis ALME. 11400		Mult. IC. 75 per ID. 45 375 300 ICD. 3375	
Mult. KC. 105 per KB. 35 525 315 KBC. 3675 vel KB. 35		KC. 105 105 525 105 KC. 1105 KC. 105		ALN. 33075 ALME. 11400 EMN. 21675 H 3		Unde	

Unde extractâ radice, invenietur EN 255. Quæ subducta ex AN 315, relinquit AE 60. Ostendens quot pedes secans EF cadit à puncto A versus punctum D, super latere AD.

XVIII.

122 prop. 7
libri Pappi
Alexandri-
ni.

Si ex angulo B cujuscunque trianguli ABC ad punctum medium D lateris oppositi AC recta linea ducatur BD, erunt quadrata laterum AB, BC circa angulum B dupla quadratorum, quorum unum super ducta BD, & alterum super AD vel DC semisse oppositi lateris AC describitur.

Demonstratio.

Demissâ ex B super AC vel productâ AE perpendiculari BE, erunt \square^a ex AB, BC æqualia \square^{is} ex AE, EC unâ cum \square^{to} ex EB, bis sumpto. Sunt autem \square^a ex AE, EC dupla \square^{orum} ex AD, DE. Dupla igitur sunt \square^a ex AB, BC \square^{orum} ex AD, DE unâ cum \square^{to} ex EB. Hinc cum \square^a ex DE & EB æqualia sint \square^{to} ex DB, ac proinde eorum duplum æquale duplo \square^{to} ex DB: patet, \square^a ex AB, BC quadratorum ex AD, DB esse dupla. Quod erat propositum.

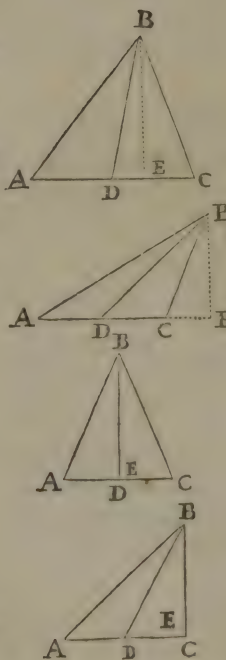
Idem intellige, si latera AB, BC sint æqualia, & perpendicularis BE cadat in punctum D: quandoquidem \square^a ex AD, DC tum æqualia sunt, & eadem, ut dictum est, unâ cum \square^{to} ex DB bis sumpto æqualia \square^{is} ex AB, BC, adeoque hæc dupla \square^{orum} ex AD, DB.

Simile fit, si perpendicularis BE cadit in punctum A vel C. Quo casu \square^{um} ex AB æquale erit \square^{is} ex AD, DB unâ cum duplo \square^{to} ADC, hoc est, duplo \square^{to} ex DC. Quibus si utrinque addatur commune \square^{um}

a p 4 huius
vel 47 Pri-
mi Elem.
Eucl.

b p 9 aut
10 Secundi
Elem. Eucl.
c p 4 huius,
vel 47 Pri-
mi Elem.
Eucl.

d p 12 Se-
cundi Elem.
Eucl.



\square^{um} ex BC: erunt \square^{a} ex AB, BC æqualia 3^{bus} \square^{is} ex AD, DB, & BC, unâ cum duplo \square^{o} ex DC. Sunt autem \square^{a} ex BC, DC æqua- *ep 4 huius, vel 47 Pri- mi Elem. Eucl.*
lia \square^{o} ex DB. Quocirca \square^{a} ex AB, BC æqualia erunt \square^{is} ex AD, DC, hoc est, duplo \square^{o} ex AD vel DC, unâ cum duplo \square^{o} ex DB. Ut erat propositum. Hinc si ex angulo B, &c. Quod erat demon- strandum.

S C H O L I U M.

Hinc manifestum est, si tria latera \triangle^{i} ABC cognita fuerint, quo pacto recta BD inveniri possit. Si enim AB, ex.gr., sit 19, BC 17, & AC 20, addatur 361, \square AB, ad 289, \square BC, & summa 650 dimidium 325 erit summa \square^{orum} ex AD & DB. E qua subducto 100, \square AD vel DC, restabit 225, \square BD. Unde BD erit 15.

Eodem modo, si AB, BD, & BC cognita sint, & queratur AC: addantur 361 & 289, \square^{a} AB & BC, & ex 325, semisse summa, subducatur 225, \square BD, & relinquetur 100, \square AD vel DC. Unde AD vel DC erit 10, adeoque AC 20. Qua querebatur.

XIX.

Sit ABC triangulum quodcunque, cujus angulus B recta BD bifariam sit divisus, & ex C, alterutro angulo- rum A vel C descripto, intervallo CD vel AD, circulo DEF, secante rectam BD vel productam in E: dico BD ad BE esse, sicut AD ad DC, vel AB ad BC.

Demonstratio.

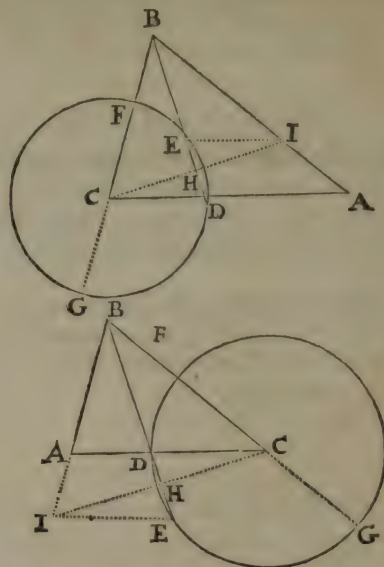
Si AB, BC æqualia sint, patet BD, latus AC bifariam & ad rectos angulos secare; itemque circulum DEF tangi à recta BD in puncto D: adeoque BD hoc casu sumendam esse pro duabus rectis æqua- libus.

At verò AB, BC inæqualibus existentibus, demittatur ex C super BD vel productam perpendicularis CH, quæ producta occurrat ipsi AB vel productæ in I, jungaturque IE.

Quoniam itaque ex hypothesi anguli ad B \triangle^{lorum} CBH & IBH sunt æquales, & anguli ad H ex constructione recti, itemque latus *ap 26 Primi Elem. Eucl.* BH utrique \triangle^{o} commune: ^a erunt & reliqua latera BC, CH reli- quis

b p 15 Pri-
mi Elem.
Eucl.
c p 3 Tertii
Elem. Eucl.

quis BI, IH æqualia. Hinc cum^b anguli DHC & EHI \triangle lorum DCH
& IEH sint æquales, & CH æqualis HI, item quæ DH^c æqualis HE,



d p 4 Pri-
mi Elem.
Eucl.
e p 27 Pri-
mi Elem.
Eucl.
f p 4 Sexti
Elem. Eucl.

g p 16 Quin-
ti Elem.
Eucl.

erit quoque^d DC æqualis IE, & angulus DCH angulo EIH æqua-
lis, ac proinde^e IE ipsi AC parallela, adeoque \triangle BEI simile \triangle BDA.
Unde erit^f ut BE ad EI, hoc est, CD, ita BD ad DA: nec non
BE ad BI, hoc est, CB, ita BD ad BA, hoc est, permutando^g BE
ad BD, sicut CD ad DA, vel ut CB ad BA. Quod erat demon-
strandum.

SCHOLIUM.

Hinc patet, cognitis CB, BD, & CD, facile inveniri BA & AD.

Si enim, verb, gr., CB sit 42, BD 45, & CD 39: Addatur CD vel
CG 39 ad CB 42, & fit GB 81; Deinde subducta CD vel CF 39 ex CB 42,
reliqua FB 3 multiplicetur per GB 81, fietq; 243, \square GBF vel DBE.
Quod divisum per DB 45 dat BE $5\frac{2}{3}$. Hinc fiat ut BE $5\frac{2}{3}$ ad BD 45, ita
CD 39 ad DA 325, & CB 42 ad BA 350.

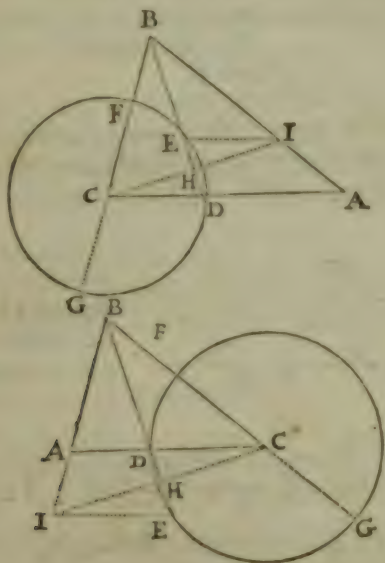
No-

NOTA, eodem modo hic procedi, ac si per tria latera $\triangle CBD$, ut in 6^a hujus, queratur BE, qua summa est vel differentia segmentorum basis BH, HD; ac tum fieret, ut BE $5\frac{2}{3}$ ad EI vel CD 39, ita BD 45 ad DA 325; ac rursum ut BE $5\frac{2}{3}$ ad BI vel BC 42, ita BD 45 ad BA 350.

XX.

Si ex angulo B trianguli cujuscunque ABC ad latus oppositum AC ducatur recta linea BD, angulum B bifariam secans: erit rectangulum sub lateribus AB, BC, dictum angulum B comprehendentibus, æquale rectangulo sub segmentis AD, DC oppositi lateris AC unâ cum quadrato secantis BD.

Demonstratio.



Per præced. prop. EB est ad BD, sicut CD ad DA, vel CB ad BA.
Sed ut EB ad BD, ita quoque est ^a assumptâ communi altitudine ^{apud Sexti} BD, ^{Elem. Eucl.}

I

BD, \square EBD, hoc est, \square GBF ad \square BD. Similiter etiam CD est ad DA, fumendo CD communem altitudinem, ut \square CD ad \square CDA. Quocirca erit ut \square GBF ad \square BD, ita \square CD ad \square CDA: adeoque per 12 prop. 5^{ti} Elem. Eucl. ut \square GBF una cum \square CD vel \square E, hoc est ^b, \square CB, ad \square BD una cum \square CDA, ita \square CD ad \square CDA, hoc est (ut dictum fuit) ut CD ad DA, vel CB ad B.A. Sed ut CB ad B.A, ita quoque est ^c, assumpta communi altitudine CB, \square CB ad \square CBA. Unde erit, ut \square CB ad \square BD una cum \square CDA, ita idem \square CB ad \square CBA. Aequale igitur est ^d \square BD una cum \square CDA ipsi \square CBA. Quod erat demonstrandum.

h p 6 Secun-
di Elem.
Eucl.

c p 1 Sexti
Elem. Eucl.

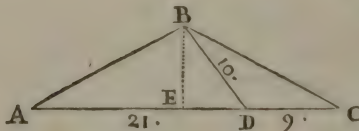
d p 9 Quinti
Elem. Eucl.

S C H O L I U M.

Hinc liquet, cognitis tribus \triangle^{li} ABC lateribus, quâ ratione inveniri possit longitudo rectæ BD. Etenim si AB sit 45; BC 80, & AC 100; & AC 100 dividatur in ratione AB ad BC seu 9 ad 16: fiet AD 36, & DC 64, adeoque \square ADC 2304. Quod subductum ex 3600, \square ABC, relinquit 1296, \square BD. Quare BD erit 36.

Non ineptè hic subjungi potest, si duo latera AB, BC trianguli ABC equalia fuerint, & ex angulo ab iisdem contento B ad basin AC utcumque ducatur recta linea BD: \square^{lum} ABC, sub equalibus lateribus AB, BC comprehensum aequale esse \square^{lo} ADC, sub segmentis basii AC, una cum \square^{to} ductæ BD.

c p 5 Secun-
di Elem.
Eucl.



Etenim ductâ BE perpendiculari ad AC, secabit ipsa angulum ABC, ut & basin AC bifariam: eritque \square ADC una cum \square ED aequale \square AE vel EC, hoc est, \square AEC. Est autem \square AEC

una cum \square EB, ut ostensum est, aequale \square ABC. Quare \square ADC una cum \square^{tis} ex ED, EB, hoc est, una cum \square BD aequale est \square ABC. Quod erat propositum.

Vnde liquet, si AD, DB, & DC cognita fuerint, sit $\frac{q}{2}$ AD 21, DB 10, & DC 9, quo pacto facile sit invenire AB vel BC: nimirum, addendo tantum, 189, \square ADC, ad 100, \square BD, & ex summa 289, \square ABC, extrahendo $\sqrt{\quad}$, fiet AB vel BC 17. Item si cognoscantur AD, DC, ut & AB vel BC, quo pacto inveniri possit BD: videlicet, subtrahendo tantum 189, \square ADC,

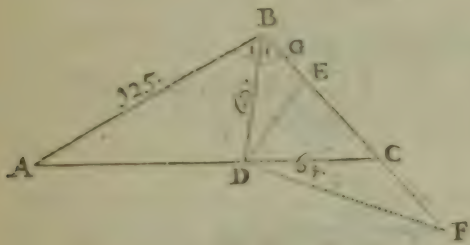
ex

ex 289, $\square ABC$, & ex reliquo 100, seu $\square BD$, extrahendo radicem, habebiturq, BD 10.

XXI.

Isdem positis, si fiat ut AB ad BD , ita BD ad BE , jungaturque DE : dico rectangulum BCE æquale esse quadrato ex DC .

Demonstratio.



Quoniam enim, per præcedentem propositionem, $\square ABC$ æquale est $\square ADC$ unâ cum $\square BD$, hoc est, $\square^{lo} ABE$: patet, $\square^{lum} ABC$,

dempto $\square^{lo} ABE$, hoc est, \square^{lum} sub AB, EC , æquale esse $\square^{lo} ADC$. Unde erit a ut AB ad DC , ita AD ad EC . Sed ut AB ad DC , ita b est \square sub AB, DC ad $\square DC$: itemque ut AD ad EC , ita \square sub AD, BC ad $\square BCE$. Quare c erit ut \square sub AB, DC ad $\square DC$, ita \square sub AD, BC ad $\square BCE$. Est autem \square sub AB, DC æquale \square^{lo} sub AD, BC : (siquidem est AB ad BC , ut AD ad DC). Æquale igitur quoque erit d $\square DC$ ipsi $\square BCE$. Quod erat demonstrandum.

a p 16 Sexti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 11 Quinti Elem. Eucl.
d p 14 Quinti Elem. Eucl.

1 Corollarium.

Hinc sequitur, si BF sumatur æqualis BA , jungaturque DF : $\triangle^{lum} FBD$ simile esse $\triangle^{lo} DBE$; ut & $\triangle^{lum} DEC$ simile $\triangle^{lo} DBC$. Siquidem FBD simile est ipsi DBE , propter communem angulum ad B , & quod FB , hoc est, AB , sit ad BD , ut DB ad BE . At vero DEC simile ipsi DBC , quoniam, præter communem angulum ad C , BC est ad CD , e ut DC ad CE : quippe ostensum est, $\square BCE$ esse æquale $\square DC$.

e p 6 Sexti Elem. Eucl.
f p 17 Sexti Elem. Eucl.

2 Corollarium.

Similiter inferri potest; si circa $\triangle DEF$ circulus describatur, eundem $\&$ tangi à recta BD in D ; ut $\&$ si alius describatur circa DBE , ipsum tangi ab AC in D .
 pp 37 Ter-
 iii Elem.
 Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc si $AB, BD, \& DC$ cognita fuerint, $\& AB$ sit 125, BD 60, $\& DC$ 64: facile ex his inveniatur BC , ut ex operatione sequenti constat.

Divid. $\square BD$, hoc est, $\square FBE$ 366661 $\left\{ \begin{array}{l} 288 \text{ ① } BE \\ 125 \left\{ \begin{array}{l} 144 \text{ ① semissis, } BG \text{ vel } GE \\ 144 \text{ ①} \\ 576 \\ 576 \\ 144 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Add. $\left\{ \begin{array}{l} 20736 \text{ ② } \square GE \\ 4096 \quad \square DC \text{ seu } \square BCE \end{array} \right.$

summa $4310336 \text{ ③ } \square GC$, per 6. 2^{da} Elem. Eucl.

radix $6156 \text{ ① } GC$

add. $1144 \text{ ① } BG$

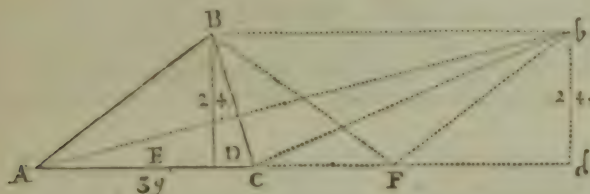
summa $80AB$.

XXII.

Cognitis trianguli ABC basi AC 39, $\&$ perpendiculari BD 24, nec non ratione lateris AB ad latus BC 8 ad 5, invenire $AB \& BC$.

Divisâ AC 39 in E in ratione 8 ad 5, fiet AE 24, $\& EC$ 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipsarum AE, EC , ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde, cum re \square anguli $\triangle DBF$ duo latera DB, BF cogni-

cognita sint, faciantque 24 & 40: erit tertium latus DF per 4^{am} proportionem hujus 32. Quæ subducta ex tota AF 64, ut & eidem addita, dat AD 32, & A d 96, ad quorum \square^a ut 1024 & 9216 si addatur



576, \square DB vel db : habebuntur 1600 & 9792, \square^a ex AB & A b, ac proinde 40 & $\sqrt{9792}$, pro AB & A b. Unde B Cerit 25, & b C $\sqrt{3825}$.

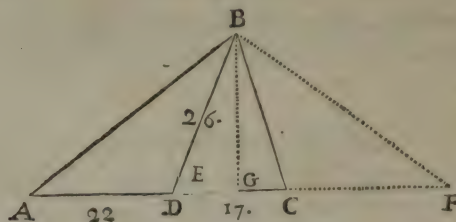
Cujus demonstratio patet ex 2^{do} problemate propositionum libri 2^{di} tractatus nostri de *Locus Planis Apollonii*: ubi simul innotescit, cognitio, basi & perpendiculari \triangle^{li} , nec non ratione laterum reliquorum, duplicem hanc admittere solutionem: nimirum, AB fore vel 40 vel $\sqrt{9792}$, & BC vel 25 vel $\sqrt{3825}$, hoc est, constituunt vel acutangulum vel obtusangulum triangulum, sine aliqua datorum immutatione.

XXIII.

In triangulo ABC ductâ utcumque rectâ BD, dantur BD 26, AD 22, & DC 17, & quærentur AB & BC, si inter se sint, ut 8 ad 5?

Divisâ AC, ut ante, in E, ita ut AE ad EC sit, ut 8 ad 5: erit AE 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipsarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde subductâ AD 22 ex AE 24, restabit DE 2, cui additâ EF 40, habebitur DF 42. Cognita itaque sunt 3^a latera \triangle^{li} DBF. Hinc si per ipsa, juxta 6^{am} hujus, quærat DG, ut & perpendicularis BG: inveniatur DG 10, & BG 24. Denique

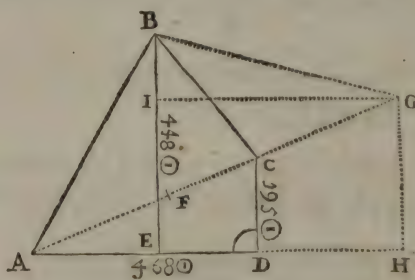
nique additis AD 22 & DG 10, si \square^{to} summa AG 32, quod est



1024, addatur 576, \square BG, fit 1600, \square AB, adeoque AB 40. Unde BC erit 25.

XXIV.

Aliquis habet agrum ABCD, cujus angulus D est rectus, & AD est 468^①, DC 195^①, itemque recta BE ex angulo B perpendicularis ipsi AD est 448^①. Quæritur, si AB sit ad BC, ut 8 ad 5, quanta sit futura area ABCD; ut & quantitas laterum AB, BC?



Inventâ AC 507^①, per 4^{am} hujus, secetur ipsa in F, ut ante, ita ut AF ad FC sit, ut 8 ad 5: fietque AF 312^①, & FC 195^①. Tum fiat, ut 117^①, differentia ipsarum AF, FC, ad AF 312^①, ita FC 195^① ad FG vel GB 52^②. Cui additâ AF 312^①, habebitur AG 832^①. Deinde fiat

propter similitudinem triangulorum ACD & AGH, ut AC 507^① ad AG 832^①, ita AD 468^① ad AH 768^①, & CD 195^① ad GH 32^②. Porro subductâ GH seu IE 32^② ex BE 448^①, restabit IB 128^①, cujus \square^{um} 16384^② subductum ex 2704^②, \square BG, relinquet 254016^②, \square IG: unde IG vel EH erit 504^①, quâ subductâ ex AH 768^①,

768①, restabit AE 264①. Cujus \square^{cum} 69696② additum ad 200704②, \square EB, dat 2704②, \square AB; adeoque AB 52②. Unde BC erit 325②. Denique ad inveniendam aream ABCD, multiplicetur BE 448① per 132①, semissem ipsius AE, fietque 59136③, area \triangle^{li} ABE. Similiter 643①, summa ipsarum BE, CD, per 102①, semissem ipsius ED, multiplicata, dabit 65586③, aream trapezii EBCD. quæ addita ad aream \triangle^{li} præcedentem 59136③ dabit aream totius trapezii ABCD 1247, 22③, hoc est, 1247 \square^{cum} decempedarum, & 22 \square^{totum} pedum. Quod erat faciendum.

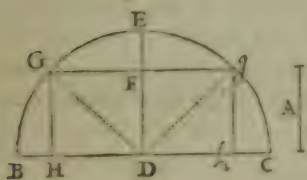
XXV.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & aggregato extremarum BC: invenire extremas,

Vel:

Datam rectam BC ita secare in H, ut rectangulum sub segmentis BH, HC sit æquale quadrato rectæ datæ A. Quæ semisse rectæ secandæ BC non sit major.

Constructio.



Descripto super BC semicirculo BEC, erigatur ex puncto medio D eidem perpendicularis DE, in quâ sumptâ DF æquali A, ducatur per F ipsi BC parallela GFg, secans hinc inde circumferentiam in punctis G, g. Ex quibus si demittantur GH, gh, per-

pendiculares in BC, hoc est, parallelæ ipsi DE: Dico BH & HC extremas esse, vel etiam \square^{cum} sub BH, HC contentum æquale esse \square^{to} ex HG vel A. Cujus demonstratio patet ex corollario 8^{ve} prop^{is} lib. 6 Elem. Euclidis, quod docet BH, HG, & HC esse 3 proportionales.

Similiter liquet rectam A non majorem dari debere semisse datæ BC, quandoquidem \square BD vel DC maximum est \square , quod sub segmentis rectæ BC comprehendi potest.

Item, Problema admittere duplicem solutionem, hoc est, rectam BC

BC simul in duobus punctis H & h secari, ita ut linea A sit media proportionalis inter bina ejus segmenta BH, HC vel Bh, hC; vel etiam \square^{um} ex A æquale esse \square^{lo} BHC vel BhC.

S C H O L I V M.

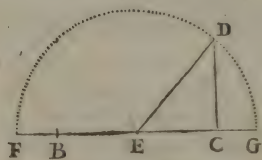
Hinc si A & BC cognita fuerint, sit q, A 12, & BC 26: ad inveniendas BH, HC, auferatur 144, \square HG vel A, ex 169, \square GD vel BD, & ex reliquo 25, seu \square HD, extrahatur radix, erit HD 5. Quæ ex BD 13 subducta relinquit BH 8, & ipsi DC 13 addita dat HC 18. Ita ut BH, HC sint 8 & 18, vel etiam 18 & 8.

Eodem modo cognita areâ \square^{li} BHC 144, & summâ laterum BH, HC, hoc est, BC 26, inveniuntur singula.

XXVI.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & differentiâ extremarum BC: invenire extremas.

Constructio.



Erectâ ex C super BC perpendiculari CD æquali A, ducatur ex E medio ipsius BC ad D recta ED; tum sumptis EF, EG æqualibus ipsi ED: dico FC, CG esse extremas.

Demonstratio.

2^a Coroll.
sua Sexti
Elem. Eucl.

Quoniam enim ^a FC, CD, & CG sunt 3 proportionales, & per constructionem FE est æqualis EG, ut & BE æqualis EC: erit quoque FB æqualis CG, adeoque BC differentia, quâ FC excedit CG, inter quas CD, hoc est, A, media est proportionalis. Quod erat faciendum.

S C H O L I V M.

Hinc si A & BC cognita fuerint, sit q, A 12, & BC 10: facile est invenire FC & CG. Etenim addendo 25, \square EC, ad 144, \square CD, sit 169, \square ED. Cujus radix, puta 13, erit ipsa ED, EF, vel EG. Hinc si ad FE 13 addatur EC

EC 5, erit FC 18; ut verò si ab EG 13 auferatur EC 5, fiet CG 8.

Eodem modo, quoniam $\square FCG$ æquale est \square^{10} ex CD vel A: patet, b p 14 Secun-
quo pacto, cognita areâ \square^{11} FCG 144, & differentiâ laterum FC, CG, di. vel 17
hoc est, EC 10, inveniuntur singula. Sexti Elem.
Eucl.

XXVII.

E serie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & aggregato mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.

Constructio.

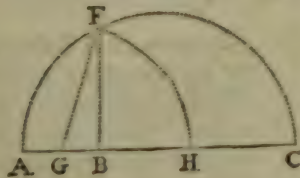
Positis AB, BC in directum, producatur AC ad D, donec CD sit æqualis CB; dividatur quæ AD per 25 prop. hujus in E, ita ut $\square AED$ sit æquale $\square CD$, hoc est, ut CD sit media proportionalis inter AE & ED. Dico CE esse mediam, & ED alteram extremam.

Demonstratio.

Quoniam enim per constructionem AE est ad CD, sicut CD ad ED: erit quoque dividendo ^a AB unâ cum CE ad CD, sicut CE ad ED. Hinc cum sit ut tota AB unâ cum CE ad totam CD, ut ablata CE ad ablatam ED: ^b erit & reliqua AB ad reliquam CE, sicut tota ad totam, seu ablata CE ad ablatam ED. Quare AB, CE, & ED tres sunt proportionales quæsitæ. Quod erat faciendum.

a p 17 Quin-
ti Elem.
Eucl.
b p 19 Quin-
ti Elem.
Eucl.

Aliter.



Positis, ut ante, AB & BC in directum, inveniatur ^c inter ipsas media proportionalis BF, agatur quæ ex G, medio ipsius AB, recta GF. Quâ posita à G ad H, dico BH esse mediam, & HC esse alteram extremam.

c p 13 Sexti
Elem. Eucl.

Quoniam enim ^d $\square AHB$ unâ cum $\square GB$ æquale est $\square GH$, hoc est, GF: erit etiam, auferendo ^e $\square GB$ æquale est $\square GH$, hoc est, GF: erit etiam, auferendo utrin-

d p 6 Secun-
di Elem.
Eucl.

ep 4 huius, utrinque \square GB, reliquum \square AHB æquale reliquo \square ex BFe.
 vel 47 Pri- Est autem \square BFB similiter æquale \square ABC, Quocirca \square AHB
 mi Elem. æquale est \square ABC, ac proinde g AH ad AB, sicut BC ad BH, hoc
 Eucl. f p 17 Sexti est, dividendo & convertendo h AB ad BH, ut BH ad HC.

Elem. Eucl.

g p 16 Sexti

Elem. Eucl.

h p 17 Quin-

ti, & corol. BH, HC, multiplicetur 15 per 4, fit 60, \square ABC vel \square BF.

4^{ta} Quinti tur 4, \square GB, erit summa 64, \square GF: adeo g GF vel GH 8. E qua subdu-

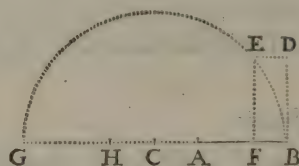
Elem. Eucl. ctâ GB 2, relinquitur BH 6. Vnde HC erit 9.

S C H O L I U M.

Hinc si cognita fuerint AB, BC, & AB sit 4, at BC 15: ut inveniantur
 BH, HC, multiplicetur 15 per 4, fit 60, \square ABC vel \square BF. Cui si adda-
 tur 4, \square GB, erit summa 64, \square GF: adeo g GF vel GH 8. E qua subdu-

Vbi porrò notandum, quo pacto per primum modum data recta AB secari
 possit in F extremâ ac mediâ ratione, aliter quàm ab Euclide est ostensum
 prop^{ne} 1^{ma} lib. 2^{da}, aut 31 prop. 6^{ti} lib. Elem. hoc est, ut \square ABF sit æquale
 \square AF, vel ut AB sit ad AF, sicut AF ad FB.

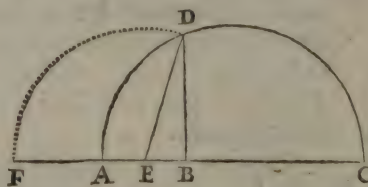
Etenim productâ AB, in eâ q as-
 sumptâ AC æquali semisi ipsius AB,
 describatur centro C intervallo CB
 semicirculus BEG. Deinde erectâ
 ex B super AB perpendiculari BD
 æquali AB, ductâ q ex D ipsi paral-
 lelâ DE, secante circumferentiam
 in E: demittatur ex E super AB
 perpendicularis EF. Cujus demonstratio manifesta est ex demonstratione
 1^{mi} modi sumendo CH æqualem CA.



XXVIII.

E serie trium proportionalium datâ unâ extremarum
 AB, & differentiâ mediæ & alterius extremæ BC: inve-
 nire mediam & extremam.

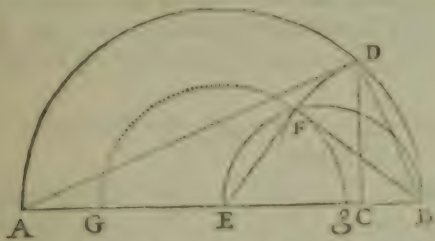
a p 13 Sexti
 Elem. Eucl.



Primum, si AB sit mi-
 nor extremarum: positis
 AB, BC in directum, in-
 veniatur a inter ipsas me-
 dia proportionalis BD, du-
 ctâque ex E, medio ipsius
 AB, rectâ ED, sumatur ei
 æqua-

æqualis EF. Dico BF esse mediam, & FC alteram seu majorem extremam.

Quoniam enim \square BFA unà cum \square EB æquale est \square EF, hoc est, ED: erit quoque (auferendo utrinque \square EB) reliquum \square BFA æquale reliquo \square BD. Est autem \square BD etiam æquale \square ABC. Æquale igitur erit \square BFA ipsi \square ABC. Unde erit ut AB ad FA, sic BF ad BC, hoc est, per compositionem rationis contrariam, AB ad BF, sicut BF ad FC. Quod est primum.



in eo \square collocatâ BF æquali BD, agatur FE. Quæ si utrinque ponatur ab E ad G: Dico AB ad GB esse, sicut GB ad GC, vel etiam AB ad g B, sicut g B ad g C.

Ad quod demonstrandum, jungatur AD. Quoniam itaque \square FB semicirculum ex E, qui per puncta G, F, g transit, tangit in F: erit \square GBg æquale \square FB, vel BD. Est autem \square BD etiam æquale \square ABC (siquidem \square AB est ad BD, sicut BD ad BC). Æqualia igitur sunt \square GBg & \square ABC. Unde erit ut AB ad Bg, sic GB ad BC, hoc est, per conversionem rationis \square AB ad Ag, hoc est, GB, sic GB ad GC: vel etiam p, ex AB & Bg auferendo GB & BC, ut tota AB ad totam Bg, ita reliqua AG, hoc est, Bg, ad reliquam g C. Quod erat secundum.

Hinc si è serie trium prop. &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hinc si AB & BC cognita fuerint, & AB minor extremarum sit 4, at BC 3: ad inveniendas BF & FC, multiplicetur 4 per 3, & sit 12, \square ABC vel \square BD. Cui si addatur 4, \square EB, erit summa 16, \square ED. Hujus radix 4, erit ED vel EF. Cui additâ EB 2, habebitur FB 6. Unde FC erit 9.

At verò si AB, major extremarum, sit 9, & BC 2: ad inveniendas GB

K 2

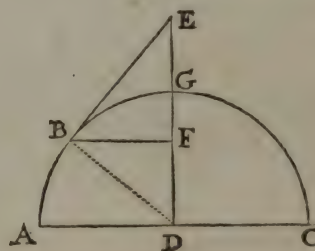
& GC;

& GC; veletiam gB & gC , multiplicetur rursus AB per BC 2, & sit 18, $\square ABC$ vel $\square BD$ seu BF . Quod subductum ex 2025②, \square^{10} ex EB , relinquit 225③, $\square EF$. Cujus $\sqrt{}$, ut 15④, erit ipsa EF , EG , vel Eg . Huic si addatur EB 45①, erit GB 60① seu 6. Vnde GC erit 4. Vel etiam subtrahendo Eg 15① ex EB 45①, restabit gB 30① seu 3: ac proinde gC 1.

Hic porro notandum: CB in 2^{do} casu majorem esse non posse 4^{ta} parte ipsius AB , quandoquidem Problema alias est impossibile, & BD , hoc est, BF , in semicirculo EFB collocari nequit. Existente enim CB quarta parte ipsius AB , erit FB , hoc est, DB aequalis diametro ejus EB : & idcirco punctum F incidet in punctum E ; ita ut EB sit media, & EC altera extrema. Quo casu Problema unius tantum erit solutionis, cum alias, ut pater, duplicem sortiatur.

XXIX.

Si semicirculum $ABGC$ contingat recta BE , conveniens cum DE , quæ ex centro D erecta est perpendicularis super diametrum AC : dico, si ex puncto contactus B agatur BF parallela AC , rectas DF , DG , & DE esse tres proportionales.

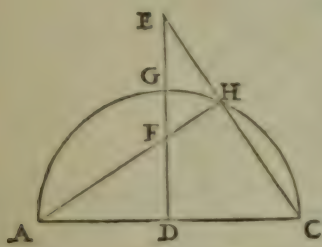


Id quod, ductâ BD , manifestum est, quippe quæ per 18 prop. 3^{ti} lib. Elem. Euclidis ipsi BE est perpendicularis. Unde per Corollarium 8^{væ} prop^{nis} 6^{ti} lib. Elem. Eucl. FD erit ad DB , hoc est, DG , sicut DB seu DG ad DE . Quod erat demonstrandum.

XXX.

XXX.

Si in semicirculo AGHC ex A ad circumferentiam utcumque ducatur recta AH, secans perpendicularem DE in F: dico, si ex C per H recta agatur occurrens ipsi DE in E, rectas DF, DG, & DE esse tres proportionales.

Demonstratio.

Quoniam enim \triangle^{1a} AHC & CDE rectangula sunt, atque angulum ad C communem habent: erunt & reliqui anguli HAC & E^a æquales. *a p 32 Pri- mi Elem. Eucl.*
Eodem modo, quoniam \triangle^{lum} ADF rectangulum est, ejusque angulus DAF æqualis ostensus angulo E rectanguli \triangle^{1a} CDE: erit item tertius tertio æqualis: ac proinde *b p 4 Sexti Elem. Eucl.*

FD ad DA, hoc est, DG, sicut DC, hoc est, DG, ad DE. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex hac & antecedenti propositione manifestum est: si recta AH ducatur per punctum F, in quo recta BF occurrit perpendiculari DE, tangentem BE & productam CHE in idem punctum ipsius DE convenire.

XXXI.

Si in semicirculo AHDB, ex diametri terminis A & B ad verticem D agantur rectæ AD, BD, quarum una BD sursum producat: dico, si ex quolibet puncto inter A & centrum C perpendicularis erigatur super AB, huic productæ occurrens in F, rectas EG, EH, & EF esse 3 proportionales.

K 3

De-

Subtracta FN 3, semisse sc. ipsius FG seu LA, ex FH 4, relinquitur N II vel DO I. Tum diviso 9, \square' ex HO, ND, vel FN, per DO I, erit OM 9. Cui si addatur OD I, eris MD vel AB I 0, ut supra.

XXXII.

Si in circuli segmento ABC à vertice B ad basin productam AC utcumque ducatur recta BD . Dico, si agantur AB , BC , & CE , triangulum BCE simile esse triangulo BDC , nec non triangulum ABD simile triangulo ECD .

Demonstratio.

Cum enim anguli CAB & BCA sint æquales, quorum angulus CA una cum opposito BEC ^a est æqualis duobus rectis, nec non angulus BCA una cum angulo sibi deinceps BCD ^b sit æqualis duobus rectis: patet angulos BEC & BCD in \triangle ^{lis} BCE & BDC æquales esse. Hinc cum angulus CBD usdem \triangle ^{lis} sit communis, erit & tertius BCE ^c æqualis tertio D : adeoque \triangle ^{lum} BCE simile \triangle ^{lo} BDC ^d.

222 *Tertio*

Elem. Eucl.

bp 13 Primis

Elem. Eucl.

cc: Pri-

in Elem.

Encl.

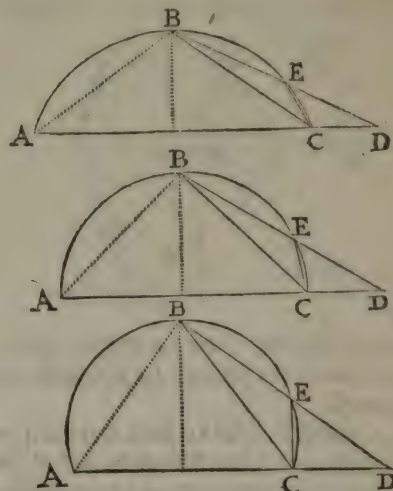
La Serri

$\frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \delta = 1$
 $\frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \delta = 1$

Chas. J. St. A.
v. E. J. M.

Porto, Encl.

Porro, quoniam, ut supra, angulus CAB unà cum angulo BEC est æqualis duobus rectis, nec non angulus CED unà cum eodem angulo BEC duobus rectis æqualis: erit angulus CAB æqualis an-



gulo CED . Quare, cum præterea angulus D posterioribus \triangle is sit communis, erit pariter $\triangle ABD$ simile $\triangle ECD$. Quod utrumque erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex similitudine \triangle orum BCE , BDC patet: EB esse ad BC , ut BC ad BD .

SCHOLIUM.

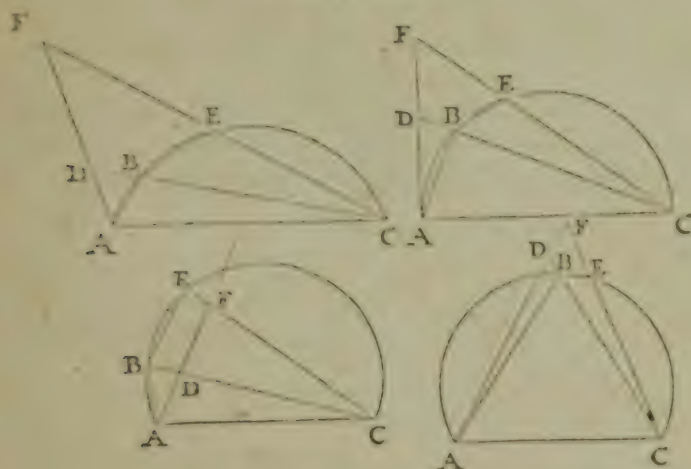
Hinc liquet, cognitis BC & BE , quo pacto inveniri possit ED . Si enim, ex: gr., BC sit 6, & BE 4 fiat ut BE 4 ad BC 6, ita BC 6 ad BD 9. E qua subtracta BE 4, relinquitur ED 5.

XXXIII.

Si in circuli segmento $ABEC$ recta AF cum basi AG constituat angulum FAC , æqualem ei qui in segmento ABC

ABC: Dico, si ex C ad AF utcumque ducantur CD, CF circumferentiam secantes in B & E, junganturque AB, BE, triangulum CAD simile esse triangulo CAB, & triangulum CDE simile triangulo CBE.

Demonstratio.



Quoniam enim angulus DAC est æqualis angulo in segmento ABC (qui quidem omnes^a inter se æquales ap²¹ Tertii Elem. Eucl. CAD & CAB præter communem angulum ad C æquales habeant angulos DAC & ABC:

erit & tertius ADC tertio CAB^b æqualis; adeoque $\triangle CAD$ simile ipsi $\triangle ACB$.

Porro, cum bini anguli CAB, BEC sint^d æquales duobus rectis, nec non bini ADC, CDE^e duobus rectis æquales, quorum quidem

L

an-

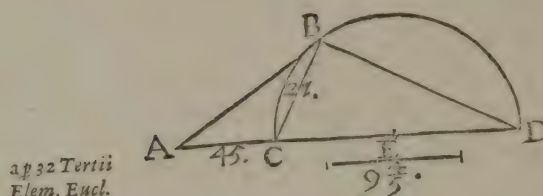
angulus ADC æqualis est ostensus angulo CAB : erit quoque angulus BEC angulo CDF æqualis. Hinc cum, præter hos æquales angulos, angulus DCF sit utrique $\triangle^o CDF$ & CBE communis: erant quoque \triangle^a ipsa inter se similia. Quod utrumque erat demonstrandum.

Idem intellige, si linea AF ad quodvis aliud basis punctum in dicto angulo ducta fuerit.

XXXIV.

Si recta AB semicirculum CBD contingat in B , conveniens cum diametro producta CD in A : dico, junctis CB , BD , triangulum ACB triangulo ABD simile esse.

Demonstratio.



ap 32 Tertii
Elem. Eucl.

bp 32 Pri-
mi Elem.
Eucl.
cp 4 Sexti,
ep 1 defi.
Sexti Elem.

Quoniam enim AB semicirculum contingit in B , & à B ad terminum diametri C ducta sit recta BC eundem secans; erit angulus ad contactum ABC^a æqualis angulo ADB , qui in alterno semicirculi segmento. Hinc cum in $\triangle^is ACB, ABD$ anguli ABC & ADB sint æquales, & angulus ad A utrique \triangle^o communis: erunt etiam reliqui anguli ACB & ABD^b æquales: adeoque $\triangle^a ACB$ simile ipsi $\triangle ABD$. Quod erat demonstrandum.

1 Corollarium.

Ex similitudine $\triangle^orum ACB, ABD$ patet, AC esse ad AB , ut AB , ad AD ; itemque AC ad AB , sicut CB ad BD .

2 Corollarium.

Hinc, cum AC, AB & AD sint 3 proportionales, & d¹ma AC sit ad 3^am AD , sicut \square super 1^{ma} AC ad \square super 2^{da} AB , vel \square sicut \square ex CB ad \square ex BD , constat: AC ad AD esse, sicut \square ex CB ad \square ex BD . Quod & à Pappo est demonstratum prop^{ne} 119 libri 7.

XXXV.

XXXV.

Isdem positis, si ad AC, CB inveniatur tertia propor-
tionalis E: dico quadratum ex CB dimidium esse rectan-
guli contenti sub CD & differentia ipsarum CD & E.

Demonstratio.

Quoniam enim ^a est AC ad AD, sicut □ CB ad □ BD, hoc est, ^{a p 2 Corol.}
□ CD minus □ CB: erit quoque ^b, per compositionem rationis ^{prae. prop. 11.}
contrariam, AC ad AC, AD, sicut □ CB ad □ CD. Sed ut AC ad ^{b Vide Cla-}
AC, AD, ita ^c est □ sub AC & E ad □ sub AC, AD & E. Quare ^{vium ad 18}
erit, ut □ sub AC & E ad □ sub AC, AD & E, ita □ CB ad □ ^{Quinti E-}
CD. Est autem □ sub AC & E aequale □ CB: cum ^d AC sit ad CB, ^{lem. Eucl.}
ut CB ad E. Aequale igitur est ^e □ sub AC, AD & E ipsi □ CD. ^{c p 1 Sexti}
Hinc subducto utrinque ^f □ sub CD & E, erit reliquum ^{Elem. Eucl.} □ ^{d p hypote-}
dupla AC & E, hoc est, duplum □ ^g ex CB, aequale □ ^{Quin-}
minus □ ^h sub CD & E, hoc est, aequale □ ⁱ contento sub CD & ^{Elem.}
differentia ipsarum CD & E. Quod erat demonstrandum. ^{Eucl.}

SCHOLIUM.

Facile hic est ostendere, si cognoscantur AC & CB, quo pacto inveni-
possit diameter CD. Si enim, verb: gr., AC sit 45, & CB 21: Fiat ut AC
45 ad CB 21, ita CB 21 ad E 9³/₄. Deinde cum □ CB sit 441, & ejus du-
plum 882, quæsto eò perducta est, ut, datis rectanguli area 882, & diffe-
rentiâ laterum 9³/₄, per 26 prop. hujus inveniatur ipsa latera, quorum ma-
jus 33 erit diameter CD. Quæ quærebatur.

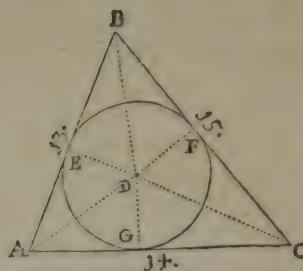
XXXVI.

Cognitis trianguli ABC lateribus AB 13, BC 15, & AC
14: invenire radium DE, DF, vel DG circuli inscripti
EFG.

Quod fiet per sequentem operationem.

L 2

AD.



AB. 13

BC. 15

AC. 14

summa laterum. 42

semiffis 21... 21... 21

subtr. singula latera 13... 15... 14

3^a reliqua 8... 6... 7

6

4²

8

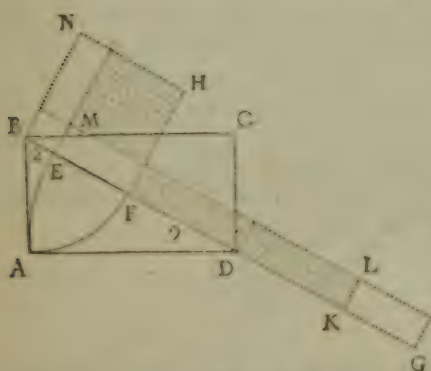
Divid. productum 3^{um} reliquorum. 336 { 16 □ cum radii.per semiffem laterum. 21 { 4 radix, seu radius
DE, DF, vel DG.*Demonstratio.*

Quoniam 336, productum ex tribus reliquis, ductum in 21, semiffem laterum, per vulgarem regulam, tantum producit, quantum 84, area \triangle^{li} ABC multiplicata in se: patet, 21, 84, & 336 esse proportionales. Item cum 21, semiffis laterum, ductus in 4, radium circuli, efficiat 84, aream \triangle^{li} ABC (quippe quæ 3^a continet \triangle^{la} ABD, BCD, & ACD, quæ singula radium habent pro communi altitudine, & latera AB, BC, & AC pro basibus; quorum quidem area

area invenitur ex multiplicatione semissis baseos per altitudinem): constat, 21, primum numerum, esse ad 84, 2^{um}, ut 1 seu unitas ad radium 4; sed ad 336, 3^{ium}, ut 1 ad 16, \square^{um} sc. ex 4. Unde patet, si 336, productum 3^{um} reliquorum, per 21, semissem laterum dividatur, oriri 16, \square^{um} radii 4. Qui erat inveniendus.

XXXVII.

Rectanguli ABCD cognitis duobus excessibus BE, FD, quibus diagonalis BD superat utrumque latus AD, AB: invenire latera & diagonalem.



Sit enim, verbi gratia, BE 2, & FD 9. Jam ad inveniendum AB & AD, sumatur DG æqualis DE, eritque \square^{lo} BI, contentum sub BG & GI seu BE, æquale \square^{lo} ex AB seu BF, hoc est, \square^{lo} BH. Quare, assumpta DK æquali DF, erit gnomon NMF æqualis \square^{lo} BM, unicum du-

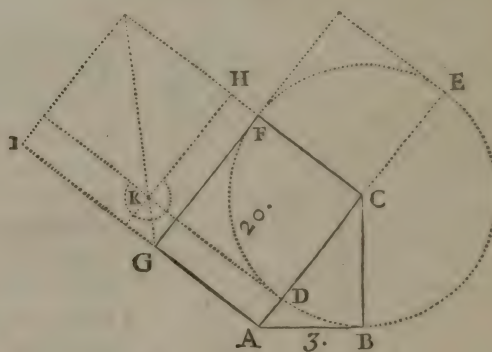
obus æqualibus \square^{lo} MF, KI: & consequenter \square^{lo} MH æquale \square^{lo} FL, quod est 36. Unde EF erit 6, ac proinde AB 8, AD 15, & diagonalis seu diagonalis BD 17. Quæ erant inveniendæ.

Eodem modo licet ex data differentia, inter diagonalem & latus quadrati, invenire latus & diagonalem. Si enim hæc differentia sit 2, oportet tantum 4, duplum ipsius 2, multiplicare per 2, & ex eo quod sit extrahere radicem quadratam, quæ erit $\sqrt{8}$. Cui si addatur 2, habebitur latus $\sqrt{8} + 2$. Huic autem si rursus addatur 2, erit diagonalis $4 + \sqrt{8}$.

XXXVIII.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno latere AB, BC circa rectum angulum B, ut & productio reliquorum duorum AC, CB: invenire AC, CB, reliqua latera.

Esto AB 3, & productum ipsorum AC, CB 20. Igitur ut inveniatur AC, CB, describatur centro C intervallo CB circulus BDFE, secans AC in D, eamque productam in E. Tum descripto super CE quadrato FE, erit completum \square^{lum} CG 20. Deinde descripto super



GF \square^{to} FI, erit AI æqualis AE, adeoque \square^{lum} ID æquale \square^{lo} sub EA, AD, hoc est, \square^{to} ex AB 9^a. Est autem^b \square^{lum} IF ad \square^{lum} FA, ut IG ad GA, vel AC ad CE. Sed ut AC ad CE, ita quoque est \square^{lum} FA ad \square^{lum} FE. Proportionalia igitur sunt 3^a \square^{lum} IF, FA, & FE. Hinc cum gnomon IKF, qui æqualis est \square^{lo} ID 9, sit excessus, quo \square^{lum} IF superat \square^{lum} FE, quæstio eò reducta erit, ut, Datis medio 20, & differentiâ extremorum 9, 3^{um} proportionalium numerorum, per 26 Prop. hujus quærantur extremi. Quorum major 25, est \square^{lum} IF, & minor 16, \square^{lum} FE. E quibus si extrahantur radices, erit AC 5, & CB 4. Quæ erant inveniendæ.

^a 36 Terti
Elem. Eucl.
^b p 1 Sexti
Elem. Eucl.

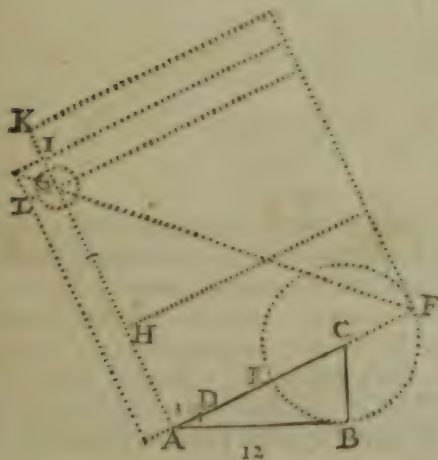
XXXIX.

XXXIX.

Trianguli rectanguli ABC cognito alterutro laterum circa rectum AB, & hypotenusam AC ad latus alterum CB cognitum AD majore existente, quam in ratione data DC ad CB: invenire hypotenusam AC, & latus alterum CB.

Sit AB 12, AD 3, & DC ad CB, ut 2 ad 1. Igitur ut inveniatur AC, CB, describatur centro C & intervallo CB circulus BEF, secans AC in E, & eandem productam in F. Tum descripto super AF quadrato FGH, erit, assumpta AH æquali AE, \square HF æquale \square ex AB 144. Deinde inde producta AG, sumantur in illa GI, IK æquales AD, eritque (quia AG est æqualis AF, & AH æqualis AE) HG æqualis EF, hoc est, duplæ DE: adeoque HK dupla ipsius AE vel AH, & idcirco AK tripla ipsius AH. Patet itaque, \square KF triplum esse \square li HF, ideoque facere 432. Est autem gnomon IFL etiam æqualis \square KF. Hinc, si ad 432 addatur \square LI 9, habebitur \square ex IA 441. Cujus radix 21, erit ipsa IA. E qua subducta IG 3, relinquitur GA vel AF 18. Ex hac autem si rursus auferatur AD 3, restabit DF 15. Cujus triens 5, erit latus BC. Unde AC erit 13. Quæ erant inveniendæ.

SCHOLIUM.



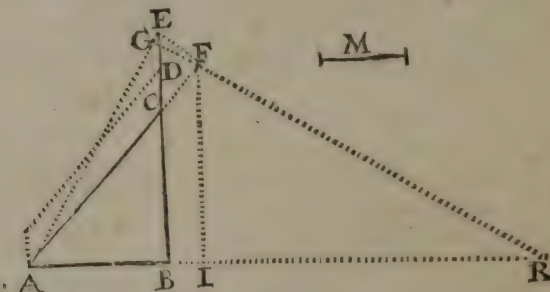
Notandum hic est, accidere posse, ut BC non nisi semel contineatur in AC, aliquo remanente excessu; vel etiam pluries, absque reliquo. Quocirca in primo caso operandum erit ut in 6^a Prop^a factum fuit, ubi ex uno latere AB circa rectum B, & differentia AE reliquorum duorum AC, CB invenimus ipsa AC & CB. Quod autem ad secundum

casum attinet, sciendum est, omnem difficultatem in eo tantum consistere, ut ex cognita rectanguli area, & ratione laterum, inveniantur ipsa latera. Si enim, ex. gr., BC contineatur in AC bis absque reliquo, erit AF tripla AE, & 6 Tertii ac propterea cum \square HF sit 144, nimirum \square aequale \square ex AB 12: erit \square Elem. Eucl. ex BC 48, & BC $\sqrt{48}$; ac proinde AC $\sqrt{192}$.

XL.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, & aggregato hypotenuse AC & areae ABC: invenire hypotenusam & aream.

Esto AB 3, & aggregatum ipsius AC & areae ABC 11. Jam ad inveniendam AC, describatur super ipsa \square AD, latitudinē habens unitatis, quod unā cum area ABC faciat 11. Cui summā si sumatur æquale $\triangle ABE$, & AC producatu donec in eam cadat perpendicu-



laris EF: erit \square AD æquale \triangle^{10} ACE, & altitudo EF 2. Deinde demissa ex F super AE perpendiculari FG, producatu ipsa donec cum AB producta conveniat in R, & ex F demittatur in AR perpendicularis FI. His positis, si 11, area \triangle^{11} ABE, dividatur per $\frac{3}{2}$, semissem ipsius AB, orietur $BE \frac{22}{3}$. Cujus \square additum ad 9, \square ex AB, habebitur $\frac{264}{9}$, \square ex AE. Unde AE fit $\sqrt{\frac{264}{9}}$, hoc est, $\frac{2}{3}\sqrt{565}$ vel $\frac{2}{3}\sqrt{113}$, 5. Deinde ex $\frac{264}{9}$, \square ex AE, subducto 4, \square ex EF, restabit $\frac{229}{9}$, \square ex AF. Cujus $\sqrt{}$, erit $\frac{23}{3}$, ipsa AF. Tum fiat, propter simili-

tudinem \triangle forum AEF, AFG, ut $AE \frac{1}{3} \sqrt{113,5}$ ad $AF \frac{2}{3}$, ita $AF \frac{2}{3}$ ad $AG \frac{2,3,2,3}{3 \sqrt{113,5}}$, & $EF 2$ ad $FG \frac{2,3,2}{\sqrt{113,5}}$. Rursus, ob similitudinem \triangle forum ABE, AGR, fiat ut $AB 3$ ad $AG \frac{2,3,2,3}{3 \sqrt{113,5}}$, ita $AE \frac{1}{3} \sqrt{113,5}$ ad $AR \frac{2,3,2,3}{3,3,3}$, & $BE \frac{2}{3}$ vel $\frac{11,2}{3}$ ad $GR \frac{2,3,2,3,11,2}{3,3,3 \sqrt{113,5}}$. E qua subdu-
ctâ $FG \frac{2,3,2}{\sqrt{113,5}}$, relinquitur $FR \frac{2,2,6,2,3,2}{3,3,3 \sqrt{113,5}}$ vel $\frac{11,2,2,3,2}{3,3,3 \sqrt{113,5}}$. Eo-
dem modo erit, propter \triangle similia ABE, FIR, ut $AE \frac{1}{3} \sqrt{113,5}$ ad $FR \frac{11,2,2,3,2}{3,3,3 \sqrt{113,5}}$, ita $BE \frac{11,2}{3}$ ad $IR \frac{2,2,3,2,11,2}{3,3,3,5}$. Quæ ablata ex AR,
 $\frac{2,3,2,3}{3,3,3}$, relinquet $AI \frac{2,7,2,3}{3,3,3,5}$ vel $\frac{3,3,3,2,3}{3,3,3,5}$, hoc est, $\frac{2,3}{3}$. Denique,
ob similia \triangle AIF, ABC, fiat ut $AI \frac{2,3}{3}$ ad $AF \frac{2}{3}$, ita $AB 3$ ad $AC 5$. Unde area ABC erit 6. Quod erat faciendum.

Aliter.

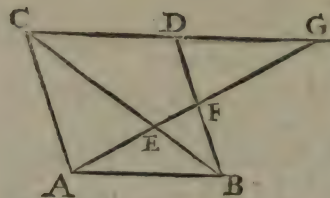
Fiat ut $AB 3$ ad $EF 2$, ita $BE \frac{2}{3}$ ad quartam M. quæ ideo erit $\frac{4,4}{9}$.
Deinde fiat, ut 5, differentia \square forum ex AB, EF, ad \square ex AB 9, ita
 $\frac{2,3}{9}$, differentia ipsarum AF & M, ad AC 5. Quod hoc modo patet. ap 19 Quinti
Elem.
Quoniam enim per constructionem BE est ad M, ut AB ad EF, Eucl.
atque etiam, propter similitudinem \triangle ABC, EFC, CB ad CF sit, b p corol. 20
Sexti Elem.
ut AB ad EF: erit quoque a subductis CB, CF ex BE, M, reliqua Eucl.
CE ad reliquam M demptâ eidem CF, sicut AB ad EF. Sed ut AB
ad EF, ita est quoque AC ad CE. Quare proportionales sunt AC,
CE, & M minus CF. Hinc b, ut \square super prima AC ad \square super 2^{da} c p 22 Sexti
Elem. Eucl.
CE, hoc est c, ut \square ex AB ad \square ex EF, ita 1^{ma} AC erit ad 3^{iam} M d per corol.
19 Quinti.
minus CF. Hoc est, per conversionem rationis & convertendo d, ut e Corol. 4
Quinti E-
lem. Eucl.
 \square ex AB minus \square ex EF ad \square ex AB, ita AF minus M ad AC. Quæ
erat inveniendâ.

XLI.

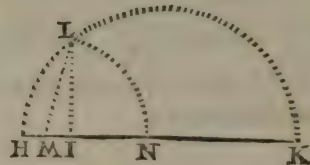
Dato rhombo ABDC, cujus diagonales CB, AD: ex A
M re-

rectam lineam ducere A E F G, quæ conveniat cum latere producto CD, ita ut intercepta EF ad totam AG datam habeat rationem, ut HI ad IK.

Constructio.



Descripto super HK semicirculo HLK, erigatur ex I super ipsam perpendicularis IL, occurrens circumferentiæ in L. Tum divisâ HI bifariam in M, jungatur ML, cui si sumatur æqualis MN, fiat ut NI ad IH, ita AB ad BF: dico, si ex A per F recta ducatur lineæ, EF esse ad AG, sicut HI ad IK.



Demonstratio.

Ex demonstratis 2^{di} modi 27^{ma} prop^{nis} hujus, HI, IN, & NK sunt 3 proportionales, & per 4^{am}

prop. 6 lib. Elem. Euclidis AFB & ACG sunt duo \triangle^a similia. Hinc ut FB ad BA, ita erit AC, hoc est, AB, ad CG; adeoque FB, BA, & CG 3 proportionales. Est autem per constructionem HI ad IN, ut FB ad BA. Quare HI, IN, & NK tres sunt proportionales in eadem ratione quâ FB, BA, & CG: & proinde HI ad IN, NK, hoc est, IK, ita FB ad AB, CG. Jam verò ratio FB ad AB, CG composita est ex ratione FB ad BA, & ex ratione BA ad AB, CG. Quocirca & ratio HI ad IK ex iisdem rationibus erit composita. Rursus cum ratio EF ad AG componatur ex ratione FE ad EA, hoc est ^a, FB ad BA, & ex ratione EA ad AG, hoc est, AC vel A ad AB, CG, ex quibus rationibus componebatur quoque ratio HI ad IK: erit ratio EF ad AG eadem, quæ HI ad IK. Quod erat faciendum.

a p 3 Sexti
Elem. Eucl.

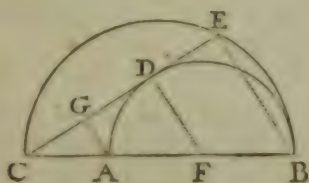
Ubi notandum, cum recta, ab A ad D ducta, sit extrema lineæ, quæ juxta mentem Problematis duci potest, eaque per rectam CB bifariam dividatur, rationem quam EF ad AG habere debet, non majorem requiri quàm 1 ad 2, hoc est, ut HI non major sit dimidiâ IK.

XLII.

XLII.

Descriptis super recta CAB duobus semicirculis CEB & ADB , sese tangentibus in B , & ex C ductâ CDE , tangentem minorem semicirculum in D , & terminatâ majoris circumferentiâ in E : invenire utriusque diametrum, si CD sit 10, & DE 6.

Etenim F existente centro minoris semicirculi ADB , jungantur BE , FD . Quæ ^a inter se erunt parallelæ. Tum ductâ AG parallelâ ^{a p 18 & 31} FD vel BE , erit GD æqualis DE ; & CG ad CE , ut CA ad CB . ^{Tertii, ut} Hinc si ex CD 10 auferatur DE vel DG 6, relinquetur CG 4; item ^{& 28 Primi} ^{Elem. Eucl.} ad CD 10 additâ DE 6, fiet CE 16. Ex quibus igitur nota est ratio,



quam CA habet ad CB , quippe eadem, quæ 4 ad 16, seu 1 ad 4. Deinde cum \square ex CD sit 100, idemque ^b sit æquale \square^{10} ACB , quæ ^{b p 36 Tertii} ^{Elem. Eucl.} \square^{11} ACB areâ 100, & ratione laterum CA , CB , 1 ad 4, inventantur ipsa latera. Quod fiet, ponendo ut CA ad AC , hoc est, ut 1 ad 4, ita ^c \square ACB 100 ad \square ex CB ^{c p 1 Sexti} ^{Elem. Eucl.} 400. Cujus ¹ ut 20, erit diameter major CB . Quare, cum CB sit ad CA , sicut 4 ad 1: erit hæc 5, adeoque minor diameter AB 15.

XLIII.

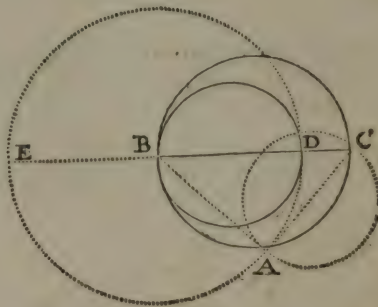
Cognitâ duorum circulorum differentiâ, & differentiâ diametrorum DC , invenire utriusque diametrum BD & BC .

M 2

Eslo

Est $DC\ 8$, & differentia circulorum, hoc est, area lunulæ $BACBD\ 616$. Hinc ad inveniendas BD, BC , describatur centro B intervallo BD circulus EDA , secans circulum BCA in A , junganturque BA, AC : eritque a descriptus circa A circulus æqualis lunulæ $BACBD$, hoc est, 616 . Unde facile, statuendo diametrum circuli esse ad ejus peripheriam, ut 7 ad 22 , invenitur diameter AC : nimirum, si fiat ut $38\frac{1}{2}$, area ejusdem, ad aream circuli $AC\ 616$, ita 49 , \square^{um} diametri illius, ad 784 , \square^{um} diametri hujus. Unde AC fit 28 . Eò itaque Problema reductum est, ut, Datis \triangle^{li} rectanguli ABC latere circa rectum $AC\ 28$, & $DC\ 8$, differentiâ reliquorum duorum AB, BC , invenienda sint latera AB, BC , per 6^{tam} prop^{ne} hujus: eritque AB vel $BD\ 45$, & $BC\ 53$. Quæ inveniendæ proponebantur.

ap 2 Duo-
decimi 47
Primi Elem.
Eucl.



trum circuli esse ad ejus peripheriam, ut 7 ad 22 , invenitur diameter AC : nimirum, si fiat ut $38\frac{1}{2}$, area ejusdem, ad aream circuli $AC\ 616$, ita 49 , \square^{um} diametri illius, ad 784 , \square^{um} diametri hujus. Unde AC fit 28 . Eò itaque Problema reductum est, ut, Datis \triangle^{li} rectanguli ABC latere circa rectum $AC\ 28$, & $DC\ 8$, differentiâ reliquorum duorum AB, BC , invenienda sint latera AB, BC , per 6^{tam} prop^{ne} hujus: eritque AB vel $BD\ 45$, & $BC\ 53$. Quæ inveniendæ proponebantur.

XLIV.

Dato semicirculo $ABFC$, punctum invenire E in diametro AC vel ea producta, è quo si in dato angulo D ad circumferentiam ABC recta ducatur linea EF , quadratum, quod ab ipsa describitur, ad rectangulum AEC , contentum sub rectis EA, AC , inter quæsitum punctum E & diametri AC utrumque terminum A & C interceptis, datam habeat rationem, GH ad HI .

Idem

a p 35 Tertio
Elem. I. cl.

AM, MF, & MC, \square^{sum} MF æquale \square^{b} AMC. Ut requir-
ebatur.

b p 3 Tertiis
Elem. Encl.

cf corol. 19.
Quinti E.

lem Eucl.
d Vide Cla-

Quinti E-

lem. Euc^l.

eptis Gu. n-
 ri Elem.
 Encl

Encl.
- 17 - Quin-
- 17 -

Encl.

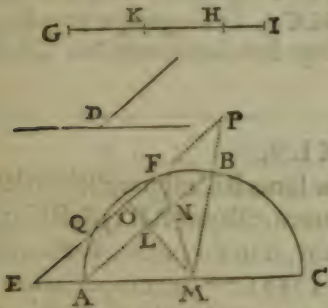
2 g 1 Sext
Elem. Eucl.

Ex. 1

M 3

Quòd

p p 16 ex 36
Termin Elem.
Eucl.



q p corol. 19.
Quinti E-
lem Eucl.
- 1 Vide C. 6.
- viam ad 22
Quinti E-
lem Eucl.

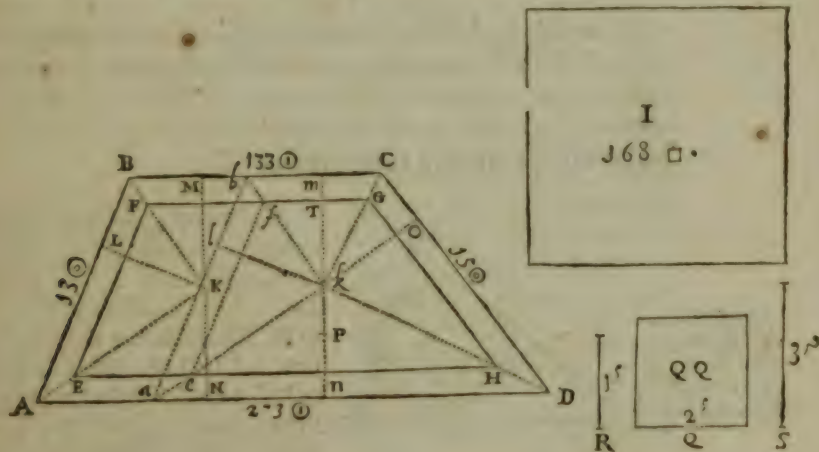
sp 15 Quin-
 15 Elem.
 Encl.
 sp 17 Quin-
 17 Elem.
 Encl.
 up 1 Sexti
 Elem. Encl.
 x p 10 Terti
 Elem. Encl.

Deni-

Tum fiat, ut 28, summa ipsarum bC , aD , ad mk 6, ita summa ipsarum Bb , Aa 126 ad kP 27. Deinde, ut 28, summa ipsarum bC , aD , ad mk 6, ita 168, area piscinæ I , ad 36, aream $\square^{11} QQ$. Cujus radix 6, erit ipsum latus Q . Porro statuendo $Q6$ esse mediam e serie trium proportionalium R , Q , & S ; & kP 27 differentiam extremarum R & S , inveniatur per 26 Prop. hujus extremæ R & S . Quorum minor R 48, semissis erit latitudinis piscinæ sive rectæ kT . Quæ si auferatur ex mk 6, restabit 12, latitudo ambulacri mT . Hinc ductis rectis EF , FG , GH , & HE ipsis AB , BC , CD , & DA parallelis & æquali ubique intervallo ab iis remotis, dico aream piscinæ $EFGH$ æqualem esse datæ areæ I 168.

Demonstratio.

Per constructionem R , Q , & S sunt 3 proportionales, hinc cum Tk sit æqualis R , & kP differentia extremarum R & S : erunt & Tk , Q , & TP 3 proportionales, adeoque, \square sub TP , Tk æquale $\square^{10} QQ$. ^{a 17 Sexti} Deinde quoniâ per constructionem est, ut summa ipsarum bC & aD ^{Elem. Eucl.}



ad mk , ita summa ipsarum Bb & Aa , seu ipsarum Ff & Ee ad kP : ^{b pcorol. 4} erit quoque invertendo ^{ut mk ad summam ipsarum bC , aD , ita kP} ^{Quinti E-} ^{lem Eucl.} ad summam ipsarum Ff , Ee , hoc est, ^{c p 1 Sexti} ^{dine Elem. Eucl.} ^N

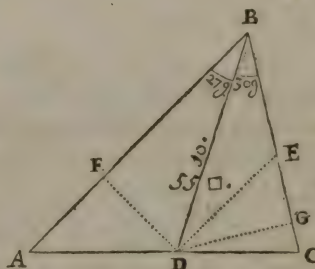
*e p 29 Pri-
mi, & 4
Sexti Elem.
Eucl.
f p 19 Sexti
Elem. Eucl.* cum ipsa e inter se similia sint, adeoque f ad se invicem ut \square^{ta} ho-
mologorum laterum: erit \square ex FC æquale binis \square^{is} ex AG & EC .
Hinc si ex 1628176④, \square^{to} ex FC , auferatur 619369④, \square ex EC ,
relinquetur 1008807④, \square ex AG , cujus radix 1004②, erit ipsa
 AG . Cui additâ GB 489②, habebitur AB 1493②. Ut supra.

E quibus facile etiam est invenire BD , statuendo, ut 2280②, sum-
ma ipsarum AB , EC , ad EB 1495②, ita AB 1493② ad BD 979②.
Unde porro AD & DC inveniuntur juxta doctrinam triangulorum.

XLVII.

In triangulo ABC cognitis angulis ABD 29, & DBC 30
graduum, lineâ BD 10 decempedarum, & areâ trianguli
 ABC 55 \square decempedarum: invenire AB & BC .

*a p 4 Sexti,
& 16 Quin-
ti Elem.
Eucl.
b p 1 Sexti
Elem. Eucl.*



Ductâ ex D rectâ DE paral-
lelâ AB , occurrente ipsi B C in E :
erit propter similitudinem \triangle^{rum}
 ABC , DEC^a , AC ad DC , ut
 BC ad EC . Sed ut A C ad DC ,
ita quoque b est $\triangle ABC$ ad
 $\triangle DBC$; & ut BC ad EC , ita
est $\triangle DBC$ ad $\triangle DEC$. Pro-
portionalia igitur sunt \triangle^{a} ABC ,
 DBC , & DEC . Deinde quo-
niam in \triangle^{lo} DBE cognoscitur
latus D B unâ cum duobus angu-

lis DBE & BDE , hoc est, ABD : invenietur inde, juxta doctrinam
 \triangle^{lorum} planorum, area DBE $13\frac{133}{1000}$, circiter. Hinc cum dictorum
3 triangulorum cognoscatur 1^{um} ac majus ABC 55, & excessus,
quo 2^{dum} DBC superat 3^{tium} DEC , hoc est, DBE $13\frac{133}{1000}$, invenie-
tur, per modum Scholii propositionis 28^{ve} hujus, $\triangle DBC$ fore $30\frac{957}{1000}$,
vel $24\frac{45}{1000}$. Unde si DBC ponatur esse $30\frac{957}{1000}$, erit ABD
 $24\frac{45}{1000}$; at verò supponendo DBC esse $24\frac{45}{1000}$, erit ABD $30\frac{957}{1000}$.
Quare sumendo ABD esse $24\frac{45}{1000}$, erit ejus duplum, hoc

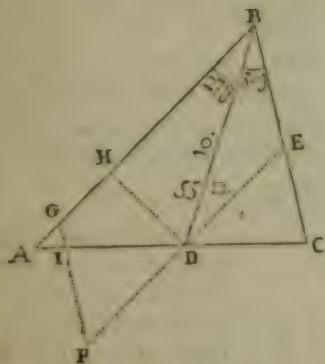
e p 41 Primi est c, \square sub AB & perpendiculari FD contentum, $48\frac{90}{1000}$. E qui-
Elem. Eucl. bus porro invenitur \square sub AB & BD , si fiat, ut FD ad DB , hoc est,
ut 45399, sinus anguli ABD , ad 100000, sinum anguli recti DFB ,
ita

ita $48 \frac{99}{1000}$ ad $105 \frac{237}{1000}$. Quo diviso per DB 10, orietur AB $10 \frac{193}{1000}$, circiter, hoc est, 10 decemp., 5 ped., 9 dig. & 3 granorum.

Porro ut inveniatur BC, fiat ut DG ad DB, hoc est, ut 50000, sinus anguli DBC, ad 100000, sinum anguli recti DGB, ita $61 \frac{91}{1000}$, \square lum sub BC & perpendiculari DG, hoc est \square , duplum \triangle^{10} DBC, ad $123 \frac{82}{1000}$, \square sub DB, BC. Quod per DB 10 divisu, dat paulo minus quam $12 \frac{82}{1000}$, hoc est, 12 decemp., 3 ped., 8 dig., & 2 gran. pro BC.

Eodem modo, si ABD ponatur $30 \frac{91}{1000}$, inveniatur AB circiter $13 \frac{637}{1000}$, & BC $9 \frac{618}{1000}$; ita ut latera AB, BC singula duplicem fortiantur valorem, & quidem AB sit vel $10 \frac{193}{1000}$ vel $13 \frac{637}{1000}$; & BC vel $11 \frac{82}{1000}$ vel $9 \frac{618}{1000}$.

Aliter.



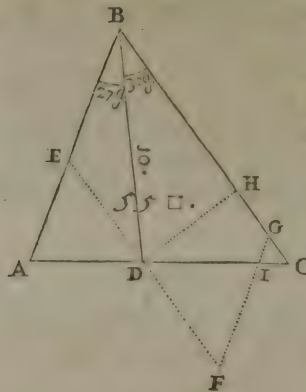
Ducta, ut ante, DE parallela AB, constituatur super BE parallelogrammum BEFG æquale \triangle^{10} ABC; hoc est, 55 \square decemp. Tum fiat, ut 83867, sinus anguli DEB, vel ABC, seu DEC 57 grad., ad DB 1000, ita 45399, sinus anguli BDE seu ABD, ad BE 54133; & 50000, sinus anguli DBE, ad DE 59623. Deinde, ut 100000, sinus anguli recti DHB, ad DB

1000, ita 45399, ad 45403, perpendicularem DH. Hinc divisâ 550, areâ parallelogrammi BEFG, per 45403, perpendicularem seu latitudinem DH, orietur 121153, longitudo GB seu FE. E qua subductâ DE 59623, restabit FD 61530. Porro quoniam parallelogrammum BEFG æquale ponitur \triangle^{10} ABC, erit subductâ communi areâ IG BED, \triangle FID æquale duobus simul \triangle^{10} AGI & DEC. Hinc cum ipsa \square inter se similia sint, ac proinde f ad se invicem ut \square^{14} laterum homologorum, erit \square ex FD æquale binis \square^{10} ex AG & DE: adeoque si à \square^{10} ex FD 378594090 auferatur \square ex DE 355454440, relinquetur 23139650, \square ex AG. Cujus radix 15213, erit ipsa AG. Huic si addatur GB 121153, fiet AB 136363, paulo minor, quam supra.

N 3

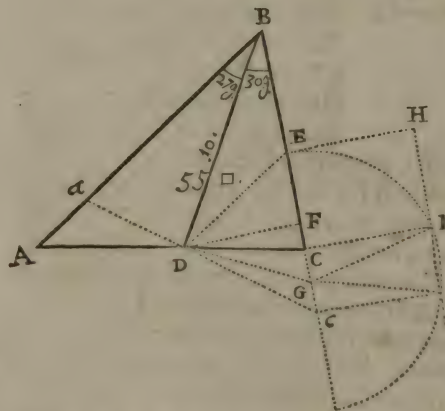
Porro

Porro ut inveniatur BC, fiat, ut 7674③, differentia ipsarum AB DE, ad BE 5413③, ita AB 13636③ ad BC 9618③. ut supra.



Eodem modo, si DE agatur parallela BC, donec occurrat ipsi AB in E, & super EB, ut supra, constituatur parallelogrammum BEFG æquale Δ^{lo} ABC, invenietur AB 10592③, paulò minor, quàm ante; & BC 12383③, paulò major, quàm supra; Ita ut AB & BC singula sint duplicis solutionis, nimirum AB vel 13636③, vel 10592③; & BC vel 9618③, vel 12383③. E quibus deinde facile est invenire, per doctrinam Δ^{um} planorum, lineas AD & DC, quæ similiter duplicis erunt solutionis.

Adhuc aliter.



Ductâ, ut ante, DE parallelâ AB, & ex D super BC demissâ perpendiculari DF: erit, ut supra, BE 5413③, & DE 5962③. Tum fiat, ut 100000, sinus anguli recti DFB, ad DB 100, ita 50000, sinus anguli DBF, ad DF 50. Deinde supponendo Δ^{lum} DBG æquale semissi Δ^{li} ABC, hoc est, 275①, si dividatur 275① per 25①, semissem perpendicularis DF, seu, quod idem est, 55 per 5, oriatur basis BG 11①. Si jam BE 5413③ semissis fuerit ipsius BG 11①, inventa quo-

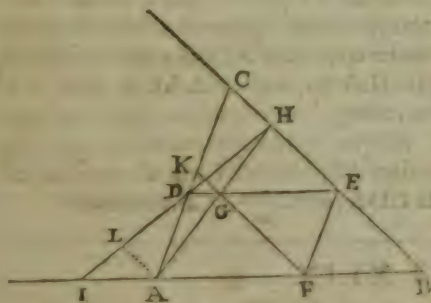
quoque fuisset BC 11 ②, ac proinde AB & BC singulæ unius tantum solutionis. Sed cum hîc minor sit, erunt AB & BC singulæ duplicis solutionis. Ad quas inveniendas, ponendo EH æqualem EB, eidemque perpendiculararem, describatur centro G intervallo GE semicirculus EI, qui secetur à recta HI (ipsi BC parallelâ) in punctis I, E quibus si super BC demittantur perpendiculares IC & ic, ostendent ipsæ longitudinem lateris BC. Hinc si 19300569 ②, \square ex BE, EH, vel *dp 4 hujus,* CI, auferatur à \square ex GE vel GI 31214569 ②, relinquetur \square ex *vel 47 Pri-* CG 1914000 ②. E quo extractâ radice, invenietur GC vel GE 138 ③. *mi Elem.* Quæ ex BG 11 ② ablata, aut eidem addita, dat BC 9617 ③, vel *Eucl.* 12383 ③. Cujus demonstratio ex modo præcedenti est manifesta. *cp 4 Sexti*

Denique ad inveniendum AB, fiat \square ut CE 4204 ③, vel 6970 ③ *Elem. Eucl.* ad ED 5961 ③, ita CB 9617 ③, vel 12383 ③ ad AB 13638 ③, vel 10592 ③.

XLVIII.

Dato triangulo ABC, productisq; lateribus AB, BC indefinite versus A & C: per punctum D, utcumque datum in AC extra ejus medium, rectam lineam ducere IDH; ita ut triangulum IHB sit æquale triangulo ACB.

Constructio.



Ductâ DE parallelâ AB, tum EF parallelâ AC, ac rursus FG parallelâ CB, agatur ex A per G recta AGH: dico, si ex H per D ducatur HDI, triangulum IHB æquale esse triangulo ACB.

Demonstratio. *ap 20 Pri-*

Etenim productâ FG *mi. & 4*

ad K, erit \square propter similitudinem triangulorum FGE, KGD, EG *Sexti Elem.* ad GD, ut FG ad GK. Sed ut FG ad GD, ita quoque est BA ad AI; *Eucl.* & BA ad AI, \square ut \triangle BAH ad \triangle HAI: itemq; FG ad GK, ut BH *b p 1 Sexti* ad *Elem. Eucl.*

ad HC; & BH ad HC, ut $\triangle BAH$ ad $\triangle AHC$. Erit igitur ut
 c 9 *Quinti* $\triangle BAH$ ad $\triangle HAI$, ita idem $\triangle BHA$ ad $\triangle AHC$; adeoque $\triangle HAI$
 Elem. Eucl. æquale $\triangle AHC$. Hinc si illis addatur commune $\triangle BHA$: erit
 $\triangle IHB$ æquale $\triangle ACB$. Quod erat faciendum.

Aliter.

d p corol. 4 Fiat ut CB ad EB, ita EB ad EH. Etenim quoniam ^d, propter
 Sexti Elem. similitudinem \triangle^{rum} AHB, AGF, AB est ad AF, sicut BH ad FG, hoc
 Eucl. est, EB: erit quoque dividendo ^e BF ad FA, ita HE ad EB. Sed ut
 e p 17 *Quin-* BF ad FA, ita est, ^f propter parallelas FE, AC, BE ad EC. Quare
 ti Elem. erit ^g ut HE ad EB, ita EB ad EC: & convertendo ^h CE ad EB, ita
 Eucl. EB ad EH. Quod erat demonstrandum.
 f p 2 *Sexti*
 Elem. Eucl.

Adhuc aliter.

g p 11 *Quin-* Fiat ut FB ad BA, ita AF ad BI. Quoniam enim, ut ante, AB est
 ti Elem. ad AF, sicut BH ad EB; & per conversionem rationis ⁱ AB ad BF, ut
 Eucl. BH ad HE: erit quoque invertendo ^k FB ad BA, sic EH ad HB, hoc
 h p corol. 19 *Quinti* est, ^l propter similitudinem \triangle^{rum} HED, HBI, ut DE, hoc est, AF,
 Elem. Eucl. est, ^l propter similitudinem \triangle^{rum} HED, HBI, ut DE, hoc est, AF,
 i p corol. 19 ad IB. Quod erat ostendendum.

Quinti Porro punctum D extra medium lineæ AC dari debere, hinc pa-
 Elem. Eucl. tet, quoniam, si in medio ipsius datum fuerit, nulla recta IH per id
 k p corol. 4^a duci potest, faciens \triangle^{lum} IHB æquale \triangle^{lo} ACB, sed semper majus.
Quinti Id quod manifestum est, ducendo AL parallelam BC, unde ^m fiunt
 Elem. Eucl. duo \triangle^{la} ALD, DHC inter se æqualia, quibus si addatur commune
 l p corol. 4^a trapezium ADHB: erit totum trapezium ALHB æquale \triangle^{lo} ACB,
 Sexti Elem. ac proinde \triangle IHB triangulo ILA majus quàm \triangle ACB. Adeò ut eo
 m p 26 *Primi* casu \triangle ACB sit minimum, triangulorum omnium, quæ à recta per
 Elem. Eucl. ducta constitui possunt. Ad quod quidem inveniendum, opus tan-
 tum est ducere DE parallelam AB, si enim EC æqualis sumatur EB,
 & ex C per D agatur recta CDA: erit \triangle^{lum} ACB, minimum.

XLIX.

Dato parallelogrammo ABCD, ex vel per punctum
 E, datum in uno laterum BD, vel eodem producto, re-
 ctam lineam ducere EF, occurrentem lateribus oppositis
 AC, CD, vel iisdem productis: ita ut triangulum FCG, ab
 eadem

eadem contentum, ad parallelogrammum $ABDC$ da- *Vide figura:
paginā ver-
sā.*
tam habeat rationem, HD ad DB .

*Est hæc 164 Prop. libri 7 Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini, quam hic generalem proposuimus & sol-
vimus, cujus quidem constructionem non ostendit, sed petere
videtur ex libris Apollonii de Spatii Sectione, qui tempo-
rum injuriâ perierunt, atque postea restituti sunt ab eruditis-
simo, celeberrimoque viro D. Willebrordo Snellio, qui & de
Determinata & Rationis Sectione libros, in lucem revo-
cavit.*

Constructio.

Ductâ HI parallelâ AB vel CD , faciente parallelogrammum $HDCI$, describatur super HE semicirculus HKE , in quo aptatâ EK æquali ED , jungatur HK : dico, si IF sumatur æqualis HK , & per puncta F, E recta linea agatur, $\triangle FCG$ esse ad $\square ABDC$, ut HD ad DB .

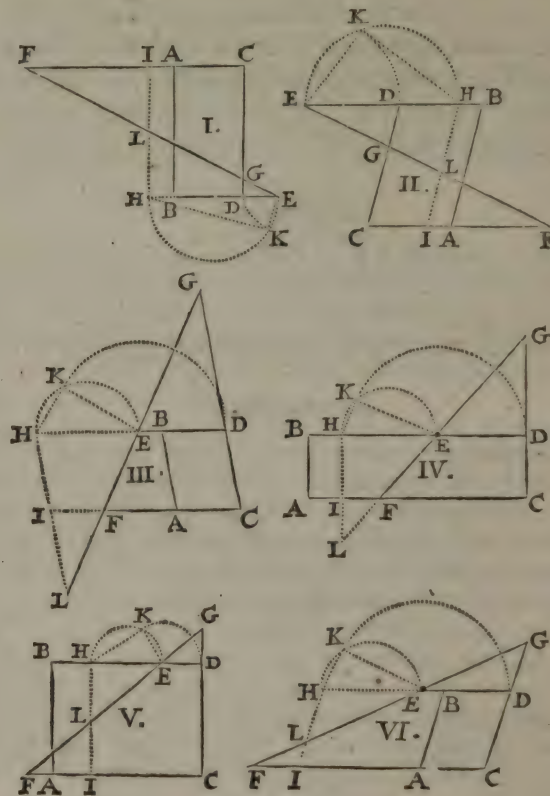
Demonstratio.

Quoniam enim <sup>a p 31 Ter-
tii. & 31
Sexti Elem.
Eucl.</sup> in \triangle^o rectangulo HKE rectilinea figura de-
scripta super HE æqualis est binis similibus similiterque positis
figuris super EK & KH descriptis, si pro his assumantur similia \triangle^1
 $HLE, DGE,$ & ILF , quorum homologa latera sunt HE, ED , hoc
est, $EK,$ & EF , hoc est, HK : erit $\triangle HLE$ æquale binis \triangle^2 DGE &
 ILF . Quare si in 1^{ma} & 2^{da} figura ab utraque parte auferatur com-
mune $\triangle DGE$, erit reliquum trapezium $H LG D$ reliquo \triangle^3 ILF
æquale. Quibus si addatur commune trapezium $L I C G$ erit \square
 $H I C D$ æquale \triangle^4 $F C D$. At verò in 3^{ia} & 4^{ta} figura si à dictis
 \triangle^5 utrinque auferatur commune $\triangle I L F$, erit reliquum trapezium
 $I H E F$ æquale reliquo \triangle^6 EGD . Quibus singulis si addatur com-
mune trapezium $F E D C$, erit $\square I H D C$ æquale \triangle^7 $F G C$. Denique
in 5^{ta} & 6^{ta} figura, si dictis \triangle^8 addatur utrobique commune spa-
tium $I L E D C$, erit $\square I H D C$ æquale \triangle^9 $F G C$. Quocirca cum in
omnibus hisce figuris $\square I H D C$ sit æquale \triangle^10 $F G C$, & $\square I H D C$ <sup>b p 1 Sexti
Elem. Eucl.</sup>
sit ad $\square ABDC$, sicut HD ad DB : erit quoque $\triangle F G C$ ad \square
 $ABDC$, ut HD ad DB . Quod erat faciendum.

O

Quod

Quod ad 1^{am} & 2^{am} figuram attinet, ipsæ unam tantum admittunt solutionem, nec ulli determinationi sunt obnoxia, ut contra fit in 4^{or} reliquis. In quibus HE non minor esse debet quam ED . Aequalibus enim existentibus, recta ex I per E ducta quæsito satisfaci-



eritque $IEG \triangle^{ram}$ omnium, recta per E ducta contentorum, minimum. Hoc est Problema eo casu erit $\mu\omicron\nu\alpha\chi\delta\nu$ seu *unius tantum solutionis*, cum aliâ duplicem admittat. Etenim inventâ lineâ FEG , ut o-

sten-

stensum est, ducenda erit per E, ut in præcedenti Problemate, alia recta, faciens \triangle lam æquale ipsi FGC, alteram præbens solutionem. Quæ quidem brevius hic invenitur, ponendo tantum HK, quam in 3^{ia} & 4^{ta} figura ab I ad F versus C posuimus, in eadem recta ad alteram partem, ut in 5^{ta} & 6^{ta} figura factum est; & illam, quam in 5^{ta} & 6^{ta} figura ab I ad F versus alteram partem posuimus, ponendo in eadem recta versus C, ut in 4^{ta} & 5^{ta} figura factum est; ducendo deinde ex invento hoc puncto per E rectam lineam.

Ubi porro patet in 3^{ia} & 6^{ta} figura, ubi punctum E in producto latere BD datum est, rationem ipsius HD ad DB, majoris semper inæqualitatis esse debere, hoc est, HD majorem quam DB: quoniam in hisce casibus \triangle FGC semper majus est quam \square ABDC.

Denique, quod spectat ad reliquos casus, si in ipsis cum Pappo velimus ut \triangle FGC sit æquale \square ABDC, quo casu HD, DB semper æquales sunt, & IH eadem quæ AB: sciendum, constructione ac demonstratione invariata manente, punctum B loco H assumendum esse, & A loco puncti I.

Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, ita ut \triangle FCG sit æquale dato spatio, si tantum \square HICD fiat dato spatio æquale; & his quidem cunctis Problematis casibus satisfactum putamus.

pe 44 aut
48 Pr. mi
Elem. Eucl.

L.

Triangulum ABC secare in data ratione rectâ EFG, procedente ex vel per datum punctum E, extra vel intra triangulum ABC.

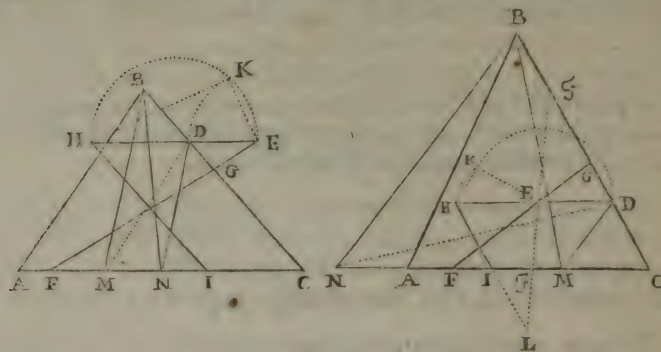
Constructio.

Secâ AC in M in ratione data, junctâque BM ducatur ED parallela AC, occurrens ipsi BC vel eidem productæ in D, describaturque super DC, per 44 prop. 1 lib. Elem. Eucl. \square IHDC æquale \triangle MBC: vel brevius, mutando tantum \triangle MBC in \triangle NDC (ducendo ad hoc BN parallelam DM) dividendoque NC bifariam in I: eritque recta EFG, ex vel per E ducta (ut in antecedenti Problemate)

O 2

mate) faciens $\triangle FCG$ æquale $\square^{mo} IHDC$, recta quaesita.

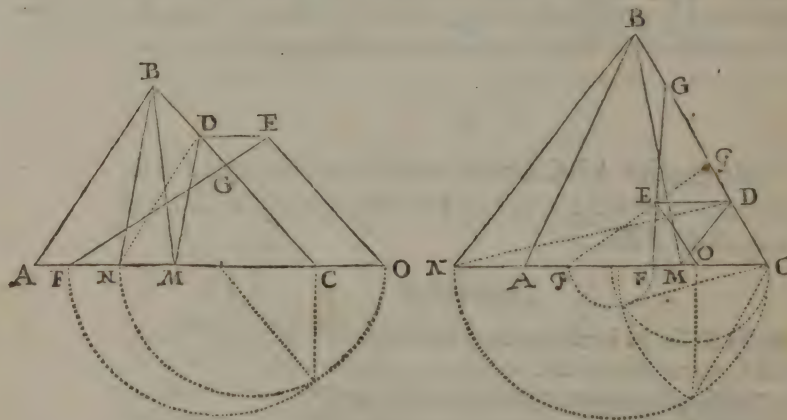
Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, faciens $\triangle FCG$



æquale dato spatio, constituendo tantum $\square IHDC$ dato spatio æquale.

Aliter.

Mutato, ut ante, $\triangle^{lo} MBC$ in NDC , ducatur EO parallela BC ,

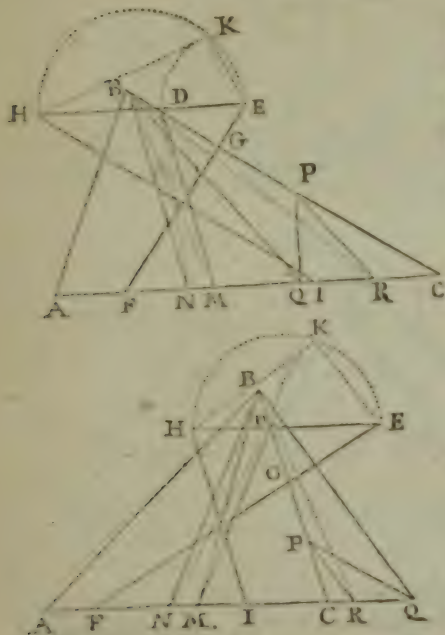


occurrent ipsi AC eidemve productæ in O . Tum sumendo NC esse unam

unam extremarum, & CO differentiam mediæ & alterius extre-
mæ, è serie trium proportionalium, inveniatur per 28 prop. hujus
media FC, eritque FO altera extrema. Quibus positis, si ducatur
recta FEG, erit ipsa quaesita.

Similiter si \triangle^{1um} FCG æquale requiratur dato spatio, eodem mo-
do operandum erit, factò prius \triangle^{lo} NDC eidem spatio æquali.

Demonstratio.



Quoniam enim FO
FC, & NC = tres sunt
proportionales, & super
1^{ma} & 2^{da} descripta
sunt similia \triangle^{1a} FEO
& FGC: erit \triangle^{1a} FO
ad 3^{tiam} NC, sicut \triangle
FEO super 1^{ma} ad \triangle
FGC super 2^{da}. Sed ut
FO ad NC, ita quoque
est idem \triangle FEO ad
NDC, hoc est, MBC.
Quare, cum \triangle FEO
ad \triangle FGC eandem ha-
beat rationem quam ad
 \triangle MBC, erit \triangle FGC
æquale \triangle^{lo} MBC, ad-
eoque reliquum seg-
mentum ABGF æqua-
le reliquo \triangle^{lo} ABM.
Sed ut ABM ad MBC,
sic AM est ad MC.
Erit igitur ut ABGF

a Excon-
structio-
ne.

b p corol. 19
Sexti Elem.
Eucl.

c p 1 Sexti
Elem. Eucl.

d p 9 Quinti
Elem. Eucl.

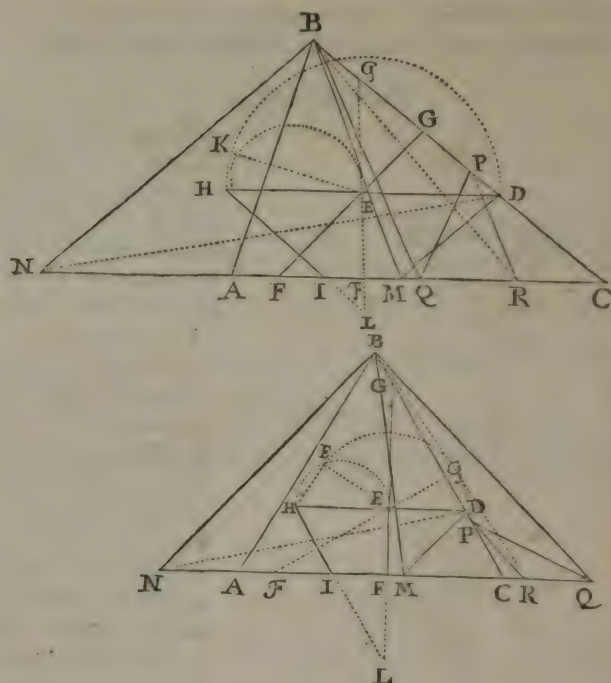
e p 1 Sexti
Elem. Eucl.

ad FGC, ita AM ad MC. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Eodem modo licet trapezium ABPQ secare in data ratione, rectâ pro-
cedente ex vel per punctum E, extra vel intra trapezium ABPQ datum:
mutando tantum ABPQ in \triangle ABR, secandoque AR in M in ratione data.
Operando deinde (postquam \square IHCD, ut ante, factum est æquale \triangle^{lo}
O 3 NDC,

NDC, hoc est, MBC) ut in primo modo fuit ostensum: vel etiam ut in secundo, inveniendū ad NC, unam extremarum, & CO, hoc est, DE, differentiam media & alterius extrema, mediam FC.



Similiter ad auferendum segmentum $FGPQ$ aequale dato spatio: oportet, eidem prius addito vel ab eo subducto $\triangle^{lo} CPQ$, ita ut aggregatum vel differentia sit $\triangle NDC$, operationem porro instituire, ut supra.
Id quod eodem modo de omnibus figuris rectilineis est intelligendum.

F I N I S.

210-

A CHI contentis, æquales esse, patet, quòd \triangle^{lum} quidem ABC sit æquale ipsi CHD, at trapezium RAQE æquale ipsi GFBR unà cum \triangle^{lo} DIQ, utpote, tollendo summam \triangle^{hi} EGR ac trapez ii SEQI tum ex summa \triangle^{lorum} SGA, AIS, hoc est, ex \square^{lo} SGA I, tum ex summa \triangle^{lorum} EFB & SED, præcedentibus æqualium. Quocirca cum omnes partes in \square^{lo} EBCD contentæ etiam contineantur five æquales sint omnibus partibus, \square^{ta} GFBA & ACHI simul constituentibus, relinquitur \square^{lum} EBCD quadratis GFBA, ACHI æquale esse. Quod erat ostendendum.

Expletio demonstrationis.

Quò nullus dubitationi locus superfit, sciendum primò, lineas GA C & BAI per 14 Primi Elem. Euclidis esse rectas. Deinde E angulum \square^{ti} EBCD cadere in rectam FS, ut & \triangle^{lum} EFB esse \triangle^{lo} ABC æquale, ita ostenditur. Cum enim præter rectos angulos ad F & A etiam angulos FBE & ABC, ex sublatione communis anguli EBA ab utroque recto FBA & EBC, æquales habeant; ac insuper eorum quoque latera FB, AB, propter \square^{lum} GFBA, æqualia sint: erunt itidem ^a reliqua latera FE, EB reliquis lateribus AC, CB, singula singulis, æqualia; & ^b \triangle^{lum} EFB æquale \triangle^{lo} ABC. Hinc cum EB, ducta in recto angulo ad BC, donec conveniat cum FG, continuatâ in E, ipsi BC ostensa sit æqualis: patet E angulum \square^{ti} EBCD cadere in rectam FS. Eodem modo ostenditur ^c, angulum E ejusdem \square^{ti} EBCD cadere in latus IH, ut & \triangle^{lum} ABC esse \triangle^{lo} CHD æquale. Porro \triangle^{lum} SGA esse \triangle^{lo} AIS æquale, cõvincitur per 34 Primi Elem. si modò \square^{lum} SGAI parallelogrammum esse demonstretur, hoc est, cujus opposita latera sint parallela. Id quod liquet ^d ob æqualitatem rectorum angulorum BAC, FGA, & AIH. Præterea \triangle^{lum} SGA ipsi EFB, hoc est, ut supra, ipsi ABC æquale esse, vel hinc arguitur, quòd SG ^e sit ipsi IA, hoc est, AC æquale, & GA ipsi AB; & quòd anguli AGS & BAC ab iis comprehensi recti sint, ideoque æquales. Denique \triangle^{lum} AIS æquari \triangle^{lo} SED, ita constat. Quoniam enim, ut supra, FE est æquale AC, hoc est, AI, & FS ^f æquale BI: erit quoque ES ipsi BA æquale. Similiter quia DH æquatur AB, hoc est, GA, & SH æquatur GC: erit etiam SD æquale AC. Hinc cum in \triangle^{hi} SED, ABC latera circa æquales rectos ad S & A sint singula singulis æqualia: erunt quoque ipsa \triangle^{hi} æ æqualia. Est autem \triangle^{lum} ABC, ut supra ostensum, æquale \triangle^{lo} EFB seu SGA, hoc est, \triangle^{lo} AIS. Quare etiam \triangle^{lum} SED ipsi AIS æquale erit.

FRAN-

143

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARVM,
LIBER II.

DE
Constructione Problematum Simplicium
GEOMETRICORVM,
SEU

Quæ solvi possunt, ducendo tantum rectas lineas.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academix Typographi.
c15 l3c LVL

Nobilissimis atque Amplissimis Dominis,
ILLVSTRIS ACADEMIÆ

LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

- D. AMELIO à BOUCKHORST, Domino de Wimmenum, Ordinis Equestris Assessori, Rheno-landiæ aggerum Præfecto ac Comiti, antehac in Confessu Ordinum Generalium Delegato, nunc autem Collegii Deputatorum Holl. Ordinum Præsidi.
- D. GERARDO SCHAEF, Equiti, Domino de Cortenhoef, Reip. Amstelodamensis Consuli, antehac in Confessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliarium Delegato, atque ad Sereniss. ac Potentiss. Daniæ & Sueciæ Reges Legationibus perfuncto.
- D. CORNELIO de BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii, West-IJelmundæ, Lindæ, &c. Domino, ad Sereniss. ac Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Exlegato, antehac in Confessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Holl. Consiliarium Delegato, atque Reip. Dordracenæ Exconsuli.

U T E T,

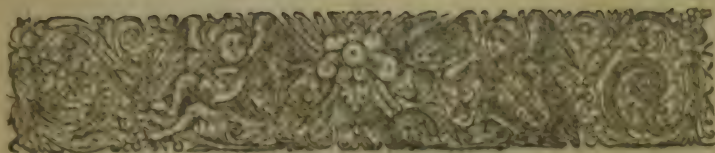
- D. CORNELIO ANTONIDÆ à BVY.)
TEVEST,)
D. GVILIELMO PAEDTS, JC^{to}, Rhe-)
nolandæ Consiliario,)
D. PAVLO à SWANENBURG JC^{to},)
D. JOHANNI MEERMAN JC^{to},)

*Florentissima
Reip. Lugd.
Batava Con-
sulibus.*

NEC NON,

- Amplissimo, Prudentissimoq; Viro,*
D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN JC^{to},
Reip. Lugd. Bat. Syndico, iisdemq; D. D. Curato-
ribus à Secretis.

Nobi-



Nobilissimi atque Amplissimi Viri,

DUM perpendo quantum in arcu vestro sim, quod studiis meis non modo prospexeritis, sed & iis promovendis etiamnum nulla denegatis subsidia: æquum duxi, ut conatus hosce, profectusque, quos in studio à Vobis mihi proposito fecisse autumo, iudiciis Vestris exponerem; ut vel hinc intelligatis me singularis istius beneficentiae immemorem non esse. Neque me dubitare finit eximia Vestra humanitas, quin id, quod offero, muneris, gratum acceptumque Vobis sit futurum, quum & primitias laborum meorum antehac luculento suffragio comprobaveritis, & alioqui semper favere iis ultro soleatis, qui ingenuas artes Reipublicæ bono promovendas excolendasque suscipiunt. Quanta autem Mathematicarum non modo sit utilitas, sed & necessitas, quantum illæ in excolendis, amplificandis, muniendis, & exornandis urbibus conferant subsidii, quanta insuper disciplinis hisce ex inévincibili

P 2

bili

bili certitudinis suæ evidentia, quâ cæteris omnibus præcellunt, accedat dignitas: non opus est ut hîc deprædicem Vobis, quibus id tam ex variis ac supremis Reipublicæ muneribus obeundis, quàm ex crebris ad potentissimos Reges & Principes Legationibus, quibus summa cum laude atque exterorum admiratione defuncti estis, abundè constat. Videtur equidem mihi rem acutè tetigisse, qui dixit: *Scientias hæc ac artes adeò humano generi esse necessarias, ut, qui illas è societate humana tollat, Solem ipsum è mundo tollere videatur.* Quamvis igitur conatus eorum vel maximè laudandos putem, qui easdem ad Reipublicæ usum non tantùm diligenter excolunt; sed etiam excultas posteritati tradunt atque commendant: non minori tamen honore extollendi videntur ii, qui, necessitate illarum probè perspectâ, ipsarum Fautores existunt ac Mecænates, omnemquæ operam dant, ut cum reliquis simul scientiis ac artibus propagentur. Quod sanè, quantâ à Vobis curâ fiat, vel inde patet, quòd Artes Mathematicas non solum in hanc Academiam introduci; verùm etiam vernaculâ nostrâ linguâ doceri volueritis, & laudabili hoc vestro instituto aliis, quibus in moderandis studiis æqua potestas vobiscum data est, imitando exemplo præluxeritis, Vo-

Vobisquæ æmulos creaveritis. Quæ verò hinc gloriæ decorisquæ Academiæ Vestræ facta sit accessio, testatur tot Nobilium, Ducum, ac Principum appulsus frequens, qui eam, ut præclara sidera cœlum, illustrem reddunt, & ob hanc præcipuè causam adeunt, ut in Mathematicis Scientiis addiscendis omnem suam operam collocent. Taceo hîc viros innumeros, qui ex hoc fœcundissimo Athenæo, tanquam ex equo Trojano, prodierunt, de Republica nostra bene meritos, qui quæ eam contra tot hostiles insultus inconcussam ac fermè invincibilem reddiderunt: quorum ope in civium salutem atque incolarum requiem ac securitatem, tot loca munita, tot fortalitia exstructa, tot denique inimicorum delusi conatus. Fœtus ergo quos belli tempore Mathematicum cultura heic pepererit, lubens prætereo, cum passim omnes norint, quòd militaris disciplina, modusquæ gerendi belli, sive in oppugnando, sive in defendendo, qualis hîc excultus aut exercitus fuit, parem in orbe haud invenerit, & is quidem etiam hoc nomine apud omnes gentes celebratur. Pacis verò tempore, quantam hæ artes Reipublicæ utilitatem afferant, frustra ego commemorem Vobis, qui & jam pridem perspectum habuistis, & quotidie experimini: Omnem ex

iis hominum manare solertiam, eorumque in muneribus suis feliciter obeundis dexteritatem. Etenim cum ad Reipublicæ nostræ clavum sedeat, plurimum illam Vobis, Nobiliss. atque Ampliss. Viri, debere semper judicavi: quandoquidem ipsa mihi robur firmè suum à Mathematicis accipere, atque ex iisdem promovendis conservare visa est; quibus propagandis per Dei gratiam, juxta ac Vestram Curam & Diligentiam, ad id fastigiū, quale hodie cernitur, adscendit. Quare dum mente revolve, Vos, ritè perpensā harum Scientiarum utilitate, semper easdem promovisse, atque earum cultoribus favisse: officii mei esse duxi, laboris hujus sive novæ speculationis scetum, jam pridem à me conceptum, etsi munus sublimi Dignitati Vestræ valde impar, in debita observantiæ ac gratitudinis testimonium publicum illustribus Vestris Nominibus consecrare. Quem si eo vultu, quo me accipere soletis, acceptum iri intelligam, animos mihi adderis his majora ac magis digna moliendi. Deus Opt. Max. Vos Reipublicæ, literatis omnibus ac studiorum candidatis, diu incolumes atque felices servet. Ita vovet & precatur,

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

P R Æ F A T I O A D L E C T O R E M.

Neminem tam leviter in Geometricis versatum opinor, quin vel ille quoque, qui primoribus tantum labris ea degustavit, utilitatem vulgariū Euclidis Problematum in difficilioribus construendis deprehenderit. Etenim si ratio habeatur eorum, quæ passim tam in Geometria, quam aliis in artibus, quæ eidem superstructæ sunt, faciendæ occurrunt: non nisi continuus dictorū Problematum usus & exercitatio comperietur. Quibus perspectis, ratus sum, quod, si quid in horum Problematum constructione fortè desideratum foret, & à me inventum demonstrarem, similiter omnibus reliquis, quæ iisdem innituntur, me satisfecisse omnino considerare possim. Quapropter, cum animadverterem, dicta Problemata in campo longè aliter, quàm in charta, & ab omni generis operariis ac artificibus absolvi, in mentem venit, id inde originem ducere, quod in charta ad eorum constructionem secundum Euclidem aliquid passim postulari & concedi debeat, quod quidem in campo non eodem modo nec aequè facile expeditur. Hinc, cum penitus hæc introspiciens perciperem, in tribus tantum totius rei cardinem versari, ut: à dato puncto ad datum punctum rectam lineam ducere; datam rectam in continuum rectam producere; & è dato puncto, tanquam centro, & intervallo quovis circulum describere: deprehendi, considerando quàm difficulter circulus in campo describatur, quàm ob causam ibidem à vulgari Euclidis construendi modo recessum, & ad alium, qui parum Geometricus censendus est, devenit sit. Vnde factum, ut, si, verbi gratiâ, datus angulus bifariam sit dividendus, ad circulorum descriptionem illic evitandam, instrumentum, quod Astrolabium dicitur, circulus existens in 360 partes æquales, gradus appellatas, divisus; quiq; rursus singuli in 60 minuta mente subdividuntur, ad id præstandum communiter adhibeatur. Quocum anguli amplitudine in di-

et is

Etis partibus observatâ, si dioptra ad semissem numeri harum partium applicetur, angulus in duos aequales dispescitur. Quis non hujusmodi processum à Geometria alienum judicet; quippe tam anguli quàm lineæ dantur, quorum magnitudo, dum nullo partium hujus divisionis numero exprimi potest, irrationalis dicitur? Quinimò, si vel nulli tales anguli reperirentur, nihilominus modus hic procedendi pro Geometrico habendus non esset: quandoquidem hoc pacto Problematis Geometrici constructio per Arithmetica principia, adeoque non per propria perficitur. Sicuti nec pro Geometrica constructione haberi debet, si ad triangulum ex datis tribus rectis lineis constituendum, datâ rectâ aliquâ pro communi mensurâ utamur (quemadmodum vulgò fit,) & ad eam cujusque lineæ longitudinem exploremus, ut exinde magnitudo singulorum angulorum calculo innotescat. Etenim præterquam quòd longitudo uniuscujusque harum trium linearum in proposita mensurâ partibus non semper explicabilis sit, vel quoque magnitudo singulorum angulorum per circuli partes antedictæ divisionis semper exprimi possit, consistit teritiò tota operatio in numerorum calculo, quæ ne minimùm quidem cum Geometrica constructione convenire dicenda est. Quarto accedit, ipsam instrumenti in prædictas partes divisionem Geometricam longè difficiliorem esse, ac proinde necessario post propositi Problematis constructionem sequi debere. Quintò denique considerando, quòd operis perfectio in totum pendeat, tum ab accurata instrumenti fabrica, tum & iusta circuli in prædictas partes divisione (quæ utraque ab ipsis etiam peritissimis artificibus ad perfectionem non perducitur): facile concluditur, ejusmodi operationem imperfectam esse ac naturæ Geometria repugnare.

Hinc cum processum in campo perspectum haberem, ubi Geometria hanc prærogativam sibi vendicare videbatur, quòd ibidem magis purè & naturæ suæ convenienter exerceri possit, quippe ubi lineæ & figuræ omnes mente duntaxat descriptæ concipiuntur, & nonnisi punctorum signa in usu sunt: visum fuit circulorum descri-

scriptionem, omnino illic ineptam, rejicere, ac ad dictorum Problematum constructionem postulatum hoc substituere: Ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, data rectæ terminatæ æqualem. Quod licet ab Euclide ut Problema construatur, & tamen à nullo non ob simplicitatem suam proprio Marte facile absolvatur, ego pro principio habendum duxi, ac proinde à quovis concessum supposui: siquidem id non modò dubius idoneam praxin admittit, verùm etiam (meo quidem iudicio) naturâ suâ multò simplicius, quàm circuli descriptio existit; in cuius etiam minima portiuncula efformatione è dato puncto non tantum una sed infinita rectæ alteri data æquales sunt sumenda aut concipiendæ.

Porro perpendendo in Geometria, nullum Problema, quantumvis simplex, Geometricè construi posse, in quo ad minimum æqualitas duarum rectarum linearum non sit consideranda, nec etiam hætenus ullum ex Problematis Euclidis absque circuli descriptione constructum sit: iudicavimus, quod, licet sapius in construendis vulgaribus hisce Euclidis Problematis ad punctum aliquod lineam alteri æqualem ponamus, constructio tamen nostra propter eam magis composita censi non debeat; sed simplicior, in quantum eam aliquoties tantum ponere, quàm infinites assumere, facilius est. Non equidem inficiat eo, instrumentorum ope sæpe aliquid facilius obtineri, & consequenter ea admitti posse, ubi eorum usus tale emolumentum suppeditat, quandoquidem in eum finem sunt excogitata; ut, exempli gratiâ, circinus, tam ad longitudinem lineæ capiendam, quàm ad eandem ex puncto infinites ponendo circulum in plano describendum. Quoniam verò hoc & his similia ad Mechanicam potius quàm ad Geometriam pertinent, cuius quidem scopus in contemplanda constructione & demonstratione consistit, non autem circa instrumenta, quibus ipsa perficitur, versatur: placuit prædicta Problemata ita construere, ut contemplatio eorum constructionis ubiq; proficua esse possit.

Præterea, cum in Geometria ab Antiquis tria genera Proble-

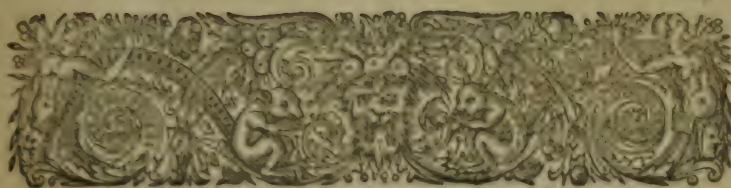
Q

ma-

matum statuta sint, ut, Planorum, Solidorum, & Linearium, in hoc discrepantium, quod Plana ductis lineis rectis descriptisq; circulis construantur, & Solida descripta insuper Coni sectione, at Linearia in locum hujus assumptâ aliâ curvâ, magis compositâ: visum fuit, considerando infinita esse Problemata, adeo simplicia, ut solis rectis lineis construi possint, sub prædicto genere Planorum Problematum genus aliquod subalternum, utputa, Simplicium Problematum, constituere; quorum itaque constructionem in hoc tractatu exhibere animus est. Ad quod vel eo magis incitati atque instigati fuimus, quod Nobilissimus ac Celeberrimus Vir Renatus Des Cartes in sua Geometria (quam aliquot abhinc annis ex Gallico idiomate in Latinum translatam, nunc de-novo uberioribus commentariis illustratam edimus) succinctam & generalem methodum ostenderit, ad prædicta superiorum generum Problemata, per curvas lineas, in certa genera à se distinctas, construenda.

Vnde, quandoquidem nulla simpliciores lineæ quàm recta excogitari queunt, quæ quidem in campo per radios visuales citra omne instrumentum designantur: æquum duxi constructionem horum vulgarium Euclidis Problematum, ad quæ alia omnia Simplicia Problemata methodo prædictæ Geometriae Dni Des Cartes reduci possunt, in hoc tractatu ostendere; sicut etiam, quo pacto Planorum Problematum constructio fieri possit, edocere, ita ut ea tam in campo quàm in charta locum obtineat, eademq; simul quàm paucissimis circulis descriptis absolvatur, ubique observans, ne, quod paucioribus ritè peragere licet, pluribus perficiatur.

Quamobrem, existimans me mentem meam abundè hîc declarasse, Lectorem non diutiùs detinendo, Præfationi sinem impono, ipsumq; ad operis examen ablegans, ut hæc, quæ novæ contemplationis inventa sunt, favore excipiat ac in usum suum convertat, rogo. Vale.



D E

Construptione Problematum Simplicium

GEOMETRICORVM,

SEU,

Quæ solvi possunt, ducendo tantum
rectas lineas.

PETITIONES SIVE POSTVLATA.

I.



Postuletur, ut à quouis dato puncto ad
quodvis datum punctum rectam lineam
ducere concedatur.

II.

Et : rectam lineam inter duo data
puncta terminatam, ex utraque parte in
directum & continuum producere.

III.

Item : ad datum punctum in data recta indefinita re-
ctam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem.

Q₂*Sequim-*

Sequuntur Problemata.

PROBLEMA I.

Problema
4 Primi E-
lem. Eucli-
dis.

Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.

Constructio.

Sumptis in recta AB ad libi-
tum punctis B & D ponatur^a ad
punctum A in recta AC linea
AE æqualis AD, ac rursus ad
punctum E in eadem recta linea
EF æqualis DB; ductisque^b
rectis BE, DF, se invicem se-
cantibus in G: Dico rectam ex
A ad G ductam angulum BAC
bifariam secare.

Demonstratio.

Quoniam enim ex constru-
ctione AD, AE, ut & DB, EF
æquales sunt, erunt etiam AB,
AF æquales. Hinc cum Δ lorum
ABE, AFD latera BA, AE
lateribus FA, AD sint æqua-

lia, & angulus ad A utrique communis: erunt quoque^c reliqui an-

^{c p 4 Primi}guli EBA & AEB, reliquis DFA & ADF, singuli singulis, æqua-
^{Elem. Eucl.}les. Sunt autem^d anguli ADF, FDB, ut & AEB, BEF in prima
^{d p 13 Primi}figura æquales duobus rectis. Hinc cum anguli ADF & AEB sint
^{Elem. Eucl.}ostensi æquales, erunt etiam anguli BDF & FEB æquales. Quoniam

^{c p 13 Primi}verò in 2^{da} figura^e anguli ABE, EBD, ut & AFD, DFE sunt æqua-
^{Elem. Eucl.}les duobus rectis, & quidem anguli ABE & AFD, æquales sint
ostensi, æquales quoque erunt anguli DBE & EFD. Quare cum in

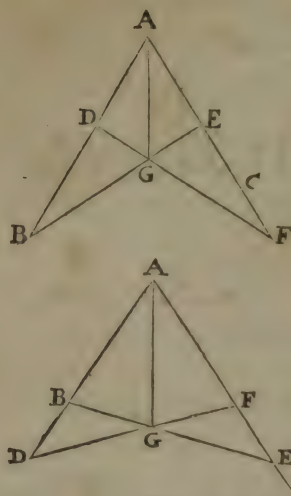
utraque figura anguli DBG, GDB angulis EFG, GEF, singuli singu-
lis, sint æquales, ac porro^f latus DB Δ li BDG æquale lateri FE Δ li

^{f p 26 Primi}FE G, erit & latus^g DG lateri GE æquale. Denique cum Δ lorum
^{Elem. Eucl.}DAG, GEA latera DA, AG lateribus EA, AG, singula singulis, sint

æqualia, ac 3^{tu} latus DG etiam sit æquale ostensum 3^{to} lateri GE:
erit

a p 3 Petit.

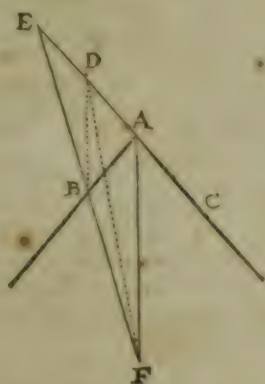
b p 1 Petit.



erit & \angle angulus DAG angulo GAE æqualis, adeoque angulus \angle BAC per rectam AG bifariam divisus, hoc est, in duos æquales angulos BAG, FAG. Quod erat faciendum.

Aliter.

Assumpto in A Butcunque B puncto, sumantur in producta CA h₂ 3 *Petit.* rectæ AD, DE h₁ singula ipsi AB æquales, ductâque rectâ per i₂ 1 & 2 *Petit.* puncta E & B, ponatur in ea BF æqualis BE, ac jungatur AF: dico i₂ 3 *Petit.* hanc angulum BAC secare bifariam.



Quoniam enim ductâ DE \triangle BDF & DBA singula ipsi BDE sunt æqualia*, erunt& ipsa inter se æqualia. Unde cum eidem insistant k₂ 38 *Primi* basi BD, erunt quoque l₁ in iisdem parallelis DB & AF, eritque an- *Elem. Eucl.* gulus m₁ BAF æqualis angulo ABD, & angulus FAC æqualis angulo *l₂ 39 *Primi** BDA. Quocirca cum n₁ anguli ABD & BDA sibi invicem sint *Elem. Eucl.* æquales, erunt pariter anguli BAF & FAC inter se æquales, ac proin- *m₂ 29 *Primi** de angulus BAC rectâ AF bifariam divisus. Quod erat faciendum. *Elem.*

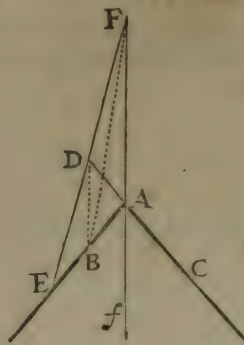
Corollarium.

Hinc patet: si AB sit æqualis AD, jungaturque DB, hanc ipsi AF, quæ angulum BAC bifariam secat, esse parallelam.

Adhuc aliter.

Sumptâ, ut ante, AD æquali AB, junctâque BD, sumatur BE æqualis BA, & ex E per D recta agatur indefinita. In qua si ponatur DF

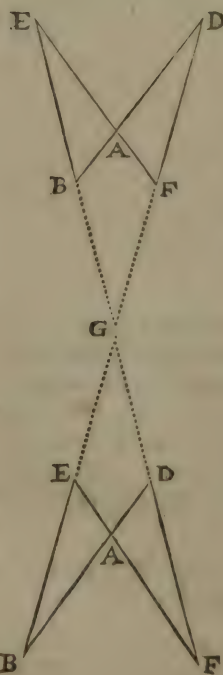
Q₃



DF æqualis DE, & ex F per H ducatur FAf: dico hanc angulum BAC bifariam secare.

Junctâ enim BF, patet, ut supra, \triangle^a BDF & BDA inter duas esse parallelas BD, AF. Sed per præcedens corollarium BD parallela est rectæ, angulum BAC bifariam dividenti. Quocirca recta FAf angulum BAC bifariam secabit. Quod faciendum erat.

LEMMA ad sequentem modum.



BA æquali existente ipsi AF, & AE ipsi AD; at verò EA vel majore vel minore quàm AB, BAD & FAE duabus existentibus rectis lineis, quæ se invicem secant in A: dico EB, FD productas sibi mutuò occurrere.

Cum enim ex hypothesi latera BA, AE, \triangle^a BAE singula æqualia sint lateribus singulis FA, AD, \triangle^a FAD; nec non \angle angulus BAE contentus sub BA, AE æqualis angulo FAD, sub AD, FA contento, erit quoque \angle angulus BEA angulo FDA æqualis.

Si igitur EA quàm AB major est, erit etiam \angle angulus EBA ipsi oppositus major opposito E, hoc est, D. Hinc cum angulus \angle EBA unâ cum angulo sibi deinceps ABG sit æqualis duobus rectis, erunt anguli D & ABG duobus simul rectis minores, ac proinde, rectæ EB, DF inferiùs productæ sibi mutu-

Op 15 Primi Elem. Eucl.
p 4 Primi Elem. Eucl.

q p 18 Primi Elem. Eucl.

r p 13 Primi Elem. Eucl.

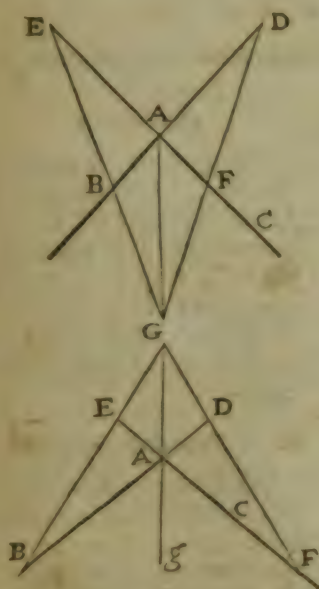
s p 11 axiom.

mutuò occurrent, ubi anguli duobus simul rectis sunt minores.

Si verò AE minor sit quàm AB, quoniam tunc angulus ipsi oppositus B minor est opposito AEB, hoc est, FDA; & hic quidem cum angulo sibi deinceps ADG æquetur duobus rectis: erunt anguli B & ADG simul sumpti duobus rectis minores, & rectæque EB FD superius productæ coibunt.

¶ p 18 Primi
Elem. Eucl.
¶ p 13 Primi
Elem. Eucl.
x p 11 axioma.

Rursum aliter.



Sumpto in AB ad libitum puncto B, & ad A collocata in AC recta AF æquali AB, producatur CA ad E; ita ut EA sit vel major vel minor quàm AB. Deinde producta BA, in eaque ad punctum A positâ recta AD æquali AE, agantur per puncta E, B, & D, F, rectæ lineæ EBG & DFG, quæ per Lemma præcedens sibi mutuò occurrant in G. Quibus peractis, si per puncta A G recta ducatur linea, secabit ipsa angulum BAC bifariam.

Cùm enim, ut in præcedenti Lemmate, angulus BEA sit æqualis angulo FDA, & ex eadem ratione angulus ABE æqualis angulo AFD, atque in prima figura anguli ABE, ABG, ut & anguli

AFD, AFG & duobus simul æquantur rectis: sequitur, angulis ABE, AFD æquibus existentibus, angulos ABG, AFG æquales esse. Eodem modo in 2^{da} figura cum anguli BEA, AEG, ut & FDA, ADG duobus simul æquantur rectis, & anguli quidem BEA, FDA æquales ostensi sint: erunt quoque AEG, ADG æquales. Hinc cùm in utraque figura BA est æqualis AF, & AD æqualis AE, ideoque tota BD

¶ p 23 Primi
Elem. Eucl.

128 CONSTRUCTIO PROBLEMATVM

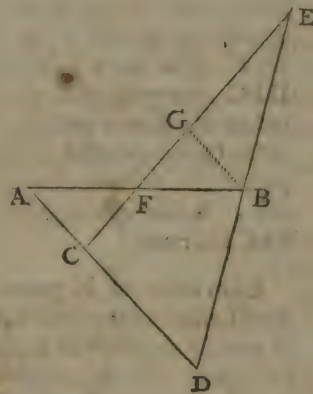
BD æqualis toti EF; ac anguli præterea ABG, ADG \triangle^{li} BDG singuli æquales sint angulis singulis AFG; AEG \triangle^{li} FEG: erit etiam
z p 26 Primi ² latus BG lateri GF æquale: quare cum latera BA, BG \triangle^{li} BAG
Elem. Eucl. singula æqualia sint lateribus singulis AF, FG \triangle^{li} AFG; & tertium
2 p 8 Primi latus AG utrique sit commune, erit ^a quoque angulus BAG angulo
Elem. Eucl. FAG æqualis: ac proinde BAC angulus in 1^{ma} figura à recta AG
b p 13 Primi à duobus auferantur rectis, relinquentur etiam ^b æquales anguli
Elem. Eucl. BAG & FAG. Quod erat faciendum.

PROBLEMA II.

Problema 5 ^{Primi E-} ^{lem. Eucl.} ^{dis.} Datam rectam lineam terminatam AB bifariam se-
 care.

Constructio.

Sumpto extra AB puncto ad libitum C, ^a ductâque ex A per C rectâ indefinitâ ACD, collocetur in ea ^b CD æqualis duplæ AC, & ex D per B recta agatur linea. In qua sumendo ^c BE æqualem BD, jungendoque CE, dico AB bifariam secari in F.



Demonstratio.

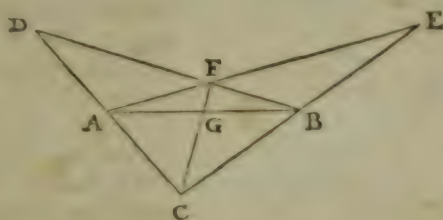
Concipiatur ex B ducta recta BG, parallela AD, occurrens ipsi EC in G: eritque ^d propter similitudinem \triangle^{lorum} CED, GEB, ED ad DC, ut EB ad BG; & permutando ^e ED ad EB, ut DC ad EG. Est autem ED dupla ipsius EB. Quare & DC ipsius BG dupla erit. Hinc cum ^f DC sit quoque ipsius AC dupla, sequitur AC & BG inter se esse æquales. Deinde, quoniam ^g propter similitudinem \triangle^{lorum} ACF & FBG, AC est ad AF, ut GB ad BF, & prima quidem AC tertiæ GB ostensa sit æqualis: erit etiam ^h 2^{da} AF quartæ FB æqualis: Et idcirco AB in F bifariam secta. Quod erat faciendum.

Ali-

Aliter.

Assumpto, ut ante, extra AB puncto aliquo C, ductisque ex eo ^{i p 1 & 2} per A & B rectis CAD, CBE, sumatur ^k AD æqualis AC, & BE æqualis BC. Tum ^l iunctis DB, AE, sese secantibus in F; dico, si ^{k p 3 Petit.} agatur FC, hanc secare AB bifariam in G. ^{l p 1 Petit.}

Cum enim \triangle^{1a} BDC & CEA Angulum ad C commune habent, lateraque circa hunc sint reciproce proportionalia, hoc est, ^{m ut} AC sit ad CB, sicut DC ad CE: erit \triangle^{1a} BDC æquale \triangle^{1a} CEA. A quibus singulis, si auferatur commune trapezium CAFB, relinquetur ^{mp 15 Quin- ti Elem. Eucl. n p 15 Sexti Elem. Eucl.}



\triangle ADF æquale \triangle^{1a} FEB. Est autem \triangle ADF æquale \triangle^{1a} FAC, & \triangle FEB æquale \triangle^{1a} BCF. Quare etiam \triangle FAC \triangle^{1a} CBF æquale erit. Deinde cum \triangle CAF sit ad \triangle FAG, sicut CF ad FG: itemque \triangle CBF ad \triangle FBG, sicut CF ad FG: erit \triangle CAF ad \triangle FAG, sicut \triangle CBF ad \triangle FBG. Quocirca cum \triangle CAF æquale sit ostensum \triangle^{1a} CBF: erit pariter \triangle FAG æquale \triangle^{1a} FBG, ac proinde AG æqualis GB. Quod erat faciendum. ^{o p 38 Primi Elem. Eucl. p p 1 Sexti Elem. Eucl. q p 11 Quin- ti Elem. Eucl. r p 14 Quin- ti Elem. Eucl.}

Adhuc aliter.

Sumpto rursus, ut ante, extra AB puncto C, & ex B per C ducta recta indefinita, sumatur ⁿ in ea CD æqualis CB, jungaturque AD. Deinde ^o in DA assumpta DE æquali DC, ut & EF æquali CB, agantur BE, FC, secantes se invicem in G, tum DGH secans FB in H. ^{s p 1 Sexti Elem. Eucl. t p 1 & 2 Petit. u p 3 Petit. x p 3 Petit.}

Si igitur F punctum cadit in punctum A, incidet etiam linea FB in lineam AB, eritque ipsa in H bifariam secta; nam cum DH per Problema primum angulum FDB secet in duos æquales angulos, lateraque FD, DH \triangle^{1a} FDH lateribus BD, DH \triangle^{1a} BDH circa illos sint æqualia: erit ^z & tertium latus FH tertio lateri HB æquale. ^{z p 4 Primi Elem. Eucl.}

R

Sed

Sed puncto F cadente supra aut infra A, dico, si per puncta C & H agatur porro CH, rectam AB in I ab ea bifariam secari.

a p 38 Primi
Elem. Eucl.

b p 39 Primi
Elem. Eucl.

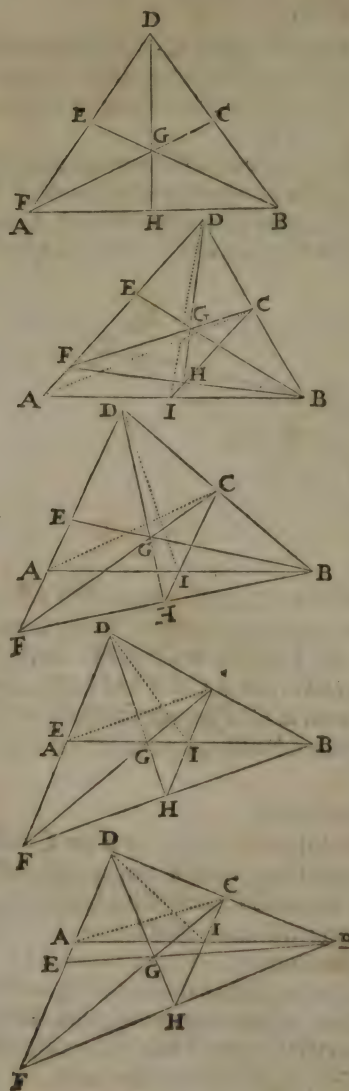
c p 37 Primi
Elem. Eucl.

d p 38 Primi
Elem. Eucl.

e p 1 Sexti
Elem. Eucl.

Ductis enim rectis AC, DI, cum FH sit æqualis HB, erit & ^a $\triangle FCH \triangle^{lo} HCB$ æquale. Ob eandem rationem $\triangle DCH \triangle^{lo} HCB$ æquale erit. Unde porro sequitur $\triangle FCH$ æquale esse $\triangle^{lo} HDC$. Quæ cum super eadem sint constituta basi HC, similiter ^b inter duas consistent parallelas AD, HC. E quibus exinde liquet ^c $\triangle ADI$ esse $\triangle^{lo} ADC$ æquale. Est autem propter æqualia $\triangle^{la} ADC, ACB$ ^d triangulum ADC dimidium totius ADB. Quapropter etiam $\triangle ADI$ totius ADB dimidium erit, ideoque æquale $\triangle^{lo} IDB$. Hæc igitur cum sint ejusdem altitudinis, consistent etiam ^e super æqualibus basibus AI, IB. Quod erat faciendum.

PRO-



PROBLEMA III.

Per datum punctum G rectam lineam ducere, data recta AB parallelam.

Constructio.

Ducta ex C per A ^a recta indefinita, sumatur in ea ^b AD æqualis AC & ex D per B agatur DBE. In qua si ^d ponatur BE æqualis BD jungaturque CE, dico hanc ipsi AB fore parallelam.

Demonstratio.

Quoniam enim ex constructione DA est æqualis AC, & DB æqualis BE, ideoque DA ad AC, ut DB ad BE: sequitur ^e CE ipsi AB esse parallelam.

Problema
10 Primi E-
lem. Eucli-
dis.

^a p 1 & 2 Pe-
tit.

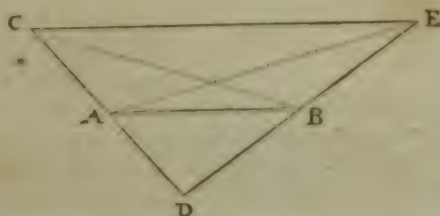
^b p 3 Petit.

^c p 1 & 2

Petit

^d p 3 Petit.

^e p 2 Sexti
Elem. Eucl.



Vel etiam hoc modo.

Junctis CB, AE, patet, ex demonstratione secundi modi præcedentis Problematis, $\triangle BCD$ & $\triangle DAC$ esse æqualia. A quibus singulis si auferatur commune $\triangle DAB$, relinquetur $\triangle CAB$ æquale $\triangle BAE$. Quæ cum ex eadem parte uni basi insistant AB, etiam ^f inter duas constituentur parallelas CE, AB.

f p 39 Primi
Elem. Eucl.

CAB autem ipsi BAE esse æquale, patet quoque ex eo, quod singula & sint æqualia ipsi DAB, ac proinde etiam inter se. Parallela igitur est CE ipsi AB. Id quod facere oportebat.

g p 38 Primi
Elem. Eucl.

LEMMA, ad sequentem modum.

Existente AB æquali BE, sed AD majore aut minore quàm DC: dico CE, BD productas concurrere.

Esto AK æqualis KC, jungaturque KB, quæ ex præcedenti demon-
R 2 mon.

monstratione ipsi CE erit æquidistans. Id quod arguit, BD, CE parallelas non esse, sed productas concurrere.

Quoniam igitur ^h bini anguli DKB, BDK trianguli KDB duobus rectis sunt minores, & angulus quidem DKB ⁱ alterno DCF æqualis sit: at verò BDK ^k æqualis opposito CDF: erunt pariter bini DCF & CDF duobus rectis minores, rectæque EC, BD ^l sursum productæ concurrent.

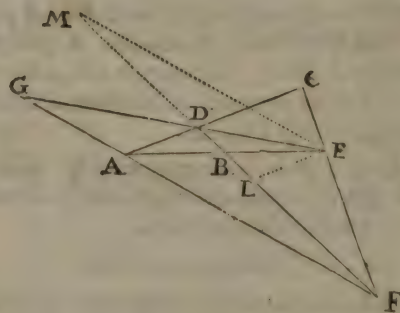
Sit jam AD minor quàm DC, quia igitur rursus ^m bini anguli DKB & BDK trianguli

KDB duobus rectis sunt minores, & externus DKB ⁿ interno & opposito, ad eandemque partem C sit æqualis: erunt etiam bini BDK & C duobus rectis minores, rectæque CE, DB ^o deorsum productæ concurrent, ubi dicti anguli duobus rectis sunt minores.

II LEMMA, ad sequentem modum.

Sit rursus AB æqualis BE, sed AD minor quàm DC, & producantur CE, DB, donec coeant in F: dico similiter DE & AF productas concurrere.

Cum enim ^p externus angulus AEF \triangle ACE major sit interno an-



p p 16 Primi
Elem. Eucl.

& opposito CAE, patet, si ex eo abscindatur angulus BEL æqualis an-

h p 17 Primi
Elem. Eucl.

i p 29 Primi
Elem. Eucl.
k p 15 Primi
Elem. Eucl.
l p 11 axio-
ma.

m p 17 Pri-
mi Elem.
Eucl.

n p 29 Primi
Elem. Eucl.
o p 11 axio-
ma.

angulo CAE, lineam EL secare BF in L, facientem BL æqualem BD.

q p 15 & 26
Primi E-
lem. Eucli-
dis.

Fiat jam BM æqualis BF, jungaturque ME. Quoniam igitur latera MB, BE Δ^u MBE lateribus FB, BA Δ^u ABF singula singulis sunt æqualia, ut & \angle anguli EBM & ABF (qui sub æqualibus lateribus continentur): erit & \angle angulus BEM angulo BAF æqualis. Deinde quia BL minor est quàm BF, siquidem punctum L cadit inter puncta B & F, erit etiam BD minor quàm BM: ac proinde angulus BED minor angulo BEM vel BAF. Est autem angulus FAB, unà cum angulo BAG \angle æqualis duobus rectis. Quare anguli BED & BAG duobus rectis simul minores erunt, lineæque DE, FA sursum productæ sibi mutuo coincident, ubi hi duo anguli duobus rectis sunt minores. Quod erat propositum.

r p 15 Primi
Elem. Eucl.
s p 4 Primi
Elem. Eucl.

r p 13 Primi
Elem. Eucl.
u p 11 axio-
ma.

Sequitur alius modus.

Aliter.

Sumatur in AC, vel postquam fuerit producta versùs C, punctum aliquod ad libitum D, continueturque AB ad E; ita ut BE sit æqualis BA, & per puncta C, E & D, B agantur rectæ CEF & DBF, quæ per Lemma I antecedens coeant in F. Dico jam, si ducantur AF, DE, quæ per Lemma 2^{da} productæ concurrant in G, rectam à puncto C ad G ductam esse ipsi AB parallelam.

Ad quod demonstrandum, concepiatur per punctum D recta HDI parallela rectæ ABE, occurrens ipsis AF, FE, vel postquam fuerint productæ, in punctis H & I: eritque \angle , propter similitudinem Δ^u lorum ABF & HDF, AB ad BF, sicut HD ad DF: ac rursus, propter similitudinem Δ^u lorum BFE & DFI, BF ad BE, sicut DF ad DI, hoc est, ex æquo AB ad BE, sicut HD ad DI. Est autem ex constructione AB æqualis BE. Quare & HD ipsi DI erit æqualis. Deinde quoniam, propter similitudinem Δ^u lorum GHD & GAE, HD est ad DG, sicut AE ad EG, hoc est, permutando HD ad AE, sicut DG ad EG: itemque, propter similitudinem Δ^u lorum CDI & CAE, ID ad DC, sicut EA ad AC, hoc est, permutando DI ad AE, sicut DC ad CA: patet, cum HD, DI sint æquales, DG esse ad GE,

x p 4 Sexti
Elem. Eucl.

y p 12 Quin-
ti Elem.

z p 4 Sexti
Elem. Eucl.

a p 16 Quin-
ti Elem.

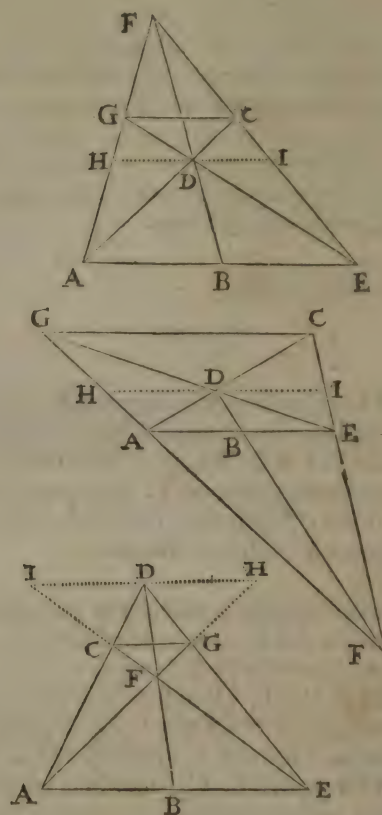
b p 11 Quin-
ti Elem.

c p 11 Quin-
ti Elem.

R 3

GE,

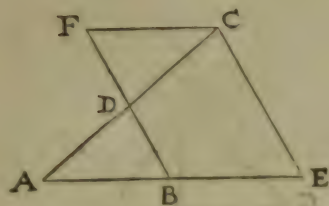
ep 1 Sexti GE, sicut DC ad CA. Sed ut DG ad GE, ita est $\triangle CDG$ ad
 Elem. Eucl. $\triangle GCE$: & DC ad CA, ita idem $\triangle CDG$ ad $\triangle GCA$. Quare d
 dp 9 Quinti $\triangle GCE \triangle GCA$ æquale erit. Quæ cum ab eadem parte uni infi-
 Elem. Eucl.



ep 39 Primi stant basi GC, necessariò \triangle consistent etiam inter duas parallelas.
 Elem. Eucl. Parallela igitur est GC ipsi AB. Quod erat faciendum.

NOTA.

NOTA.



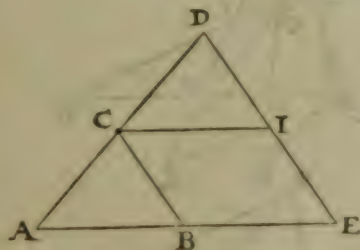
Si contingit AD esse æqualem DC, quoniam tunc, ex demonstratione prioris modi, BD ipsi EC est parallela, atque idcirco productæ nunquam concurrunt: sumenda erit tantummodo DF æqua-

lis DB, jungendaque FC, eritque ipsa ipsi AB parallela.

Cum enim \triangle lorum ADB, FDC anguli qui ad D^f sint æquales, & circa eos latera AD, DB æqualia lateribus DC, DF, singula singulis: erit quoque \angle angulus A æqualis angulo ACF, ac proinde ^h FC parallela AB. Quod erat faciendum.

Elem. Eucl. p. 15 Primi
Elem. Eucl. p. 4 Primi
Elem. Eucl. p. 27 Primi

Aliter.



Ductâ ex A per C rectâ indefinitâ, in eâque collocatâ CD æquali CA, producatûr AB ad E, ita ut BE sit æqualis BA. Tum junctis BC, ED, sumatur in ED recta EI æqualis BC, agaturque CI: dico hanc ipsi AB esse parallelam.

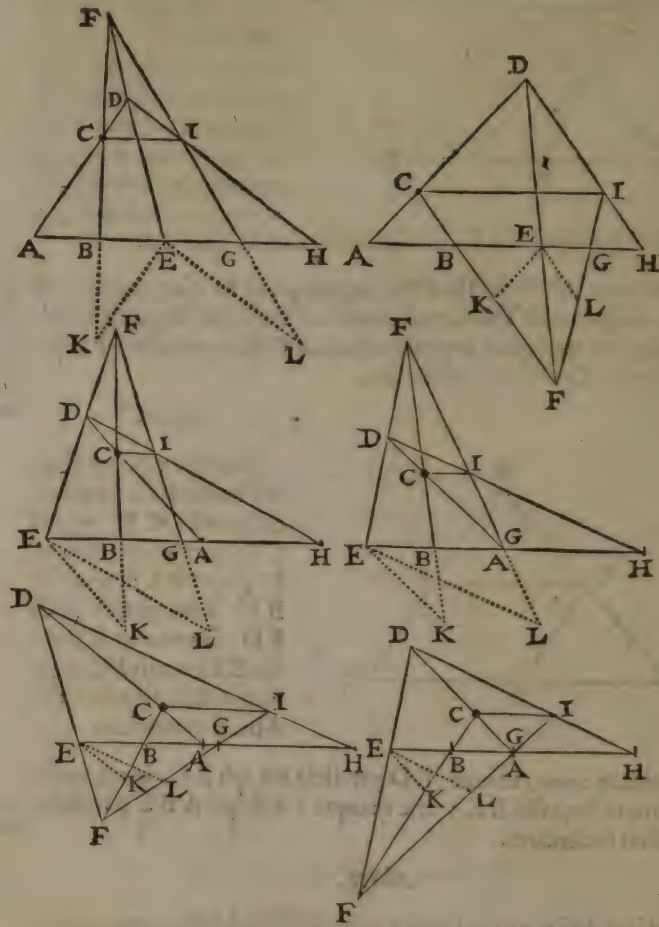
Quoniam enim, ut ante, ED parallela est ipsi BC, atque in illa EI sumpta æqualis BC: erit quoque ¹ CI ipsi ABE parallela. Quod erat faciendum.

Elem. Eucl. p. 33 Primi

Aliter.

Esto jam AC major vel minor quàm CD, sed AB, ut ante, æqualis BE: lineæque BC, ED productæ, per 1^{um} Lemma, convenient in F. Deinde assumpto in AB, ipsâve productâ, ad libitum puncto G, ponatur GH æqualis GE, ac per puncta F & G recta linea agatur, secans

136 CONSTRUCTIO PROBLEMATVM
 fecans rectam D & H connectentem in I : eritque juncta CI ipsi
 ABH parallela.



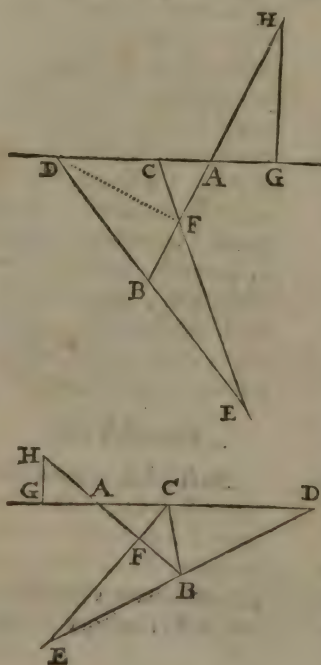
k p 15 Primi
Elem. Encl. Ad quod demonstrandum, fiant BK, GL æquales BC, GI, jungan-
 turque EK, EL. Hinc cum \triangle lorum KBE, ABC^k tam anguli qui ad
 B, quam

138 CONSTRUCTIO PROBLEMATVM

e p 31 Tertii $\angle ADC$ ob id rectus. Dein cum \triangle lorum ADC & CFE *d anguli*
Elem. Eucl. ACD & ECF , ut & latera AC , CD lateribus FC , CE *e* utrumque
d p 15 Primi utrique sint æqualia: erunt quoque *f* ADC & E , à lateribus æquali-
Elem. Eucl. bus subtensi, æquales. Est autem angulus ADC rectus. Quare &
c Ex con- angulus E rectus erit, adeoque EF perpendicularis ad AB . Quod
structione. *f p 4 Primi* erat faciendum.
Elem. Eucl.

Aliter.

Fingatur data recta transire per puncta A & C ; ad hanc igitur ut
 ducamus perpendicularem, sumatur CD æqualis duplæ CA , & ex
 D , ut in 1^{ma} figura, ad libitum agatur DBE , faciendo in illa DB
 æqualem DA ; aut ex C , ut in 2^{da} figura, ducatur utcunque CB , in
 eaque sumendo CB æqualem CA , agatur DBE . Deinde positâ EB
 æquali BD , ducantur EC & BAH sese secantes in F . Si ergo, ut in 1^{ma}
 fig., AH ponatur æqualis AD ; vel, ut in 2^{da} fig., AH æqualis AC , ac
 deinde AG fiat æqualis AF , erit junctâ GH ipsi AC perpendicularis.



p p 8 Primi
Elem. Eucl.

h p 8 def.
Primi E-
lem. Eucl.
i p 15 Primi
Elem. Eucl.

k p 4 Primi
Elem. Eucl.

Ad quod demonstrandum,
 ducatur in 1^{ma} figura recta DF .

Quoniam itaque recta BA , in
 utraque figura, à recta EC , haud
 secus ac in primo modo 2^{di} Pro-
 blematis ostensum fuit, bifariam
 dividitur in F , atque in prima
 figura BD ex constructione ipsi
 DA sit æqualis, & DF utrique
 \triangle lo BDF & FDA communis:
 erit quoque \angle angulus DFD an-
 gulo DFA æqualis, ac proinde
 uterque *h* rectus. Eâdem ratione
 recti erunt anguli BFC & CFA
 in 2^{da} figura. Quare cum in 1^{ma}
 figura \triangle lorum DAF & HAG *i* an-
 guli qui ad A , ut &, quæ ipsos cîn-
 gunt, latera sint sibi invicem æ-
 qualia: erunt quoque anguli *k*
 DFA & G æquales. Est autem
 angulus DFA , ex demonstratis,
 rectus. Quapropter & angulus
 G re-

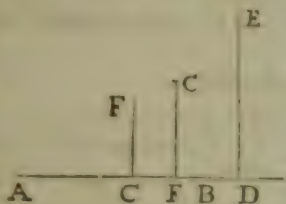
Rectus erit, ac idcirco GH perpendicularis ad AC. Eodem argumento concludetur, angulum G in 2^{da} figura recto angulo CFA esse æqualem; ideoque GH, ut ante, ipsi AC perpendicularem. Quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ AB, à puncto in ea vel extra ipsam dato C, rectam lineam ducere CF, quæ ad datam AB sit perpendicularis.

Problema
VI & VII
Primi E-
lem. Eucli-
dis.

Constructio.



Ductâ, ut in præcedenti Problemate, super AB utcumque perpendiculari DE, agatur ex C per tertium Problema eisdem parallela CF: eritque hæc ipsa quæsitâ.

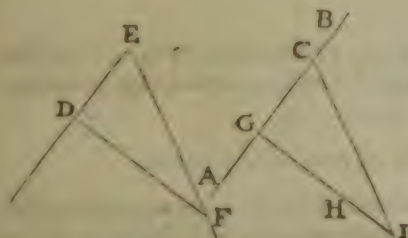
Cujus demonstratio ex 29 Primi Elementorum Euclidis est manifesta.

PROBLEMA VI.

Ad datam lineam rectam AB, datumque in ea punctum C, angulum rectilineum constituere ACI, dato angulo rectilineo E æqualem.

Problema
IX Primi E-
lem. Eucli-
dis.

Constructio.



Constitutâ super DE, per 4^{um} Problema, perpendiculari DF, occurrente ipsi EF in F, ponatur ad punctum C in AB æ recta CG ipsi ED æqualis, & ex G excitetur super AB, per antecedens Problema, perpendicularis GH: dico, si in ea sumatur

140 CONSTRUCTIO PROBLEMATVM

h₃ Petis. matur ^b GI æqualis DF, jungaturque CI, angulum ACI angulo E esse æqualem.

Demonstratio.

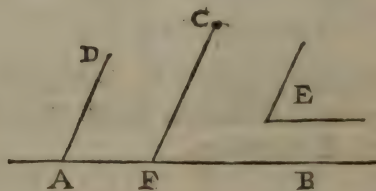
Ex constructione. Quoniam enim \triangle lorum DEF, GCI anguli qui ad D & G ^c recti sunt, ac idcirco æquales; & latera ED, DF lateribus CG, GI, quæ circa æquales sunt angulos, singula singulis sunt æqualia: erunt etiam ^{d p 4 Primi} anguli GCI & E ^d æquales. Quod facere oportebat.
Elem. Eucl.

PROBLEMA VII.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ AB, à puncto extra ipsam dato C rectam lineam ducere CF, quæ cum data AB angulum rectilineum faciat CFB, dato angulo rectilineo E æqualem.

Constructio.

Ad punctum quodcunque A in AB constituto, juxta præcedens Problema, angulo DAB æquali dato E, ductâque ex C per 3^{ium} Problema rectâ CF parallelâ rectæ AD: dico angulum CFB angulo E

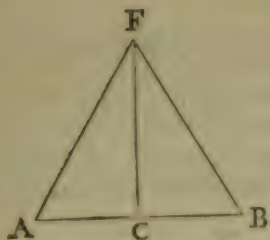


esse æqualem. Demonstratio ex constructione & ex 29 Primi Elementorum Euclidis elucescit. A dato ergo extra datam indefinitam puncto &c. Quod faciendum erat.

LEMMA, ad Problema sequens.

Triangulorum æquilaterorum AFB quadratum, quod à perpendiculari FC describitur, quadrati utriusque basis segmenti AC vel CB triplum est.

Quod



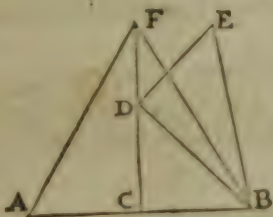
Quod enim AC & CB sint æqualia, hinc patet, quod \square^{1a} ex AF & FB æqualia sint; & \square^{um} quidem ex AF æqualeat^a duobus ex AC & CF, & \square^{um} ex FB duobus ex BC & CF. Unde commune utrinque auferendo \square^{um} ex CF, relinquitur \square^{um} ex AC æquale ei quod ex CB; ac proinde AC æquale CB. Jam verò \square^{um} ex AB vel AF est \square^{1a} ex AC quadruplum.

Quocirca qualium partium \square^{um} ex AC est 1; talium \square^{um} ex AF erit 4; & \square^{um} ex CF partium 3, hoc est, \square^{um} ex CF triplum erit \square^{1a} AC vel CB. Quod erat propositum. Ubi etiam facile est ostendere, si in \triangle^{1o} AFB quadratum perpendicularis CF quadrati utriusque basis segmenti AC vel CB est triplum, \triangle^{um} illud esse æquilaterum. Etenim \square^{1o} ex AC vel CB valente 1, cum sic \square^{um} ex CF valeat 3, ideoque \square^{um} ex AF vel FB 4; atque tantundem etiam valeat \square^{um} ex AB, erunt tria \square^{1a} ex AF, FB, & AB inter se æqualia, adeoque etiam eorum latera AF, FB, & AB, ac ea propter \triangle^{1o} AFB æquilaterum. Ut proponebatur.

PROBLEMA VIII.

Super data recta linea terminata AB triangulum æquilaterum constituere.

Constructio.



DC, jungaturque EB. Dico si sumatur CF æqualis BE, aganturque AF, FB, \triangle^{um} AFB esse æquilaterum.

S 3

De-

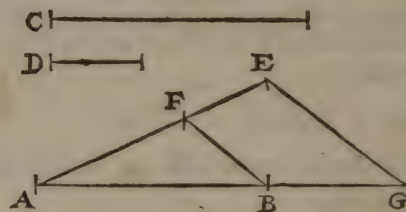
Demonstratio.

Quoniam enim rectæ CD, CB ex constructione sunt æquales, & CD ad AB perpendicularis, erit^b \square^{um} ex DB duplum \square^{is} ex DC vel CB. Eodem modo, quoniam \square^{um} ex BE est æquale \square^{is} ex BD, DE, atque \square^{um} quidem ex BD duplum sit \square^{is} ex CB, at \square^{um} ex DE æquale \square^{is} ex DC vel CB, erit \square^{um} ex BE, hoc est, CF, \square^{is} ex AC vel CB triplum: ac idcirco $\triangle AFB$ per præmissum Lemma æquilatrum. Quod erat faciendum.

b p 47 pr.
lib. 1. Eucl.
vel per 4 pr.
tractatus
primi.

PROBLEMA IX.

Datam rectam lineam terminatam AB producere ad G, ita ut tota AG ad productam GB datam habeat rationem C ad D.

Constructio.

a p 3 Petit.

Ductâ ex A rectâ AE, faciente cum AB angulum quemcunque, ponatur^a in ea AE æqualis C, ut & EF æqualis D; junctâque FB: dico, si eidem agatur parallela EG, occur-

rens productæ AB in G, AG esse ad GB, ut AE ad EF, hoc est, C ad D.

Demonstratio.

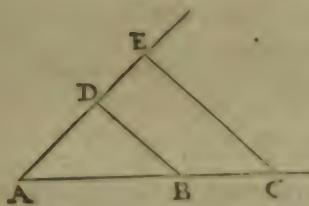
Per 2^{dam} Sexti Elem. Eucl. AB est ad BG, sicut AF ad FE; & b p 9 Quinti componendo^b AG ad GB sicut AE ad EF, hoc est, C ad D. Ut fa- Elem. Eucl. ciendum proponebatur.

PROBLEMA X.

Problemata Tribus datis rectis lineis terminatis AB, BC, & AD quartam proportionalem adinvenire DE: hoc est, ut AB sit ad BC, sicut AD ad DE.

Problemata
iv Sexti E-
lem. Eucli-
dis.

Pro-



Problema hoc juxta modum
Euclidis constitui potest, ponen-
do nempe duas priores AB, BC
in aliqua recta AC, & tertiam
AD in quacunque alia AE, quæ
cum AC quemvis faciat angu-
lum CAE. Si enim ducatur BD,
tum ipsi parallela CE: erit DE
quarta quæsitæ.

Ubi hoc solum notandum, ut omnia rectis lineis perficiantur, quod
CE duci debeat ipsi BD parallela juxta 3^{ium} nostrum Problema, non
autem juxta 10^{um} Problema lib. 1. Elem. Euclidis. Quemadmodum
etiam non aliter dissentimus ab Euclide in 3^{io} Problemate Sexti E-
lem. ubi docet: *Ad datas duas rectas lineas terminatas tertiam proportio-*
nalem invenire, ut & in primo: Ad imperatam aut imperatas partes & data
recta terminata auferendas; sicut etiam in secundo. Ad datam rectam
terminatam datâ ratione similiterve secandam, ut data altera terminata
secta fuerit.

Probl. 111
Sexti Elem.
Eucl.
Probl. 1
Sexti Elem.
Eucl.
Probl. 12
Sexti Elem.
Eucl.

Eodem modo per solas rectas lineas solvere licet 11, 12, 13 & 14
Problemata lib. 1^{mi}; 1^{um} lib. 2^{di}; 1, 4 & 6^{um} lib. 3^{ci}; 2, 3, 6, 7, &
15^{um} lib. 4^{ti}; & 6^{um} & 10^{um} lib. 6^{ti} Elem. Euclidis. Id quod patet,
considerando illa, vel per unum, vel per plura jam soluta Problemata,
semper esse solubilia, & quod in his ipsis construendis sit sequenda
tantum methodus jam ostensa.

Quare cum omnia Geometrica Problemata simplicia semper ali-
qua horum existant, vel ad hæc mediante æquatione reduci possint,
de solutione illorum satis superque dictum existimamus.

S V P.

SUPPLEMENTVM CONSTRUCTIONIS SIMPLICIVM PROBLEMATVM,
 continens expositionem eorum, quæ, ad ipsa in campo con-
 struenda, tanquam obvia requiruntur; atque in septem
 fermè sequentibus consistunt Propositionibus.

I PROPOSITIO.

Datam rectam lineam terminatam in campo in conti-
 nuum & directum ab utraque parte producere.

Recta linea in campo communiter dari solet terminata per sola
 ejus extrema puncta, quæ in praxi Geodætica designantur baculis re-
 ctis seu paxillis ad plumbum in terram defixis, inter quæ puncta
 tum porro recta illa linea mente ducta concipitur. Quæ quidem
 lineæ aliàs, cum limites agrorum, fossas, propugnacula, valla, simi-
 liave designare debent, indicari solent per tenues sulcos, terræ levi-
 ter impressos, quos Belgæ vulgariter *kielspitten* appellant.

C A B D Posito itaque datam rectam AB in campo
 designari per duos baculos rectos in A & B
 perpendiculariter in terram defixos: ut ipsa hinc inde in continuum
 producat, prodire oportet extra eam ad C & D, ita ut, existente in C,
 si dirigatur visus versus baculos in A & B, hi ipsi inter se congruere vi-
 deantur, hoc est, in eodem visus radio appareant; at verò existente in
 D, convertendo oculos ad A & B, ut eidem rursus in eodem radio vi-
 suali seu sibi ipsis respondere conspiciantur. Quod si fieri supponatur
 & baculi duo ad plumbum in C & D defigantur, linea AB ad utram-
 que partem erit producta ad C & D. Eodem modo, progrediendo
 semper ulterius atque ulterius, licet AB ad utramque partem in con-
 tinuum & directum in campo producere.

E quibus etiam fit manifestum, in campo rectam dari positione
 seu utrinque indefinitam, datis tantummodo utcumque duobus pun-
 ctis, per quæ recta illa incedere seu tendere intelligatur, supplendo
 cogitatione ipsam hinc inde indefinitè prædicto modo in directum
 esse protensam.

II PRO-

II PROPOSITIO.

A dato puncto A ad datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

C A D B Problema hoc per præcedens absolvi-
tur. Etenim si primo linea AB, quam
inter data puncta A & B concipimus, ad unam aut alteram partem
producamus, ut hic ad C; tumque ab A ad B cum baculo aliquo D
progrediamur, ita ut respiciendo baculi in A & C continuè sibi ipsis
respondere videantur: ducta intelligetur ab A ad B recta linea; hoc
est, translatio baculi D ab uno loco A ad alterum B, linea quæ sita
ductum designabit.

Quod & alio modo præstare licet, per inventionem plurium pun-
ctorum, non producendo rectam AB, ope nimirum alicujus loci.
Etenim manente uno penes alterutrum baculorum A vel B, puta A,
injunget alteri, ut alibi locorum inter A & B in eodem radio visuali
baculum rectum erigat D, hoc est, ut baculus D in A congruere vi-
deatur cum baculo B, seu D impediatur quo minus B ex A conspici
possit. Quod ut fiat, is, qui ad A est, manu vel pileo signum dabit ad
dextram vel sinistram (prout ad hanc vel illam partem baculus est
constituendus) donec illum in eodem radio, neque amplius deflecten-
tem, deprehenderit. Dein signum manu vel pileo dabit deorsum,
significans baculum D in terram perpendiculariter esse figendum. De
istis enim sociis ante inter se convenire oportet.

Eodem modo innuenera puncta inter A & B in campo reperiri
possunt. Atque hæc ratione licet prodeundo ab A ad B cum baculo
recto D ab uno dato puncto A ad alterum datum punctum B rectam
lineam in campo ducere.

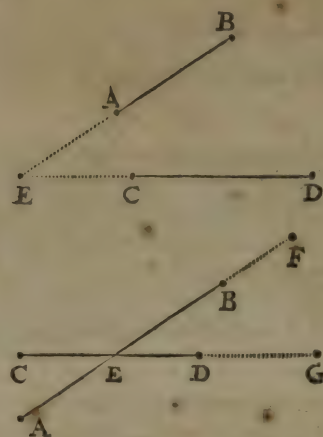
III PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis non paralle-
lis, ipsarum concursus seu intersectionis punctum inve-
nire.

Esto data inter A & B puncta recta AB, non parallela rectæ CD,
data inter puncta C & D.

T

Si



Sic ergo AB, CD ad se invicem inclinent ad partes A & C, & quaratur punctum E, in quo sibi mutuò productæ occurrant, producenda est AB, juxta 1^{am} Prop., versùs A, hoc est, exire oportet ab A in directum ipsius AB cum baculo recto usque dum perventum sit in directum ipsius CD, hoc est, eò loci, quò baculi in C, & D sibi mutuò respondere videantur. Quod si fieri contingat in E, ibique perpendiculariter baculus humi defigatur, is quæsitum in campo concursus punctum ostendet.

Sed AB secante CD, oportebit, productis primùm AB, CD, juxta 1^{am} Prop., ad unam aut alteram partem ad F & G, invenire, ut jam dictum est, rectarum BF, DG punctum concursus E. Erecto enim in E baculo recto monstrabit is similiter punctum, in quo rectæ AB, CD in campo sese mutuò interfecant. Ut requirebatur.

Quemadmodum autem aliquis producendo utramque rectam AB, CD ad F & G, sine alterius ope, punctum intersectionis E investigare potest, ita quoque licet continuando tantùm alterutram, puta AB, ad F, idem auxilio secundi invenire, hoc modo:

Etenim exeunte uno cum baculo aliquo à B versùs A in directum ipsius BF, donec ab altero ad D, sicut præcedenti Propositione fuit explicatum, sit certior factus se pervenisse in rectam DC, quod contingere suppono in E: ostendet rursus baculus in E erectus perpendicularis punctum intersectionis quæsitum.

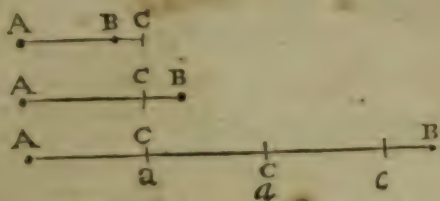
Quod idem etiam neutram producendo rectam obtineri potest, si tres sint. Si enim consistente primo ad A, secundus exeat cum baculo ab A versùs B in recta AB, donec pervenerit in rectam CD, quod ex tertio, qui consistit ad D, uti supra dictum fuit, rescire potest, ibique baculum erigat perpendicularem; inventum erit rursus in campo quæsitum punctum intersectionis E.

IV PRO-

IV PROPOSITIO.

De modo capiendi longitudinem datæ rectæ lineæ terminatæ in campo.

Esto in campo data recta intercepta inter puncta A & B, cuius longitudinem ut exploremus, eligendus erit baculus perlongus seu pertica AC; aut ejus loco catena ferrea vel cuprea longitudinis cujuslibet, quæ vice funis vel restis, quæ expansioni aut contractioni nimis



est obnoxia, fungatur. Hæc enim si applicetur ad puncta A & B, ita ut una ejus extremitas conveniat cum medio unius baculi A, indicabit medietas alterius baculi B in ea longitudinem datæ rectæ AB. Quod si verò pertica hæc aut catena AC minor fuerit rectæ AB, oportebit adnotâ illâ cum una sua extremitate ad punctum A eandem cum altera sua extremitate extendere versùs B, totiesque in recta AB huc progrediendo deferre, donec cum hac ipsa perventum fuerit ad B vel C, ubi reliqua longitudo CB brevior sit reperta quàm AC. In quem finem si alter cum extremo catenæ aut perticæ AC præcedens singulis vicibus bacillum humi defigat, qui ab insequente altero colligatur, denotabit AC toties sumpta, quoties bacillus fuerit collectus, unâ cum parte reliqua BC, totius rectæ AB longitudinem quæsitam.

Ubi notandum, in delatione ipsius AC in recta AB, advertendum esse, quod in 2^a Propositione fuit expositum: item quod quis solus ope perticæ datæ rectæ longitudinem in campo investigare queat, ubi, si catenâ id præstare velit, socium habere oportet. Denique, ad dictam longitudinem AB illic capiendam, haudquaquam opus esse,

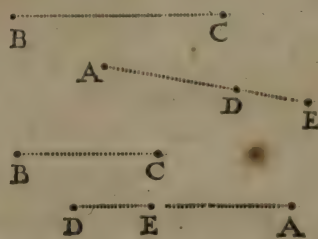
T 2

ut

ut attendamus, quot virgæ, pedes, pollices, aliæve partes contineantur in AC, sive etiam CB, cum nihil referat ipsam AC per hujus aut illius mensuræ numeros exprimere, verum suffecerit data AB magnitudinem, catenæ aut perticæ beneficio, non aliter quàm in charta rectæ alicujus magnitudo, seu inter data puncta intercapedo, circino, qualis reipsa existit, accipi solet, comprehendisse atque indagasse.

V PROPOSITIO.

Ad datum punctum A in data recta indefinita AD rectam lineam in campo collocare AE, datæ rectæ terminatæ BC æqualem.



Exploratâ perticæ aut catenæ beneficio, ut in antecedenti propositione, longitudine rectæ BC, collocetur ea ab A versus D in recta AD, observando ad id, quæ in 1^{ma} & 2^{da} Prop^{bus} sunt exposita. Hæc igitur si perungere supponatur usque ad E, erit AE æqualis BC.

Etenim, quoniam, quæ eidem æqualia sunt, etiam inter se æqualia existunt, illa autem æqualia dicantur, quæ in omnibus sibi mutuo congruunt: sequitur, si BC & AE singulæ longitudini æquales sunt, quæ perticâ aut catenâ comprehenditur, esse quoque AE ipsi BC æqualem. Ut requirebatur.

His adjuuge binas sequentes Propositiones, ejusdem naturæ cum præcedente.

VI PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis AB & C, alterutri AB rectam lineam in directum adjungere BD, æqualem alteri C.

Quo-

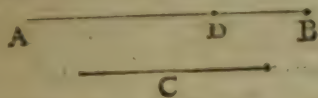
Quoniam hoc fieri potest producendo rectam AB versus A vel B, supponamus id fieri debere ex parte B; hinc producta AB per 1^{ma} m



Prop. usque ad D, ita ut BD per antecedentem Prop. sit æqualis ipsi C, erit AD ipsarum AB & C summa quæsita.

VII PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis inæqualibus AB & C, de maiore AB rectam lineam detrahere AD, æqualem minori C.



Quandoquidem hoc similiter fieri potest ad partem alterutram A vel B; supponamus id faciendum esse ad partem A. Quocirca collocata ad punctum A in recta AB per 5^{ta} m

Prop. recta AD æquali ipsi C, erit C ex AB subducta, ac relinquetur DB. Quemadmodum requirebatur.

Et tantum de Problematum Simplicium exegesi, cui breviter subiungemus constructionem Planorum Problematum, hoc est, ad quorum solutionem circuli porro descriptione est opus, explicantes simul modum, quo ipsa in campo expedire licet.

DE CONSTRUCTIONE PLANORVM PROBLEMATVM GEOMETRICORVM, seu, quæ, ductis rectis lineis, descriptisque circulorum circumferentiis, solvi possunt.

POSTULATVM.

Postuletur: ut è dato puncto ceu centro in dato intervallo circumulum describere liceat.

Explicatis iis, quæ ad Simplicium Geometriæ Problematum constructionem pertinent, atque eorum concernunt praxin in campo: congruum videtur, ut deinceps hîc exponamus Planorum Geometricorum Problematum constructionem, tradendo similiter simul ea, quæ, ad ipsam in campo expediendam, cognitu sunt necessaria. Quare cum Simplicia Problemata, ut ex præcedentibus constat, absque ullo instrumento perfici queant, nisi quis perticam aut baculos, quibus ad eorum praxin usi sumus, pro talibus habere velit: ita hæc è contra, præter illa, quæ ad Simplicium constructionem opus sunt, sine instrumento ad id requisito in campo absolvi nequeunt. Etenim quemadmodum simplicia Problemata per solas rectas lineas, Plana verò descriptis insuper circulis solvuntur; atque in campo rectarum quidem linearum occurfus sive interfectio reperiri possit solis radiis visualibus, absque ullius instrumenti præsidio: ita ex aduerso fit, ut rectæ lineæ & circuli, veletiam duorum circulorum occurfus sive interfectio in campo sine eo non inveniatur. In quem



igitur finem apud Geodætas in usu est instrumentum æneum rotundum, Astrolabium dictum Geometricum, divisum in 360 partes æquales, quas vocant gradus; quorum singuli rursus mente in 60 alias minores seu minuta subdividi concipiuntur. Sed quoniam omnem cognitionem ex præcedentibus constare oportet, & antequam ad Planorum Problematum constructionem accedatur scire decet, quo pacto circulus Geometricè in dictos gradus & minuta sit dividendus; quod quidem difficilius quàm ipsa Planorum Problematum solutio est habendum, cum ad id scientificè perficiendum constructio Solidorum & Linearum Problematum nota requiratur: idcirco non convenit juxta artis naturam, ejusmodi instrumentum ad

ad planorum in campo constructionem adhibere, sed de simpliciore cogitandum est. Unde cum quarendo illud reperissem, ad id simplicius magis proprium excogitari non potuisse, quam Crux vulgaris Metatoria, qualis hic depicta cernitur, quatuor constans fixis & immobilibus pinnacidiis seu pinnulis, æquali distantia à se invicem remotis, quatuorque constituentibus angulos rectos: Illam ergo, postquam superius ostendimus, quâ ratione rectus angulus constituatur, sine difficultate ulla ad Planorum Problematum solutionem in campo admittendam esse censuimus, ideoque usum ejus in sequentibus Problematis enucleandum.

I P R O B L E M A.

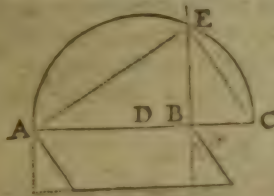
Datis duabus rectis lineis, mediam inter eas invenire proportionalem: Problema 5
Sexti Elem.
Euclidis.

vel,

Datum parallelogrammum in quadratum transformare.

Invenienda sit inter AB & BC media proportionalis: vel esto AB longitudo, & BC latitudo parallelogrammi, quod in quadratum sit convertendum.

Constructio.



Constitutis AB, BC in una linea recta AC, dividatur ^a hæc bifariam a p 2 Probl. in D, & ex D intervallo AD vel pag. 129. DC, per Postulatum præcedens, describatur super AC semicirculus AEC. Tum ex B erecta super AC ^b perpendiculari BE, occurrente ^{b p 5 Probl. pag. 129.} peripheriæ in E, erit BE media proportionalis inter AB & BC, vel

etiam \square^{um} ex BE æquale erit parallelogrammo longitudinis AB, & latitudinis BC.

Cujus demonstrationem manifestam reddunt prop. 13^{ta} lib. 6, ut & prop. 14 lib. 2^{da} Elem. Euclidis.

Ut autem per allatam Cruxem Metatoriam in campo inveniatur locus

c p 31 Terti
Elem. Eucl.

cus E , in quo perpendicularis BE circumferentiæ AEC occurrit: notandum est, angulum AEC , contentum sub rectis AE , EC esse rectum, ac proinde si, deambulantes in recta BE cum cruce, experiamur, conspiciendo punctum unum A per duas oppositas pinnulas, punctum alterum C tunc simul etiam conspici posse per duas reliquas oppositas, designabit punctum E , ubi hoc continget, cum tam in recta BE , quam in circumferentia AEC existat, locum ante dictum quæsitum.

Idcirco, ut progrediendo in BE innotescat, num eum ita quærendo ulterius à B recedere oporteat, an verò propius ad B accedere: sciendum est, rectas omnes, ductas ex aliquo puncto in BE , sumpto inter B & E , ad puncta A & C , obtusos semper angulos efficere; at verò illas omnes, quæ ducuntur ex quolibet puncto in producta BE extra E ad A & C puncta, acutos semper constituere angulos. Quocirca si, conspiciendo punctum A per oppositas duas pinnulas, punctum C appareat extra radium duarum aliarum oppositarum ad sinistram, perspicuum est ulterius in BE à B versus E esse recedendum; sin autem C extra hunc radium ad dextram apparuerit, tum in eadem recta propius accedendum esse ad B , donec simul utrumque punctum per crenas oppositarum pinnularum conspici possit. Id quod eodem modo in sequentibus Problematibus intelligi debet.

NOTA.

Haud dissimili ratione licet figuram rectilineam quamcunque in quadratum commutare. Si enim, juxta 13 Problema libri 1^{mi} Elem. Euclidis, datæ figuræ fiat parallelogrammum æquale, illudque, ut modò ostensum fuit, in quadratum transformetur: habebitur quæsitum.

II PROBLEMA.

Trianguli rectanguli datâ Hypotenusâ, & uno circa rectum angulum latere: invenire latus alterum circa rectum:

Vel,

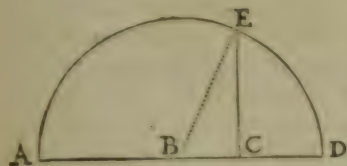
Duobus datis inæqualibus quadratis, invenire tertium, æquale differentiæ datorum.

Esto

PLANORVM GEOMETRICORVM. 153

Esto AB hypotenusa, & BC unum latus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus latus alterum circa rectum est invenien- dum; vel sunt AB, BC latera duorum inaequalium quadratorum, AB quidem majoris, BC autem minoris, & oporteat invenire tertium quadratum aequale differentiae datorum.

Constructio.



Constitutis AB, BC in dire- ctum, producat AC versus C, & ex B intervallo AB^a descri- batur semicirculus AED. Tum ex C ducta CE ipsi AD^b per- pendiculari, occurrente circum- ferentiae in E: dico ipsam esse la- tus alterum trianguli quaesitum; vel etiam si super CE describatur quadratum, hoc ipsum esse differentiam quadratorum ex AB & BC.

a p. antea- dens Postu- latum
b p. 5. Probl.
pag. 139.

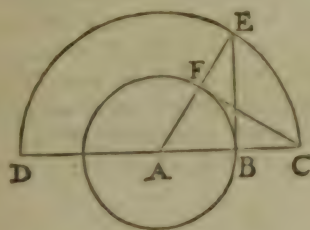
Demonstratio.

Juncta BE, quoniam $\triangle BEC$ est rectangulum, & data BC unum latus circa angulum rectum, & hypotenusa BE^d aequalis datae AB: patet CE esse latus alterum circa rectum.

Porro cum \square^{um} ex BE sit aequale duobus \square^{is} ex BC & CE: constat, si \square^{um} ex BC a \square^{o} ex BE auferatur, differentiam esse \square^{um} ex CE. Quare si \triangle^{1} rectanguli &c. Quod erat faciendum.

c p. Constru- tionem.
d p. 15 Def.
Primi Elem.
Eucl.
c p. 47 Primi
Elem. Eucl.
vel p. 4 prop.
2. part. 1.
tractatus.

NOTA.



Ejusdem naturae videtur Pro- blema 2^{um} lib. 3 Elem. Eucli- dis, nempe: Ex dato puncto C re- ctam lineam ducere CF, qua tan- gat datum circulum FB. Quod ut fiat, ducatur ex C per A recta li- nea, & ex A intervallo AC de- scribatur semicirculus CED. Deinde^f ex B ducta BE perpen- diculari ad DC, occurrente circumferentiae in E, jungatur AE, secans circumferentiam circuli FB in F, ac denique CF, quae circulum FB

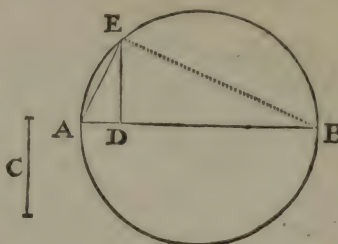
f p. 5. Proble- ma pag. 139.
tan-

tanget in F. Huc referendum quoque videtur Problema 1^{um} lib. 4. Elem. Euclidis: In dato circulo (cujus diameter A B) rectam lineam collocare A E, æqualem data rectæ lineæ C; quæ ipsâ A B non sit major. Idem namque hoc est, ac si ex uno dato latere circa rectum angulum & hypotenusâ trianguli rectanguli quæratür latus alterum circa rectum.

§ 23 Probl.
Sexti Elem.
Eucl.

h p 5 Probl.
pag. 139.

i p 31 Tertii
Elem. Eucl.
Coroll. 8^{va}
Sexti Elem.
Eucl.



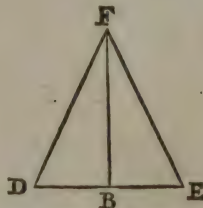
Si enim §, ut pag. 143 dictum est, ad A B & C inveniatur tertia proportionalis A D, hoc est, ut A B sit ad C, sicut C ad A D; & ex D^h ad A B erigatur perpendicularis D E, occurrens circumferentiæ in E, ducaturque A E: dico A E æqualem esse ipsi C. Ad quod demonstrandum, si jungatur E B, erit ⁱ A B ad A E, sicut A E ad A D. Quare cum per constructionem A B sit ad C, sicut C ad A D, sequitur A E ipsi C esse æqualem.

LEMMA, ad sequens Problema.

I.

Esto D F E triangulum isosceles, æqualia habens latera D F, F E: dico, si ex F ad latus tertium D E demittatur perpendicularis F B, segmenta D B & B E similiter esse æqualia.

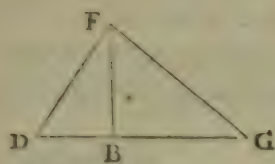
k p 47 Pri-
mi Elem.
Eucl. vel 4
Prop. 2. par-
tis I. tracta-
tus.



Quoniam enim D F æqualis ponitur ipsi F E, erit & \square^{um} ex D F æquale \square^{to} ex F E. Jam verò \square^{k} ex D F æquale est duobus \square^{is} ex D B & B F; at \square^{is} ex F E æquale duobus \square^{is} ex E B & B F. Æqualia igitur sunt bina \square^{ta} ex D B & B F binis \square^{is} ex E B & B F. Unde dempto utrobique communi \square^{to} ex B F, remanebit \square^{um} ex D B æquale \square^{to} ex B E; ac proinde D B æqualis B E. Quod erat propositum.

II. Esto

II.



Esto triangulum DFG, in-
aqualia habens latera DF, FG,
quorum DF sit minus quam
FG. Dico, si ex F ad latus ter-
tium DG demittatur rursus
perpendicularis FB, segmenta
DB & BG similiter fore inae-

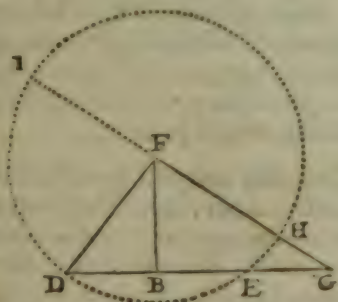
qualia, ac DB minus quam BG.

Cum enim DF minor sit quam FG, erit quoque \square^{um} ex DF mi-
nus \square^{to} ex FG. Jam verò \square^{um} ex DF est æquale duobus \square^{is} ex DB & BF, & \square^{um} ex FG æquale duobus \square^{is} ex GB & BF simul
sumptis: ac proinde, si utrinque commune tollatur \square^{um} ex BF, re-
linquetur \square^{um} ex DB minus \square^{to} ex BG, & consequenter DB minor
quam BG. Quomodo proponebatur.

lg 47 Primi
Elem. Eucl.
vel per 4
Prop. 2. par-
tis 1. traſta-
tus.

III.

Si trianguli scaleni DFG majus latus DG assumatur pro basi, &
ad id ex opposito angulo F ducatur perpendicularis FB: erit, ut bāis
DG ad summam duorum reliquorum laterum DF, FG, ita eorun-
dem laterum DF, FG differentia ad differentiam, quæ est inter DG
& duplum minoris segmenti DB.



Descripto ex F in-
tervallo FD circulo DE
HI, secante DG in E,
& FG in H, producat
FG ad circumferentiam
in I: eritque IG summa,
& HG differentia, late-
rum DF, FG; at EG
differentia, quæ est inter
DG basin & DE du-
plum minoris segmenti
DB. Quibus ita po-
sitis, dico DG esse ad
IG, sicut HG ad EG.

lg 47 Primi
Elem. Eucl.

V 2

Quo.

n p corol.
36^{ta} Tertii
Elem. Eucl.
o p 16 Sexti
Elem. Eucl.

Quoniam enim ⁿ rectangulum DGE æquale est rectangulo IGH, sequitur o DG esse ad IG, sicut H G ad EG. Quod erat propositum.

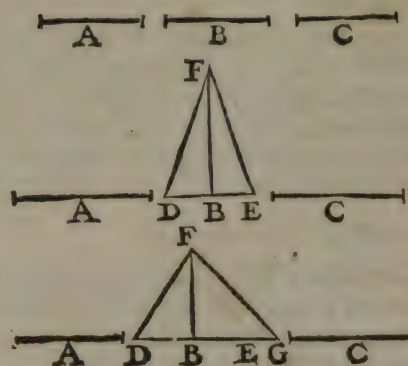
III PROBLEMA.

Ex tribus datis rectis lineis terminatis A, B, & C, quarum duæ simul, quomodocunque sumptæ, tertiâ sunt majores, triangulum constituere.

Constructio.

Primò igitur, si tres hæ rectæ A, B, & C inter se æquales fuerint, sequitur, triangulum, quod ex ipsis constitui debet, fore æquilaterum. Cujus ergo constructio, sicut Problemate 8. pag. 141 à nobis ostensum fuit, perfici potest.

At verò duabus tantum æqualibus existentibus, ut A & C, manifestum est \triangle l^{um} quæstam f re isosceles. Quo casu perpen-



dicularis, quæ ex angulo opposito cadit in tertium latus, juxta 1^{um} Lemma, illud bifariam secabit. Adeò ut, si recta DE vel B sumatur pro basi, eaquæ ^a in B bifariam secetur, DB vel BE futura sit unum ex lateribus circa rectum, & linea A vel C hypotenusæ \triangle lⁱ rectanguli; ex quibus porro latus alterum circa rectum seu perpendicularis FB, ut & \triangle DFE, per Problema præcedens, inveniri potest.

a p 2 Probl.
pag. 128.

Denique, lineis A, B, & C omnibus inæqualibus existentibus, quoniam \triangle l^{um}, quod ex ipsis constitui debet, tunc scalenum est: sequitur, perpendicularem, quæ ex angulo opposito ad latus maximum ceu basin demittitur, illud ipsum per 2^{um} Lemma similiter in duo inæqualia segmenta secare. Quocirca, supponendo rectam B vel DG maximam esse, si ea sumatur pro basi, & per Problema 10. p. 142 fiat, ut DG ad summam rectarum A & C, ita differentia earundem A & C ad 4^{am}: indicabit ea, postquam à G ad E in recta DG posita est, per

per 3^{ium} Lemma, differentiam, quā basis DG superat duplum minus segmentum DB. Hinc, ^b secundo DE bifariam in B, erit DE minus, & BG majus basis segmentum. Eò igitur Problema reductum est, ut ^a ex alterutro laterum circa rectum, & hypotensā Δ rectanguli (ut hic, ex DB & DF seu A trianguli DBF, vel ex BG & FG seu C trianguli BFG) inveniendum sit 3^{ium} latus BF. Unde & 4^{um} quæsitum DFG obtinebitur. Hinc:

Datis 3^{ibus} rectis lineis terminatis A, B, & C, &c. Quod erat faciendum.

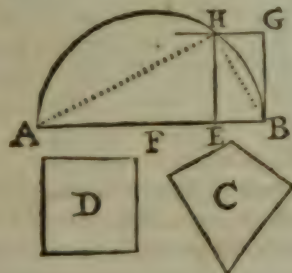
NOTA.

Id quod in hoc Problemate intendebamus, est, ut quæsitum non nisi per unius tantum circuli & rectarum linearum descriptionem satisfieret, vel etiam omnino per rectas lineas, si datæ omnes inter se æquales sint. Quod alioquin duobus circulis descriptis fieri solet. Idem quoque in iis, quæ in fine Præcedentis Problematis à nobis ostensa sunt, animadvertere licet.

IV^{um} PROBLEMA.

Parallelogrammi rectanguli, datis AB, summā laterum, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.

Constructio.



Converso plano C ^a in quadratum D, secetur AB bisariam in F, & ex F intervallo AF vel FB super AB describatur semicirculus AHB. Deinde ex B erectā super AB perpendiculari BG æquali lateri quadrati D, agatur ex G ipsi AB parallela GH, secans vel tangens circumferentiam in H, & ex H ductā HE parallelā BG (hoc est, sumptā BE æquali GH): erunt AE & EB latera parallelogrammi quæsitæ, hoc est, id quod sub AE & EB comprehenditur spaciæ, æquale erit dato plano C.

V 3

De-

Demonstratio.

Primò enim, quòd GH semper circumferentiam AHB secet vel tangat, fit, quia quadratum D per constructionem est æquale plano C; & A B ex hypothesi summa laterum parallelogrammi rectanguli æqualis quadrato D. Quorum quidem parallelogrammorum, quæ sub
b p s Secundi segmentis ipsius A B fiunt, ^b maximum est illud, quod super A B vel
Elem. Eucl. FB describitur, quadratum. Adeò ut EH vel BG, hoc est, latus quadrati D, nunquam excedere possit semidiametrum AF vel FB; ac proinde GH circumferentiam AHB in H semper secare vel tangere debeat. Deinde, quoniam rectangulum AEB, ut ex 14^{ta} Prop^{ne} 2^{di} lib. Elem. Eucl. colligitur, æquale est quadrato super EH vel
c p Constru- BG, hoc est, quadrato D, id quod ^c æquale est plano C: patet, AE
tionem. & EB esse latera rectanguli æqualis dato plano C, quorum laterum summa est AB. Quod faciendum erat.

Ut autem punctum H in campo inveniatur, in quo GH circumferentiam AHB secat vel tangit: oportet, eundo cum *cruce metatoria* in recta GH, à G ad H eousque procedere, donec, dirigendo visum per duas oppositas pinnulas versùs A, per duas reliquas oppositas conspiciatur & simul B: Quoniam punctum H, ubi hoc contingit, existens in linea GH, ut & in circumferentia AHB, quæsitum punctum est. Quocirca, ut, ad hoc explorandum, constet, utrum, dum in recta GH obambulamus, à G versùs H ulterius progrediendum, an verò ab H versùs G recedendum sit: notandum est, lineas à puncto, inter G & H assumpto, ad A & Beductas, semper acutos angulos efficere; at, quæ ex puncto in producta GH, intra circumferentiam, ultra H ad A & B ducuntur, semper obtusos efficere angulos. Adeoque, si, collimando versùs A per duas oppositas pinnulas, ac simul per reliquas duas versùs B, punctum B extra hunc radium visualem versùs sinistram deprehendatur: indicio erit, in recta GH ab H versùs G eundum esse; sed si punctum B extra hunc radium versùs dextram appareat, è contra tunc in eadem linea à G versùs H ulterius procedendum esse, usque dum utrumque punctum per binas pinnulas conspicuum compererimus.

V PRO.

V P R O B L E M A.

Datis parallelogrammi rectanguli differentiâ laterum AB, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.

Constructio.



Mutato plano C, ut ante, in quadratum D, & AB in F^a bitariam divisa, erigatur ^{a p Probl. 2} ex B super AB perpendi- ^{pag. 128.} cularis BG, æqualis lateri ^{b p Probl. 5} quadrati D, jungaturque ^{pag. 139.} I G. Deinde, ^{c p Antecedens Postul.} & intervallo FG, descripto circulo IGE, secante AD hinc inde productam in I & E: erunt IB & BE quæ sita rectanguli latera, hoc est,

erit id, quod sub IB & BE comprehenditur spacio, æquale dato plano C.

Demonstratio.

Etenim existente IF æquali FE, & AF æquali FB, erit & IA æqualis BE. Quibus singulis, si addatur AB, erit etiam IB æqualis AE. Quoniam autem rectangulum IBE, hoc est, AEB, ut ex 14^{ta} Prop^{ne} 2^{di} lib. Elem. Eucl. colligitur, æquatur quadrato super BG, hoc est, quadrato D, quod, per constructionem, æquale est plano C: manifestum est AE & EB esse latera rectanguli, dato plano C æqualis, quorum laterum differentia est AB. Quod erat faciendum.

Ubi observandum, ad quæsitum in campo obtinendum, postquam planum C in quadratum D est transmutatum, ut pag. 151 dictum est, quod FE solummodo æqualis sumenda sit ipsi FG, ita ut semicirculum IGE describere non sit opus.

FINIS.

APPEN-

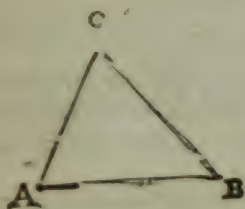
SIMPLICIVM PROBLEMATVM.

HActenus de Simplicibus Problematibus Geometricis actum fuit, quatenus ipsa in campo tanquam in plano infinito expediri possunt, supponendo, ubiuis in illo aditum patere, haud secus ac vulgò Problemata Euclidis & aliorum absolvi intelliguntur, postulantium nempe, ut in eo à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum, rectam lineam ducere, eamque ad utramque partem in infinitum producere concedatur, ut & quovis loco & intervallo circulum describere: ac summam ut in eo omnia, quæ communiter in Geometria construenda veniunt, expediri queant, nullâ necessitate ea ad ullum terminum vel limitem astringente. Quoniam autem in praxi Geodætica sæpe contingit, ut non ita indifferenter ad quævis loca huius plani pervenire liceat, sed illud ipsum quibusdam in locis pervium, quibusdam verò invium sit, & fluviis, paludibus, fossis ac aquis oblitum, unde complura puncta (alioquin data) inaccessibleia fiunt; aut idem etiam quibusdam in locis arboribus ac silvis constitum, & in quibusdam denique ædificiis, pagis, ac urbibus occupatum, aut etiam limitibus, collibus, similibusve eminentiis impeditum, unde diversa puncta, hic quidem visibilia, illuc autem invisibilia & plerumque inaccessibleia sunt, quo fit, ut ductus quidam aut linearum positiones, quæ aliàs pro datis haberi possunt, hinc incertæ & incognitæ evadant: Patet, quòd, in præcedentium Problematum Simplicium aliorumque in campo constructione, plurima expedienda occurrant, quæ aliquatenus in hac Appendice, quoniam, ut supra quidem factum fuit, perfici nequeunt, afferenda & construenda duximus. Ad quod magis adhuc me instigavit ac propensum reddidit tractatus quidam, ad manus meas ante aliquod tempus delatus, cum hoc titulo: *Geometria Peregrinans*, dialogum continens, in quo Arithmetica & Geometria tanquam sorores de fortuna sua confabulantur & de temporis conditione doctè inter se contendunt. Hic autem cum sine nomine Autoris & Typographi in lucem prodierit, ut & absque anni & loci, ubi impressus sit, indicatione; tamen ex iis, quæ in eo recensentur, eum haud ita pridem editum, colligere non est difficile.

Quem tractatum, mihi à secundo commodatum (cum hic nusquam

quam cognitus, nedum venalis esset, nec etiam ob rationes dictas facile comparandus; sed solummodo conjecturâ constaret, eum in Polonia typis mandatum fuisse, & quodd ejus Author nobilis esset Polonus, qui aliquamdiu in Batavia se detinuerat, ibique pluribus lustratis caltris Celsissimo Principi Auriaco, Guilielmo Secundo, laudatissimæ memoriæ, fuerat familiaris), breviter perlegi, & ex eo Propositiones aliquot, quas in libello quodam pertractasse videbatur, annotavi, quarum hæc sunt verba:

Propositiones, quæ in posteriore libello explicantur, istæ sunt.



1. Quomodo linea AB inaccessibilis longitudo inveniri possit?

2. Quomodo linea proposita, periculis A, B terminata, eam non adeundo, ad indicatam ab ipsa distantiam, linea parallela conformanda sit?

3. Quomodo ad datam lineam inaccessibilem AB longitudinem (sive illa conspectibilis sit, sive non) parallela eminus facienda sit?

4. Ex puncto C, quocunque loco extra lineam AB constituto (modo illud linea, punctis A, B terminata, oppositum sit) in eandem lineam A, B, ad illam non accedendo, perpendicularem demittere.

5. A dato puncto C ad lineam subjectam AB inaccessibilem, perpendiculis longitudinem indicare.

6. A dato extra lineam propositam puncto, quod versus lineam propositam extremitatem propositum sit, perpendicularem eminus demittere.

7. Ad extremitatem datæ lineæ inaccessibilis perpendicularem tantæ longitudinis, quantæ postulabitur, demittere.

8. A puncto, extra datam lineam AB remotius assignato, in eandem lineam AB triplo vel quadruplo brevior perpendicularem demittere.

9. Super datam lineam AB (sive illa conspectibilis sit, sive non) ipsam non attingendo, quadratum rectangulum æquilaterum, vel quaecunque aliud postulatum, constituere.

10. Dato in linea proposita, sive muro hostili, loco aliquo notabili, & certa distantia, ex qua tormentum ad locum assignatum juxta rectum angulum dirigendum sit, locum eidem distantia & situi convenientem invenire.

X

11. Ex-

11. Extra datam lineam, vel muri partem, punctis *A, B* terminatam, ad indicatam ab ejusdem muri opposito puncto distantiam, locum qui ab utroque *A & B* puncto aequali spatio distet, invenire.

12. Quomodo extra datam lineam inaccessibilem, vel murum *AB*, punctum inveniri possit, quod à punctis *A, B* juxta indicatam remotionem inaequalem, exactè distet?

13. Idem in sylva, ubi puncta *A, B* eminus videri non possunt, artificiosè perficere.

14. Quomodo à puncto *C* versùs lineam oppositam *AB*, ob periculum vel impedimentum aliquod, propius non accedendo, & intra quartam, vel octavam totius distantiae partem, à puncto *C* non recedendo, ex eodem puncto *C* in subjectam lineam *AB* perpendicularis demittenda sit?

15. Idem vel ad aliquot perticarum distantiam à puncto *C* versùs lineam *AB* non procedendo, alià ratione, commodè perficere.

16. Si punctum *C* in margine lacus vel sylva assignaretur, vel castra retrò nimis vicina essent, post punctum *C* non procedendo, & ab eodem puncto *C* ultra aliquot perticarum spatium versùs murum *A, B* non appropinquando, perpendicularem commodè producere.

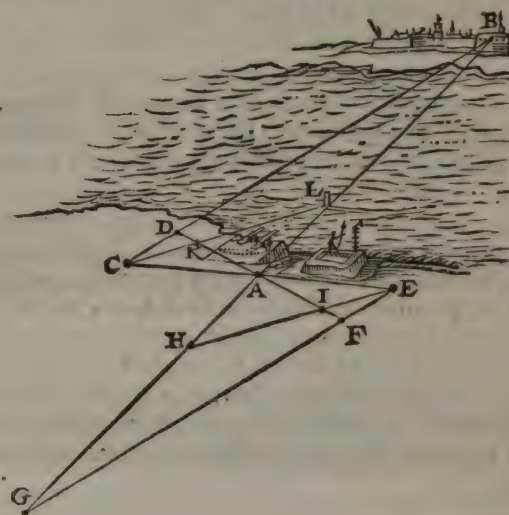
Haecenus recensui Problemata, quae absque ullo instrumento Mathematico, etiam circini, ac regula usu, lineam *A, B* non adeundo, in loco patenti & aperto, per solos bacillos expediri possunt, &c.

Hinc cum ante complures annos in Simplicium Problematum contemplationem inciderim, nec tamen audiverim legerimvè cui-dam aliquid eorum in mentem venisse, egoque interim illa, sicut superius pertractata sunt, jam abhinc 13 circiter annis conscripserim, & postmodum amicis quibusdam communicaverim, ac etiam nonnullorum praxin in campo auditoribus, lectiones meas publicas frequentantibus, ostenderim: summopere miratus sum, quod allatas Propositiones, ex superioribus Problematis Simplicibus manantes, quaeque non nisi pro sedula eorundem in variis casibus praxis Geodæticae exercitatione & animadversione haberi possunt, in praedicto tractatu offenderim. Inter quas Propositiones, cum aliquae sint, quas mihi olim in eodem sensu considerandas proposuerim, invenerimque quo pacto absque ullo instrumento in campo perfici possent, verbi gratià, rectam lineam ducere, parallelam rectae inaccessibili *AB*, ut &, idem perficere, quando quaesita linea per datum punctum *C* transire debet, ipsi *AB* non appropinquando, &c. nunquam mihi, quoad modum
in

in hisce usitatum, satisfacere valui, quippe qui non nisi instrumenti ope ac multum tentando absolvitur. Unde vel eo magis gavisus fui, quodd exercitatum ingenium, mecum hac in re idem sentiens, repererim, exinde iudicans haud inutile fore, si tempus meum utcumque in hisce infunderem. Quocirca ad usum SImplicium Problematum in diversis casibus praxis Geodaticæ exhibendum, & authorem ad operis sui editionem instigandum, juxta quasdam nostras Propositiones etiam jam citatas dicti tractatus in hac Appendice breviter construemus, exceptis 12 & 13 Propositionibus, quas inter Plana Problemata numeramus, adeoque absque circuli descriptione solvi nequeunt, ac propterea nos ad earum solutionem, sicut ante in Planorum constructione, crucem metatoriam adhibemus. Unde cum ea ab Authore inter illas ponantur, quæ omnino absque ullo instrumento Mathematico (quale tamen ego hanc crucem esse existimo) ac etiam circini & regulæ (ut quidem ait) usu perficiuntur: jure dubito, utrum Author dictas illas duas Propositiones per solas tres Petitiones, à nobis adductas, construere sciat: quandoquidem forsitan circuli descriptionem, quam fortè mediante fune in campo ut quidem circino in charta fieri posse autumat, in partes vocabit. Quod ipsum si ad SImplicium Problematum constructionem concedatur, hujusmodi operatio in campo minùs artificiosa censenda foret, nec sic Autor novum quid in harum solutionem produxisset. At verò, quoniam hic tantum mentem meam de hac re declaro, ac me etiam latet, quâ ratione Author hasce Propositiones pertractaverit, visum fuit interim modum, quo brevissimam ac commodissimam earum constructionem quæ-averim, exponere, & quæ ab Authore circa hæc conscripta sint, expectare.

Invenire longitudinem lineæ AB, cùm ad alterutrum tantùm ejus extremum A aditus patet.

Erecto ubicunque in C baculo, ac deinde in recta CB utcunque alio, ut, ex. gr., in D, sumantur in productis CA, DA rectæ AE, AF ipsi AC, AD æquales, & in directum ipsius EF retrocedatur, donec perventum fuerit in productam AB, hoc est, usque dum utrumque



punctum A & B in eadem recta appareat. Id quod suppono fieri in G, eritque GA æqualis ipsi AB.

Quocirca, ut innotescat quot virgas, pedes, &c. linea AB longa sit, oportet tantùm catenâ aut perticâ longitudinem lineæ GA explorare, habebiturque numerus virgarum, pedum, &c. longitudinis lineæ AB, quæ sit.

2 PROPOSITIO.

A puncto A in recta AB rectam datam definire AL.

Non rarò contingit, ut in construendis chomatibus, promontoriis, similibusvè, recta linea determinanda sit, datum virgarum aut pedum numerum continens: ad quod faciendum, oportet operando, ut ante, in linea AG ab A usque ad H tot virgas, pedesvè metiri, quot linea AL continere debet, ac ducere HE, quæ AF secet in I. Tum sumptâ AK æquali AI, cum scapha navigandum erit ab A versus B in recta AH, donec perventum fuerit in rectam KC, quod suppono fieri in L: eritque AL æqualis datæ rectæ AH.

3 PROPOSITIO.

Idem efficere ad alterum lineæ AB extremum B.

Accidit interdum, fluvios vel transitus aquâ terræve reperiri, adeò latos, ut bombardis aut sclopetis defendi nequeant, quo casu aggres tormentarii, reductus, aliæve similia fortalitria extrui solent, ad meatum præcludendum: quocirca suppositâ, ex. gr., distantiâ inter A & B majori, quàm ut globi ex iis emissi eandem emetiantur, oportet, ut à B versus A in recta AB definiatur linea, ut BL, datæ longitudinis, quemadmodum in 1^{ma} Propositione ostensum fuit, lineam invenire GA æqualem ipsi AB, ac deinde in ea assumere GH æqualem longitudini datæ: ductâ enim rursus HE, secante AF in I, si AK sumatur æqualis AI, & ut ante, ab A versus B in rectâ AH exeat, donec perventum fuerit in rectam CK: erit LB æqualis GH. Ut requirebatur.

Quoniam autem plerumque fit, ut in linea AB non eò usque retrogradi liceat, donec GA ipsi AB sit æqualis, adeoque ad præcedentes Propositiones superiori modo construendas ad scopum pertingere non detur: idem tamen præstari potest, faciendo tantum GA ipsius AB partem qualemcunque aliquotam, accommodando se nimirum loco ad id concessio.

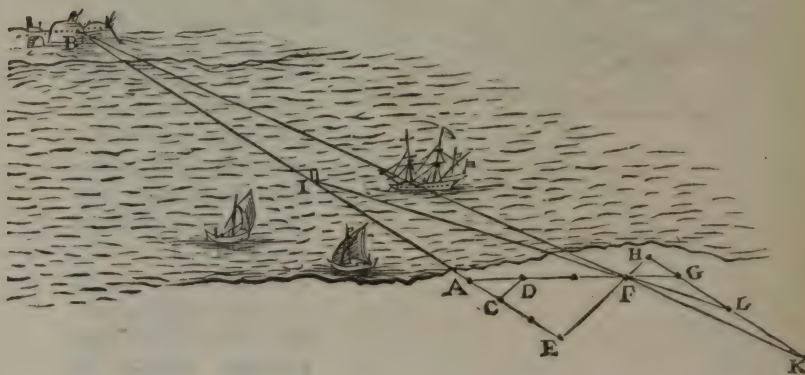
Quocirca, ut, exempli gratiâ, in producta AB inveniatur AK, quæ sit ipsius AB $\frac{1}{3}$ pars, oportet, ut ante, defixo alicubi baculo C in producta AC allumere hinc DA æqualem AC, & illinc AF æqualem triplo ipsius AC: ac deinde in recta FB erecto utcunque baculo

X 3

G, si-

versus B in directum ipsius C A exeatur, donec perventum fuerit in productam HD, recta IB æqualis datæ GH.

Si verò retroeundo ab E in directum ipsius F E eousque pervenire non detur, donec GE sit æqualis AB, ita ut præcedentes Propositiones, ut ante, expedire non liceat: poterit tamen idem præstari, faciendo ad hoc, juxta loci commoditatem, GE certam ipsius AB partem aliquotam, verbi gratiâ, tertiam.



Etenim erecto rursus in productâ AB ubicunque baculo C, in eademque assumptâ AE æquali triplæ AC, extra eam, ut ante, defigendus erit utcunque baculus D, & in recta AD sumenda AF æqualis triplæ AD. Dehinc in eadem lineâ productâ sumendo FG æqualem AD, & in productâ EF sumendo FH æqualem CD, oportet à G in directum ipsius HG retrogradi, donec perveniatur in productam BF, quod suppono fieri in K: eritque tum GK æqualis tertiæ parti ipsius AB.

Pari modo si à B versus A in recta AB linea abscindenda sit, quæ datæ rectæ, verbi gratiâ, KL, tripla existat: oportebit, inventâ GK, in eadem à K versus G designare datam KL, ac deinde ab A versus B, ut ante, in recta AB exire, manendo in eum finem continuò in directum ipsius AC; donec perventum fuerit in productam FL, quod si fiat in I: erit IB tripla ipsius KL. Id quod etiam usui esse potest, si BA, latitudinem fluvii designans, major fuerit, quàm ut tormentis bellicis ab hoste integra ex B infestari possit, ad diversos in fluvio ter-

SIMPLICIVM PROBLEMATVM. 169

terminos definiendos, ut I, extrema lectum determinantes, quò ipse securè navigari possit.

Nec aliter sit, si AI ipsius GL tripla requiratur.

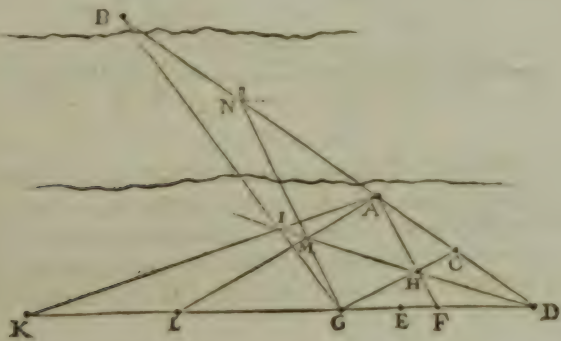
Ceterum facilè hic etiam ostendi potest, quo pacto longitudo lineæ BI, cum ad punctum duntaxat A in ejus producta pervenire licet, aliter quàm supra ostensum est, inveniri possit.

Inventâ enim prius GK, æquali trienti ipsius AB, ut hic expositum fuit, opus tantum erit prodire ab F in directum ipsius IF, donec perveniatur in productam HG. Quod si fiat in L, erit LK tertia pars ipsius BI, adeoque BI data.

*Sequuntur tres præcedentes PROPOSITIONES
adhuc alio modo Constructæ.*

1^{ma} PROPOSITIO.

Acceptis in producta AB utcumque duobus punctis C & D, & extra eam pro libitu puncto E, sumantur in linea DE rectæ DF, FG æquales DC, CA, junganturque GC, AF, sese secantes in H. Deinde ex D per H ducta DHI, junctâque GB, eandem secante in I: fiet,



si per puncta A, I recta ducatur AIK, occurrens ipsi DE in K, linea GK æqualis propositæ AB. Hinc quoties data quævis mensura continetur in GK, continebitur eadem etiam in AB; ac proinde & ipsius AB longitudo data erit.

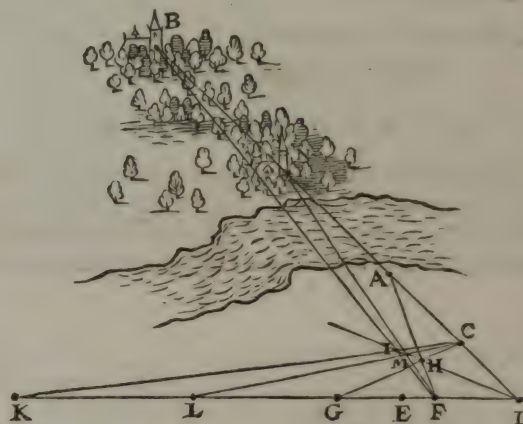
Y

Idem

Idem præstare licet, si loco rectarum GB & AIK ducantur rectæ FB & CIK, reliquis manentibus, ut ante.

2^{da} P R O P O S I T I O.

Si jam ab A versùs B in recta AB linea determinanda sit æqualis data, accipiantur, ut ante, in producta BA puncta C & D utcumque, & extra eam assumpto, ut libet, puncto E, sumptisque in linea DE rectis DF, FG æqualibus DC, CA, agantur GC, AF, sese secantes



in H, & ex D per H recta linea agatur DHI. Deinde factâ GL æquali datæ, junctâque LA, secante DHI in M: fiet, si ab A versùs B, ut supra, in directum ipsius AC exeatur, donec perventum sit in productam GM, recta AN æqualis datæ GL. Id quod etiam fieri potest loco LA & GMN ducendo rectas LC & FMN, manentibus reliquis invariatis.

3^{ta} P R O P O S I T I O.

Huc pertinent bina præcedentes figura.

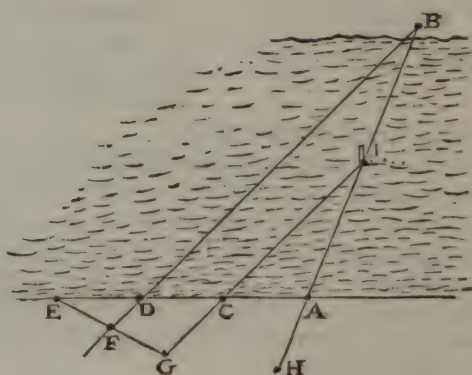
At si BN requiratur æqualis datæ rectæ, oportet ut in 1^{ma} Prop^{ne} invenire GK æqualem AB, & in eadem assumptâ KL æquali datæ ducere LA aut LC, secantem DHI in M. Deinde eundo ab A versùs B in

Si enim primò inveniatur HL æqualis trienti ipsius AB , ut ostensum est, & ducatur HN aut GN secans EIK in O , ac deinde ab L eatursus H in linea EF , donec perveniatur in productam AO aut DO : erit, supponendo id fieri in M , LM tertia pars ipsius BN . Quocirca si longitudo lineæ LM per certam aliquam mensuram exploretur, eaque in recta aliqua ter collocetur, inventa etiam erit longitudo lineæ BN quæsitæ.

4 PROPOSITIO.

Lineam AB dividere in I in eadem ratione, quâ alia data AD in C divisa est, quando ad alterutrum tantum ejus extremum A pervenire licet.

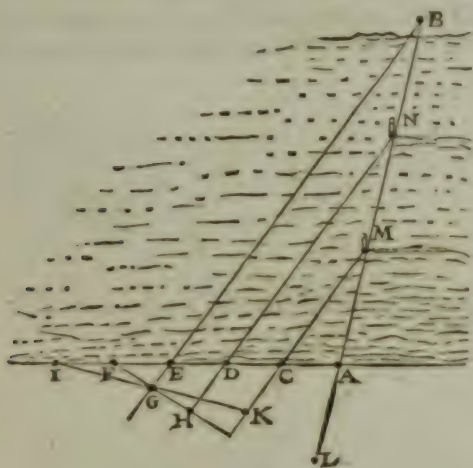
Productâ AD ad E , ita ut ED æquetur DC , collocetur in productâ BD alicubi baculus F , & ex E per F recta linea agatur. In hac autem positâ FG æquali FE , & in productâ BA utcumque erecto baculo H , ab A versus B . Cum scapha navigetur in directum ipsius HA , usque dum perventum fuerit in productam GC , id quod fieri suppono in I : eritque AB in I similiter secta, quemadmodum AD in C , hoc est, erit AI ad IB , ut AC ad CD .



Eodem modo, si AC , CD , & DE omnes inter se accipiantur æquales, erit AB in I bifariam secta. Unde etiam liquet, quo pacto linea AB in 3 aut plures æquales partes sit dividenda; veletiam quâ
ra-

ratione ex ea ad A vel B quæ sita pars sit auferenda. Quæ quidem omnia tam in imponendis fluvio pontibus quàm in delineandis variis operibus in locis paludosis in primis usui venire possunt.

Cæterum, lineâ AE in plures quàm duas partes utlibet divisâ, ut, exempli gratiâ, in C & D, ad dividendam AB in M & N in eadem ratione: oportet, ut ante, producendo AE ad F, ita ut EF sit æqualis ED, in producta BE utcumque ponere baculum G; & ex F per G

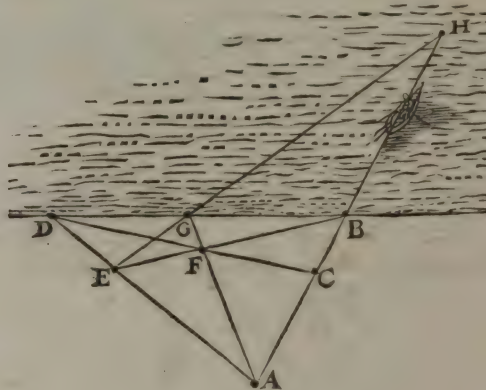


ductâ FGH in ea assumere GH æqualem GF. Deinde productâ AE ad I, ita ut EI sit æqualis EC, ducatur ex I per G recta IGK; & in eadem assumptâ GK æquali GI, collocetur in producta AB alicubi baculus L. Porro exeundo, ut supra, ab A versus B in directum ipsius LA, donec perveniatur in productas KC & HD, id quod fieri suppono in M & N: erit AB in M & N divisa, sicut AE in C & D. Eodem modo procede, cum AE in plures quàm tres partes est divisa.

5 P R O P O S I T I O.

Lineam AB , divisam in C , ita ut AC major sit quàm CB , producere versùs B , ut tota AH sit ad productam BH , sicut AC ad CB . Supponendo quòd ultra B progredi non liceat.

Ad quod faciendum, defixo alicubi extra AB baculo D , ductisque AD , DB , & DC , agatur ex B ad E punctum quodvis in AD recta BE , secans DC in F ; ac deinde ex A per F recta AFG , occurrens ipsi



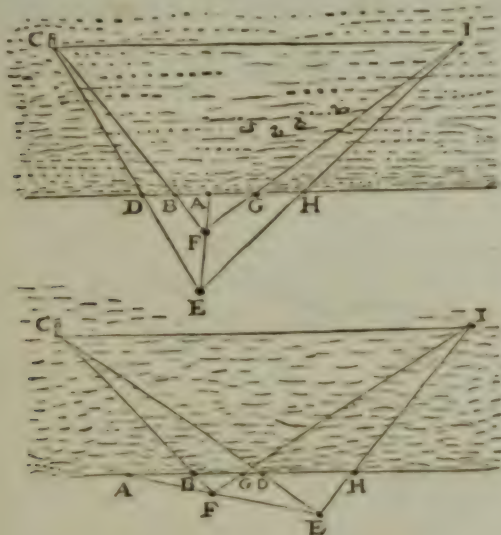
DB in G . Quo peracto, si à B cum scapha in directum ipsius AB navigetur, donec perventum sit in productam EG , ut ad H ; erit AH ad HB , ut AC ad CB . Ut requirebatur.

6 P R O.

6 PROPOSITIO.

Per punctum C rectam lineam ducere CI, parallelam alteri AB, cum intra utramque venire non licet.

Sumpto in AB utcumque puncto utroque A & B, & in ea accepta BD æquali BA, agatur ex C per D recta CDE. Deinde in hac assumpto pro lubitu puncto E, ductaque EA, agatur ex C per B recta



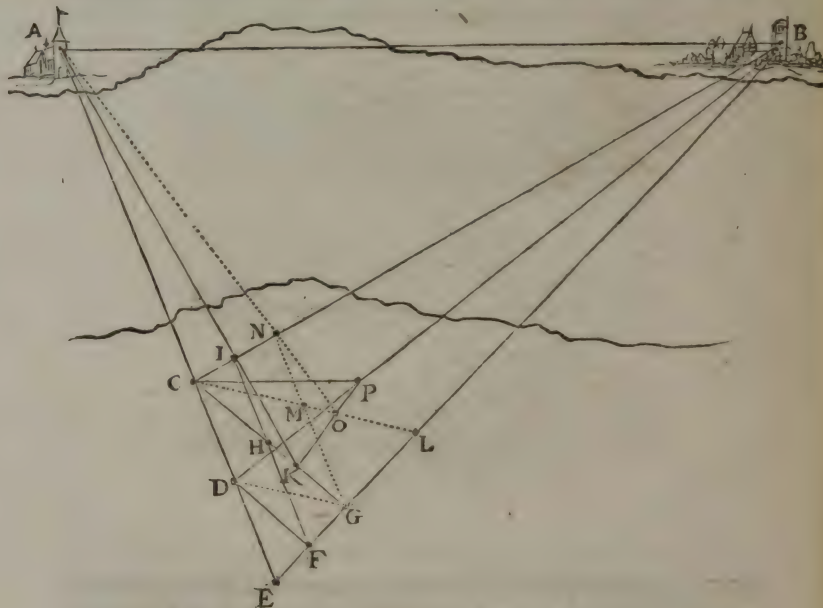
CBF, occurrens ipsi EA in F. Porro accepto in AB utcumque alio puncto G, factaque in linea AB recta GH æquali GA: fiet, si à G cum scapha navigetur in directum ipsius FG, donec perveniatur in productam EH, quod fieri suppono in I, recta CI, quæ inter utrumque punctum C & I interjacet, ipsi AB parallela.

7 PRO.

7 P R O P O S I T I O.

Per datum punctum C rectam ducere CP, parallelam alteri AB, ad quam accessus non patet.

Sumpto enim in producta AC puncto utcumque D, ponatur in ea DE æqualis DC, ducanturque EB, BC. Deinde accepto in EB pro lubitu puncto F, collocetur in ea FG æqualis FE, junganturque FD, GC. Quo peracto, oportet ex CG abscindere CH æqualem DF, & per puncta F, H rectam ducere FHI, occurrentem ipsi CB in I.

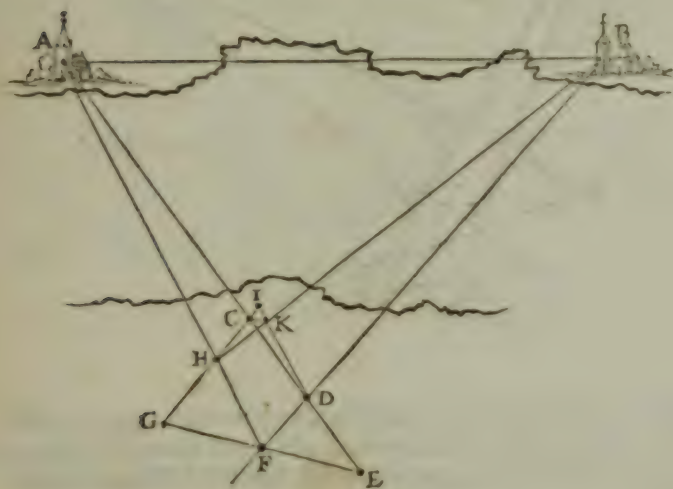


Eodem modo, assumptâ GL æquali GE, junctisque GD, LC, oportet ex CL auferre CM æqualem DG, & per puncta G, M rectam ducere GMN, occurrentem ipsi CB in N. Postea ductis ex A per I & N rectis AIK, ANO, occurrentibus ipsis CG, CL, aut postquam sunt productæ in K & O, agatur ex K per O recta KOP, occurrens ipsi DB in P: eritque juncta CP ipsi AB parallela. Ut requirebatur.

Ali-

Aliter & brevius.

Sumpto, ut ante, in producta AC puncto D, in eaque positâ DE æquali DC, accipiat in producta BD pro libitu punctum F, & ex E per F agatur recta EFG. In qua assumptâ FG æquali FE, junctisq̃ue



GC, FH, sese interfecantibus in H, oportet HI æqualem facere FD, & jungere ID, quæ ab HB secetur in K: eritq̃ue juncta CK ipsi AB parallela.

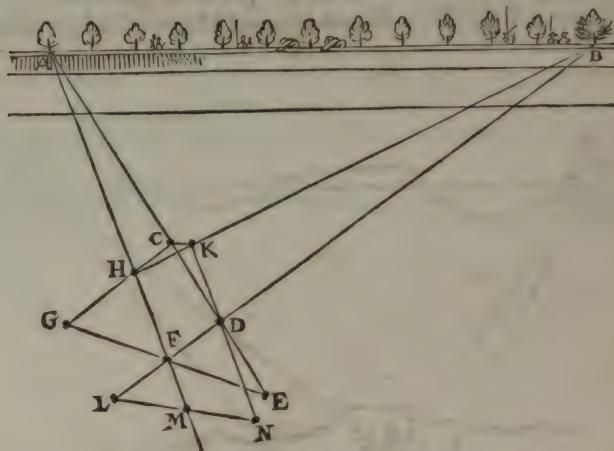
Aliter, non appropinquando ipsi AB.

Potro si accadat, ut ad evadendum aliquod periculum vel ob incommodum aliquod ultra C progredi non liceat: poterimus ad idem perficiendum, postquam, ut ante, inventa est linea GC, loco sumendi in

Z

di in

di in ea HI æqualem FD , &c. in producta BDF collocare FL æqualem FD , ac deinde in producta AHF accipere utcumque punctum

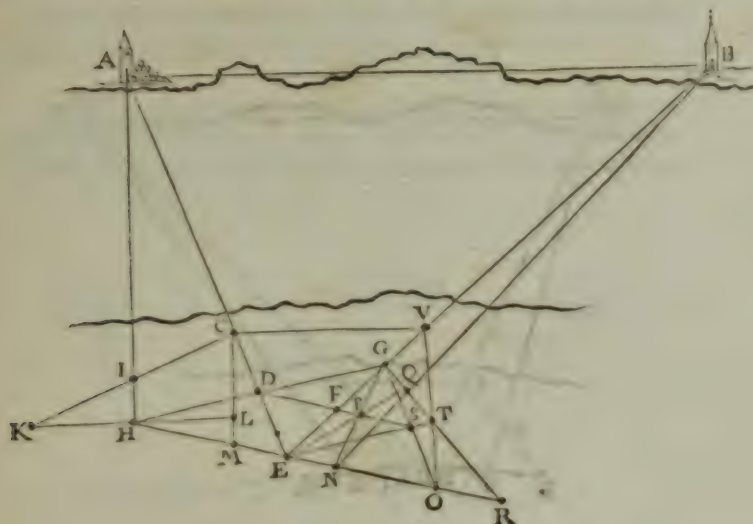


M. Fiet enim, ut, si ab L per M recta agatur linea, atque in ea sumatur MN æqualis ML , ac postea ex N per D ducatur NDK , occurrens ipsi HB in K , jungaturque CK , hæc ipsi AB futura sit parallela.

Idem aliter.

Sumpto, ut ante, in producta AC puncto D , in eaque positâ DE æquali DC , agatur EB . In qua assumptis EF, FG æqualibus ED, DC , & ex G per D ductâ recta GDH , collocetur in ea DH æqualis DG , junganturque HA, HE . Deinde accepto in HA pro libitu puncto I , oportet ex C per I rectam lineam ducere, & in ea assumere IK æqualem IC . Porro ductâ ex K per H rectâ lineâ, in eaque acceptâ HL æquali HK , agatur per utrumque punctum C & L recta CLM , occurrens ipsi HE in M . Quo peracto, si in producta HE sumantur EN, NO ipsi EM, MH æquales, ducanturque NG, GO , quæ à pro-

producta DF secetur in P & S, & ex E per P recta lineagatur EPQ, occurrens ipsi NB in Q, fiet, ut si à G per Q recta ducatur linea GQR,



occurrens producta HE in R, & ex E per S agatur EST, quæ à GQR secetur in T, ac deinde ex O per T recta OTV, occurrens ipsi EB in V, juncta CV sit ipsi AB parallela.

Idem adhuc aliter & brevius.

Accepto, ut ante, in producta AC puncto D, atque extra eam ut-
cunque puncto E, ducatur ex C per E recta CEF. In qua ponendo
EF æqualem EC, ducendoque FD, quæ à producta AE secetur in
G, fiat GH æqualis GF. Deinde sumendo extra DB, eamve produ-
ctam, pro lubitu punctum I, oportet in linea DI assumere DK, KL,
& LM æquales DH, HG, & GF, & in juncta LB accipere utcunque
punctum N. Postremo ducendo ex M per N rectam MNO, in eaque
collocando NO æqualem NM, oportet ex K per O rectam lineam
ducere KOP, quæ à DB secetur in P: eritque juncta CP ipsi AB
parallela.

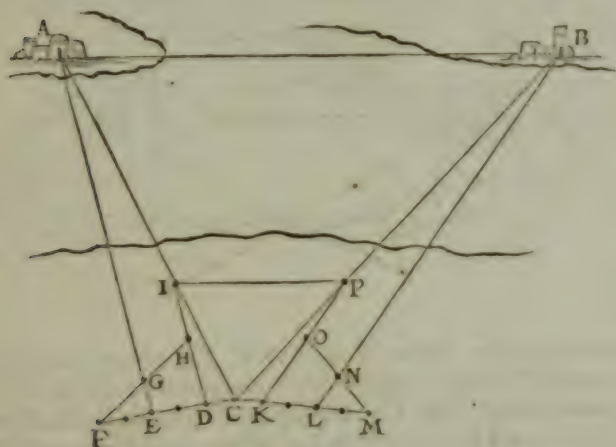
Z 2

Ubi

8 PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ AB, cum ad neutrum
ejus extremum A vel B perveniri potest.

Ut hoc fiat, concipiantur ex puncto aliquo C, è quo utrumque pun-
ctum A & B conspici potest, rectæ ductæ CA, CB, ex quibus si ad C,
ut 4^{ta} Propositione ostensum est, auferantur CI, CP, quæ ipsarum



CA, CB partes sint aliquotæ, ut, ex. gr., tertia pars: erit simi-
liter juncta IP tertia pars ipsius AB. Cujus itaque IP explorata
longitudo si in recta aliqua ter sumatur longitudinem quæsita AB
exhibebit.

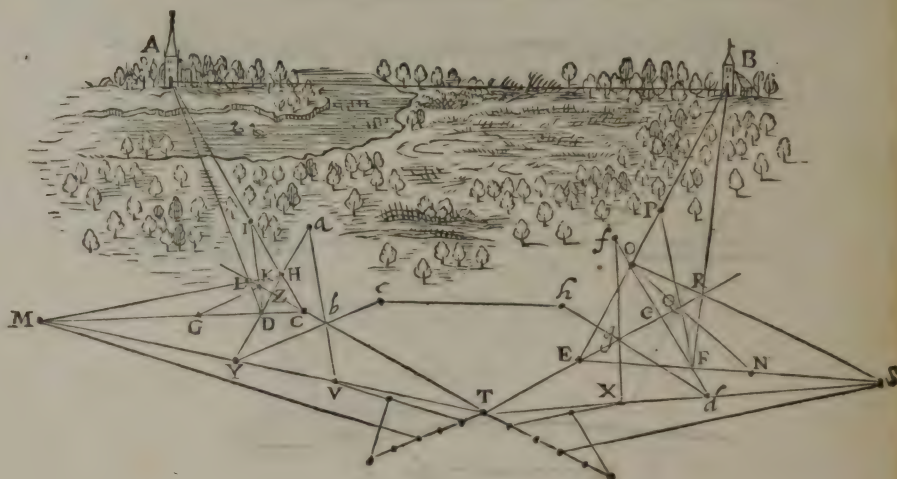
Ubi notandum, inventam IP parallelam quoque esse ipsi AB.

Porro si contingat, ut puncta A & B alicubi commodè simul vi-
deri nequeant, sed punctum A, exempli gratiâ, tantummodo in locis
C & D; & punctum B solummodo in E & F, sumatur in producta

Z 3

CD

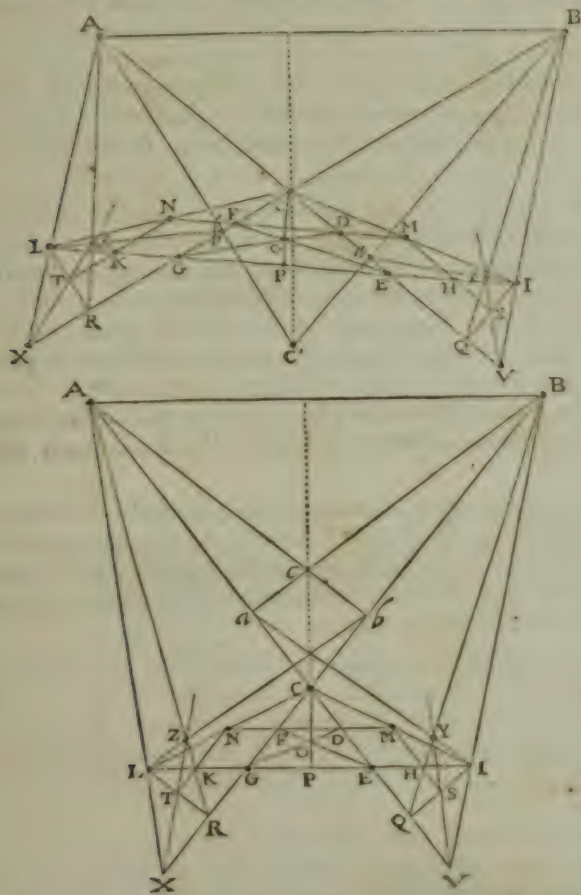
C D utcumque punctum G, & in C A assumptis CH, HI æqualibu
CD, DG, junctisque GH, DI, sese interfecantibus in K, agatur ex
C per K recta CKL, secans DA in L. Deinde ductâ ex H per L rectâ
HLM, occurrente productæ CD in M, procedatur eodem modo



ad alteram partem. Postea productis KC , QE , donec sibi invicem occurrant in T , inveniatur, per 4^{ta}m Propositionem, TV , TX tertiæ partes ipsarum TM , TS . Denique ductâ per puncta H , D rectâ HDY , secante TM , TK in Y & Z , accipiat in ea Za æqualis ZY , junctâque aV , secante KT in b , agatur ex Y per b recta Ybc , assumendo in ea bc æqualem bV . Eodem pacto si ad alteram partem inveniatur punctum h , agaturque ch , erit ipsa rectæ AB pars tertia, ut & ipsi parallela. Patet itaque, per hanc Propositionem nec non præcedentem ac primam, factum esse, id quod ab Autore in tribus primis Propositionibus requirebatur.

9 PROPOSITIO.

Ex puncto C, utcumque è regione lineæ inaccessæ AB
dato, in eandem lineam perpendicularem demittere.
Sumantur in productis AC, BC rectæ CD, DE, CF & FG omnes



inter se æquales, ductâque per G & E rectâ lineâ capiantur in ea hinc
inde

inde EH, HI, GK, & KL præcedentibus æquales. Tum junctis CI, CL, quæ à recta per F & D ductâ secantur in M & N, agantur DG, FE, se mutuo secantes in O, & ex C per O recta linea agatur, occurrens ipsi GE in P. Deinde acceptis EQ, GR æqualibus EP, PG jungantur QI, RL, quæ à productis MH, NK secantur in S & T. Porro productis BI, AL usque ad productas AC, BC in V & X, agantur ex V & X per S & T rectæ, quæ à QB, RA secantur in Y & Z, & ex punctis I & L per Y & Z rectæ IYa & LZ b, occurrentes ipsis AC & BC, aut iisdem productis, in a & b. Postremo ductis aB, bA, sese secantibus, aut postquam productæ sunt, in c, erit recta, quæ per puncta C & c ducitur, ipsi AB perpendicularis. Ut requirebatur.

Quandoquidem his 4^{ta} Propositioni Autoris satisfactum existimamus, ponendo quod ad quæsitum perficiendum impedimentum aliquod nulli loco nos astringat, sed in campo aperto ut Propositio requirit ubique procedere liceat, dummodo ad lineam AB non accedatur: visum fuit simul hîc afferre constructionem 14, 15, & 16 Propositionum, hoc est, quo pacto idem fieri possit, quando ob periculum aliquod vel impedimentum linea AB appropinquari nequit, neque etiam ultra $\frac{1}{4}$ tam aut $\frac{1}{8}$ v. a m distantia partem certumve perticarum numerum à C retrocedere licet; vel etiam quâ ratione idem non retrogradiendo, sed è contra tantundem ad AB accedendo, absolvi queat.

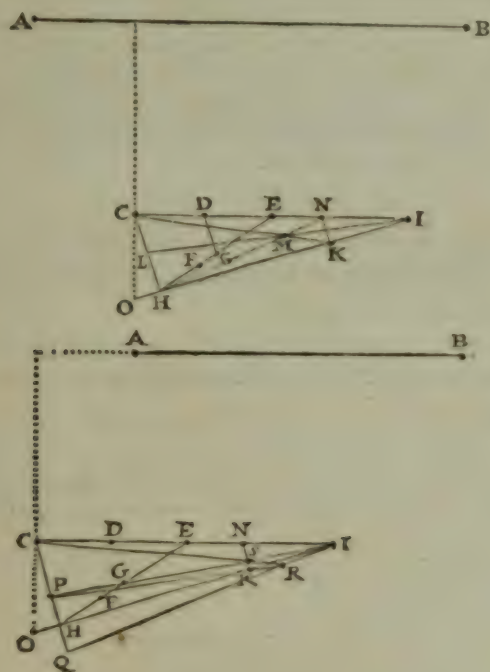
Ad quod faciendum, videndum primò, quomodo diversis modis, 7^{ma} Propositione ostensis, per C recta linea duci possit, quæ ipsi AB sit parallela, ad eandem nullatenus appropinquando; ut & quomodo idem præstare liceat, si tantum ad certam distantia partem aut perticarum numerum retrogradiretur.

Hinc inventâ CD parallelâ ipsi AB, ut dictum est, ponatur in ea DE æqualis DC, & ex E ducatur per F, punctum quodvis extra CD, recta EF, faciens cum CE angulum quemcunque. Deinde in hac assumptis EG, GH æqualibus ED, DC, junctisque GD, HC, producatur CD ad I, ita ut EI sit æqualis EC, & agatur HI: in qua acceptâ KI æquali HC, & in hac rursus CL æquali DG, ducantur CK, LI sese secantes in M. Denique ductâ ex H per M recta HMN, occurrente ipsi CI in N, erit, si jungatur KN, eademque ponatur in producta IHa bH ad O, linea quæ per puncta O & C vergit ipsi AB perpendicularis.

Vel

Vel etiam sic:

Ductâ ex I per C rectâ IGP, occurrente ipsi CH in P, & in producta CH assumptâ HQ æquali HP, agatur QI, ut & PKR, occurrens ipsi QI in R. Si enim junctâ CR, secante PI in S, ex K per S agatur



tur recta KSN, occurrens ipsi CI in N: erit, ut ante, assumptâ HO æquali KN, linea quæ per puncta O & C transit perpendicularis ipsi AB.

Ubi porro notandum, quandoquidem liberum est in inventa linea CD accipere punctum D, ut & extra eam punctum F, quod exinde tam parum à C in linea CD progredi possimus, ut libet, sicut etiam ob angulum CEF pro libitu acutum puncta C & H tam propinqua,

Aa

ita

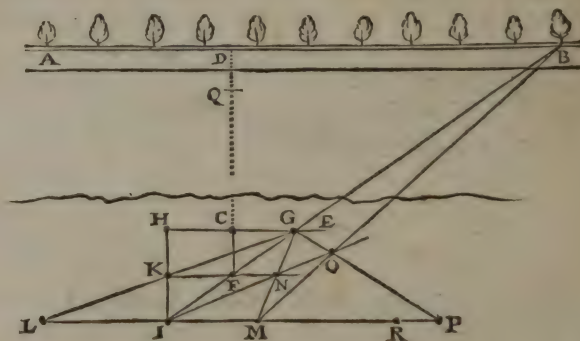
ita ut ad inveniendum punctum O non nisi ad certam distantia partem aut perticarum numerum retrocedere opus sit, nullatenus lineam AB appropinquando.

Denique si à C retrocedere non daretur, sed duntaxat, quantum dictum est, ad AB accedere liceret: poterit, juxta ultimum modum 7^{mæ} Propositionis punctum C, hîc datum, illic haberi pro puncto D, atque sic inveniri CP parallela ipsi AB, postquam punctum Cibi sumptum fuerit in recta AD, tam prope punctum D, quantum libet, operando deinde super linea CP haud secus atque hîc super CDE factum fuit. Quibus simul hîc satisfactum arbitramur 6^{tæ} Propositioni Autoris, quandoquidem hîc indifferens est, utrum datum punctum C ipsi AB oppositum sit nec ne.

IO PROPOSITIO.

Invenire longitudinem perpendicularis CD, quæ ex puncto C demittitur in lineam AB, posito quòd ad AB appropinquare non liceat.

Quod ut fiat, oportet primò per C, juxta 7^{mam} Propositionem, rectam lineam ducere CE, ipsi AB parallelam, & ad eam, ut modò



ostensum est, ex C erigere perpendicularem CF. Deinde ductâ FB, secante CE in G, factâque CH æquali CG, & FI æquali FG, positis nempe iisdem in productis EC, BF, agatur HI; In qua assumptâ HK æquali

per F recta linea, acceptâque in ea DG æquali DE , & ex E per G ductâ rectâ lineâ, ponatur in ea EI æqualis EC . Porro factâ EH æquali EG , erit HI perpendicularis ad CDE : in qua assumptâ HK æquali datæ rectæ, ducatur KB , quâ, per 4^{ta} Propositionem, bifariam sectâ in L , agatur ex H per L recta linea. Denique acceptâ in hac LM æquali LH , ducatur MB , eritque ipsa æqualis datæ rectæ HK & perpendicularis ad AB , ut requirebatur.

Eodem modo operandum, si quæsitâ linea ad aliud quodvis punctum in recta AB sit ducenda. Quibus simul satisfactum existimamus 7^{ma} & 10^{ma} Propositionibus Autoris.

Porro si requiratur, ut linea BM datum angulum cum AB efficiat, poterit, loco ducendi HI perpendicularem ad CDE , ea juxta 6^{um} Problema Simplex ad aliquod punctum CDE ita duci, ut nimirum angulus CHI dato angulo sit æqualis, operando ulterius, ut supra.

Præterea animadvertendum, quod, si, BM existente perpendiculari super AB , per M , ut ante, recta linea ducatur, quæ ipsi AB sit parallela, aut ad A eodem modo procedatur, quemadmodum hîc ad B , recta quæ bina hæc puncta connectit, ipsi AB futura sit parallela, & in data distantia ab ipsa remota, simulque cum reliquis parallelogrammum rectangulum comprehensura. Quo quidem sensu Autor secundam suam Propositionem procul dubio proposuit, si forte in 7^{ma} aut 8^{va} nostra Propositione verum ejus sensum non fuerimus assecuti.

Denique, quoniam parallela CDE per 8^{va} nostram Propositionem ita invenitur, ut ea simul sit certa ipsius AB pars aliquota, etiamsi duo puncta A & B simul ex eodem loco non sint conspicua, patet hinc id quod in 9^{na} Propositione requiritur, videlicet: Quo pacto hoc in sensu super lineam inaccessam AB non solum quadratum seu rectangulum æquilaterum; sed etiam parallelogrammum quodvis constitui possit.

190 APPENDIX SIMPLICIUM PROBLEMATVM.

Haud secus etiam quodvis punctum in recta RST assumptum à punctis A & B æquè remotum erit.

Ubi liquet, quæsitum hâc ratione non solum inveniri, nullatenus ad AB accedendo (quo sensu 11^{ma} Propositionem Autoris intelligendam esse confido); verum etiam haudquaquam ad eam appropinquando; ac insuper, quoniam EC , CF pro lubitu sumuntur æquales, non nisi ad certam distantiae partem aut datum perticarum numerum retrocedendo.

Denique quod attinet ad 12 & 13^{tiam} Propositionem Autoris, quandoquidem eas tales censeo, quæ non nisi unius aut plurium circulorum descriptione construi possunt, quæque proinde, ut ante dictum est, absque instrumento Mathematico in campo expediri nequeunt, hæc impræsentiarum in medium protulisse suffecerit. Evulgationem autem eorum, quæ ab Autore circa hæc in Geometriæ incrementum ulterius fortè adinventa sunt, expectamus.

Hiscæ interim, quæ nostra nobis suggestit meditatio, Benevoli Lectoris commodo studere volumus, qui itaque laborem nostrum, in bonum publicum lubenti animo susceptum, æqui bonique consulat.

F I N I S.

FRAN-

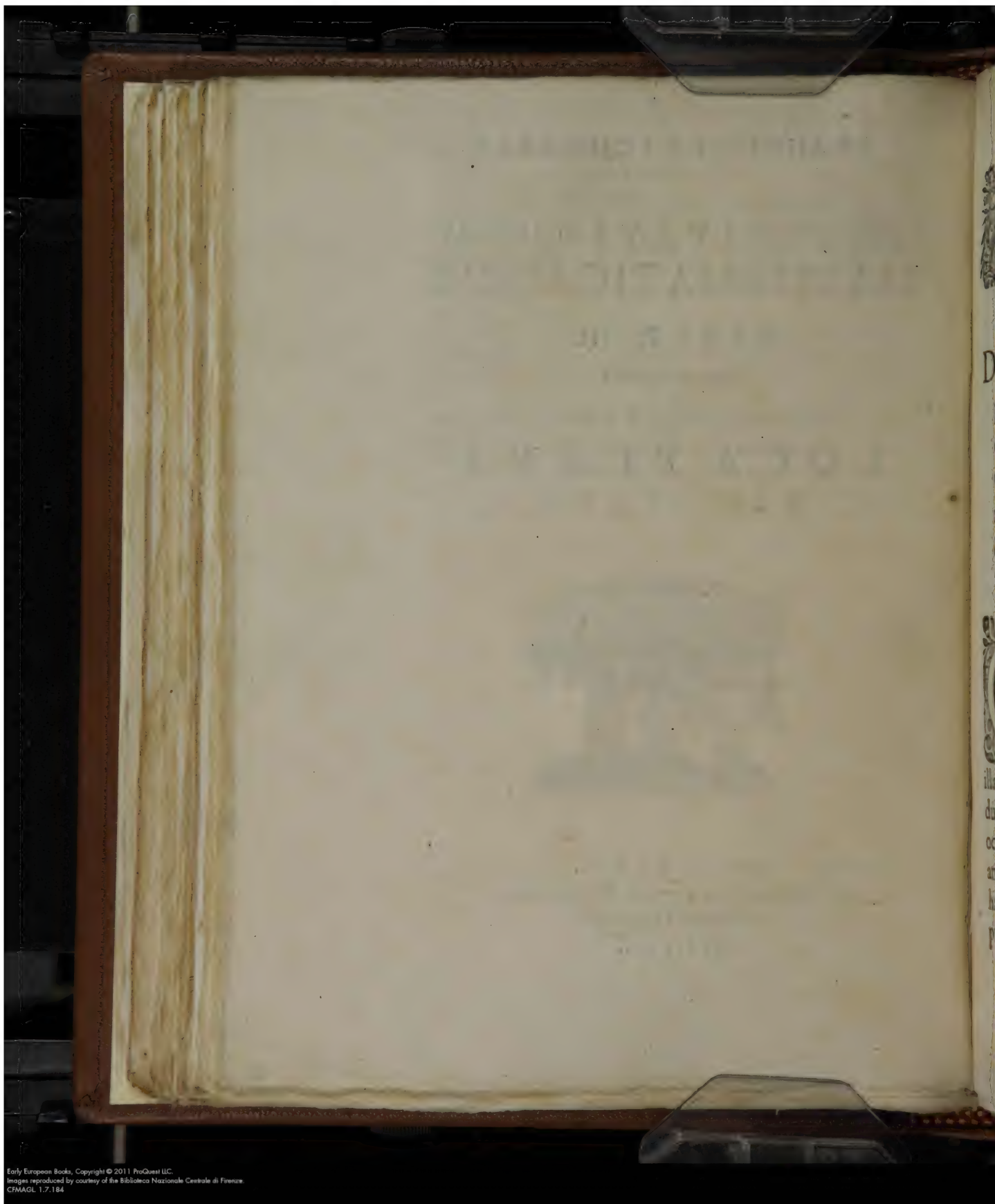
191

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Mathematicos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,

LIBER III.
CONTINENS
APOLLONII PERGÆI
LOCA PLANA
RESTITUTA.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiae Typographi.
cld lpc lvi.





ILLVSTRISSIMO VIRO,
D^{no} PETRO CHANUTO,

Regis Christianissimi in Concilio Status
Consiliario Ordinario & Quæstorum
Galliæ Conventu, Ricomagi Arverno-
rum, Præsidi; antehac ad Coronam Sueciæ
& Confœderati Belgii Ordines Legato.

Vir Illustrissime,

Quemadmodum in veritatis inve-
stigandæ studio, quæ omnis scien-
tiæ finis animiquæ cibus & genui-
num alimentum est, nullæ utique
Disciplinæ animos discientium ad
illam assequendam aptiores alacrioresquæ red-
dunt, quàm quæ in veri inquisitione continuè
occupatæ certitudinis evidentia alias disciplinas
antecellunt; ita etiam Mathematicæ, quæ ferè
hactenus solæ demonstrationibus gavisæ sunt,
præter summam suam ad vitæ commoda necessi-

Bb

ra-

tatem, huc etiam semper quàm maximè utiles
judicatæ, magnoquè idcirco apud perspicacissi-
mos quosque in pretio habitæ sunt. Etenim si
perpendamus, quo pacto ipsæ à rebus notissimis
initium capientes ad abditissimarum rerum co-
gnitionem brevi tempore nos perducant, sicquè
mentem è terra quasi in cœlum subvehant: faciliè
constabit, quam ob causam Veteres, quò inge-
nium adhuc infirmum in rectè judicando docile
redderetur, eas ante alias omnes scientias ac artes
excolendas sibi duxerint. Hanc igitur viam ubi
prudentiorum quispiam, ad præclara natus, seriò
semel est ingressus, mirum quanto cum successu
tam in reliquis studiis ritè pertractandis, quàm
in summis muneribus fœliciter administrandis
operam ille suam collocaverit. In te unum, Vir
Illustrissime, si intuear, cui μελετήματα hæc sa-
craesse volui, non est quod alios hîc in testes ad-
vocem, quippe tu, quanta ex Disciplinis hisce
emolumenta dimanent, sæpiùs accurato tuo ju-
diciò prudentiquè consilio comprobâsti. Testa-
tur hoc eximius ille tuus in Mathematicas Scien-
tias amor, quo in earum adyta non modò jam
dudum penetrâsti ac in iisdem recondendis, ubi
graviora id tua permittunt negotia, etiamnum
maximopere delectaris, sed etiam solidiori erudi-
tioni

tioni vel usque adeò faves, ut strenuos ejusdem cultores insigni benignitate foveas, atque multis honorum titulis prosequaris. Quâ adeò ex re contigit, ut reliqua tua sublimiora studia ea hætenus ingenii dexteritate tractaveris, ut cordatiorum omnium acclamationes & ἐὺφροσύαι ad te concordantibus eant suffragiis. Porro quantâ in rebus agendis prudentiâ valeas, testis est splendidissima tui nominis fama, quæ virtutes tuas passim promulgans, ubi in aulam pervolavit, effecit, ut meritissimo tibi Christianissimus Rex suprema munera destinaverit. Vnde factum ut non solùm ipsius nomine ad Eruditissimam ac Serenissimam quondam Suecorum Reginam, & deinde ad Præpotentes ac Illustrissimos Fæderati Belgii Ordines Legatus Ordinarius missus fueris; verùm etiam, quò ubique sapienti prudentique tuo consilio prodesse, Lubecæ in componendis Poloniæ ac Sueciæ litibus Mediator extiteris. Et verò ne Gallia ipsa, ortis in ea dissidiis, consilii tui fœlicitate orbata foret, cùm præsentia tua illic quàm maximè exigebatur, tu inquam, Vir Illustrissime, domum revocatus tempore difficillimo, pacem inter dissentientes cum applausu conciliasti. Quapropter, cum istam singularem sapientiam ac prudentiam unusquisque

in te veneretur, eximiiq̃ue insuper affectus tui erga verè eruditos testimonium hoc publicum extet, quòd monumentum Holmiæ admodum luculentum in perpetuam memoriam viri maximi ac Gallici nominis decoris sempiterni, RENATI DES CARTES, erigi curaveris; haud committendum putavi, quum hoc studii genere tibi conjunctissimus sim, ut meum erga te affectum diutiùs occultarem. Hinc, quæ animo jam pridem volvere cœpi, atque in Mathematicarum Disciplinarum incrementum ac restitutionem molitus sum, sub tuo auspicio in publicum dare constitui. persuasus, quæ strenuis Matheseos cultoribus non ingrata fore intellexi, ea neque limato tuo judicio displicitura. Excipe ergo benigniter, Vir Illustrissime, hanc devotæ mentis meæ tesseram, & qui me antehac inter tuos recepisti, patere conatus etiam hosce, tuo patrocínio munitos, sub Illustris Tui Nominis splendore in lucem prodire. Quod superest, Deum Opt. Max. supplex rogo, ut te literatis omnibus, studiorumq̃ue candidatis quàm diutissimè servet incolumem ac felicem.

Dabam Lugd.
Bat. Kalendis
Januariis, An-
ni c̃lo lxxvii.

Illustrissimo Nomini Tuo

devotissimus

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

P R Æ F A T I O A D L E C T O R E M.

Lector benevole,

Geometriam olim à Græcis ad summum fastigium fuisse eveltam, cum ex ingenii monumentis, vix dum ex naufragio nobis servatis; tum ex successorum testimoniis luculenter colligimus. Omnium tamen illorum, quæ ab ipsis ingeniosè & summo acumine in Geometrico negotio inquisita videntur (nostrâ quidem sententiâ) primam classem meretur Locus, ipsis vocatus ἀναλυόμενος, hoc est, resolutus. De quo scripserunt Euclides, Apollonius Pergæus, & Aristæus senior. Est enim, teste Pappo Alexandrino in præfatione vii libri Collectionum Mathematicarum, hæc propria quadam materia, post communium Elementorum constitutionem, iis parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim ac facultatem inveniendi Problemata, quæ ipsis proponuntur. Dictorum autem librorum, qui ad Resolutum Locum pertinent, ordo, juxta Pappum, talis est.

Euclidis Datorum liber unus. Apollonii λόγος ἀπομυήσας, h. e., de Rationis sectione libri duo. Χορὴ ἀπομυήσας, h. e., de Spatii sectione duo. Ἐπιφῶν, h. e., Tactionum duo. Euclidis Porismatum tres. Apollonii νύσσεων, h. e., Inclinationum duo. Ejusdem τόπων ἐμπέδων, h. e., Planorum Locorum duo. Apollonii Conicorum octo. Αἰσάται τόπων στερεῶν, h. e., Solidorum Locorum quinque. Euclidis τόπων πρὸς ἐπιφανείας, h. e., Locorum ad Superficiem duo. Eratoſthenis de Medietatibus duo. Quorum omnium librorum sola Euclidis Data, unâ cum quatuor prioribus libris Conicorum Apollonii ad manus nostras pervenerunt, reliqui omnes temporum injuriâ perierunt, magno sanè Reipublicæ Literariæ detrimento: Imò, nisi Pappus eorum mentionem fecisset, planè fuissent oblitterati.

Bb 3

Qua-

Quapropter cum ipse breviter nonnulla recenset Problemata & Propositiones istorum librorum, Recentiorum aliqui eorum iacturam dolentes summâ ope conati sunt istos ex Pappi relatione restituere, atq; sic quasi mortuis vitam redonare. Ita paucorum annorum decursu duo Apollonii libri de rationis sectione, duo de spatii sectione, duo determinatâ sectionis nobis per Willebrordum Snellium restaurati sunt, Tactionum per Franciscum Vietam, Inclinationum per Marinum Getaldum, & Alexandrum Andersonum, qui duos de determinatâ sectione postea aliter quoque quam Snellius demonstravit. Quorum exemplo excitati, nos etiam in Apollonio nostras vires periclitari, ejusq; Loca Plana resuscitare aggressi sumus, juxta illa quæ Pappus prædicto loco nobis reservavit, quæq; secundum Commandini versionem ita sonant.

De Locis
Planis, ex
Pappo.

Locorum omnium alii sunt ἐπεκτινοὶ, hoc est, in se ipsis tantum consistentes, de quibus & Apollonius ante propria elementa dicit puncti quidem locum esse punctum, lineæ locum lineam, superficiei superficiem, & solidi solidum; alii autem διεξοδινοὶ, hoc est, sese extra tendentes, ut puncti locum lineam, lineæ superficiem, superficiei solidum. Locorum autem, qui in resolutio loco, alii quidem positione dati ἐπεκτινοὶ sunt, alii autem plani dicti, & solidi, & lineares: διεξοδινοὶ verò sunt punctorum, & alii ad superficies. ἀναγεροφικοὶ quidem punctorum, διεξοδινοὶ autem linearum. Lineares loci ex iis qui sunt ad superficies demonstrantur.

Conferantur hæc cum
iis, quæ exstant
pag. 39, lib. 2^{di} Geometriae
Renati des Cartes,
ubi hæc clarius
explicantur.

Dicuntur autem plani loci tum hi, de quibus agemus, tum universè quicunque sunt rectæ lineæ, vel circuli. Solidi loci quicunque sunt conorum sectiones, parabolæ, vel ellipses, vel hyperbolæ. Lineares loci, quicunque lineæ sunt, neque rectæ, neque circuli, neque aliqua dictarum conicæ sectionum.

Loci autem ab Eratosthene inscripti ad medietates ex præ-

prædictis genere sunt à proprietate hypothescon in illis.

Antiqui igitur horum planorum ordinem respicientes elementa tradiderunt, quem cum negligerent posteriores, alios apposuerunt, tanquam non infinitos multitudine, si quis velit ascribere quæ ordinem illum consequantur. itaque ponam propositi quidem posteriora, ordine autem priora, unâ propositione comprehendens, hoc modo:

Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à Prop. 1. duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spacium: contingat autem terminus unius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum quidem ejusdem generis, interdum verò diversum, & Interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo. Hæc autem fiunt juxta differentias subjectorum.

At proposita in principio quidem tertii libri à Charmandro his congruunt.

Si rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, 2. & alter circumferentiam concavam positione datam continget.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, datum angulum continentes: commune ipsorum punctum continget circumferentiam concavam, positione datam.

Si trianguli spaci magnitudine dati, basis positione & magnitudine data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget.

Alia autem hujusmodi:

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuiuspiam positione 5. datæ æquidistantis unus terminus contingat rectam line-

am

am positione datam, & alius terminus rectam lineam positione datam continget.

6. Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas, vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam habentes proportionem, vel quarum una simul cum eâ, ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam.
7. Et si sint quorcumque rectæ lineæ positione data, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod data linea & ducta continetur, una cum contento data linea & altera ducta, æquale ei, quod data, & alia ducta, & reliquis continetur: punctum similiter rectam lineam positione datam continget.
8. Si ab aliquo puncto ad positione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipsis data abscindant rectas lineas, vel proportionem habentes, vel spacium continent datum, vel ita ut species ab ipsis ductis vel excessus specierum æqualis sit spacio dato: punctum continget positione datas rectas lineas.

Secundus autem liber hæc continet.

1. Si à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spacio differentia: punctum positione datas rectas lineas continget. Si sint in proportionem data, vel rectæ lineæ, vel circumferentiæ.
2. Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ducta æquale ei, quod à data, & abscissa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum datum in linea data positione: terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit
quod

quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato major, quàm in proportionem: punctum positione datam circumferentiam continget.

Si à quocunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus sunt dato spacio æquales: punctum continget positione datam circumferentiam.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positionem ductam lineam abscissa à recta lineæ positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei, quod à data, & abscissa continetur: punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

Si in circulo positione dato sit datum punctum, per quod ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod sit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus continetur: punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget. Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utraque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

In pertractatione harum Propositionum, ab Apollonio, uti apparet, instar Theorematum traditarum, opera pretium nos facturos iudicavimus, si maximam illarum partem ut Problemata expediremus, ut tantò insignitior earum usus extaret: adeò quidem, ut non modò nuda istarum veritas cuique in proclivi esset; verùm ipse quoque easdem solvendi ac construendi modus indicaretur. Quoniam autem in plerisque harum propositionum propter casuum multitudinem plures figure fuissent exhibendæ, quibus huius operis sumptus, magis quàm

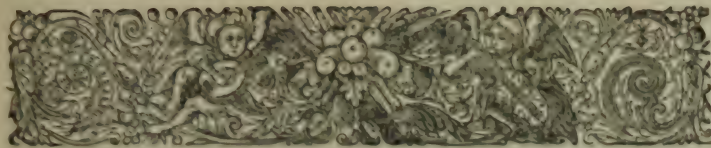
Cc

par

par erat, excrevissent, & in quibus omnibus explicandis longiores fuisset: idcirco casus tantum præcipuos elegimus, ne illorum multitudine Lectorem confunderemus, nevé ipsius patientiâ abuteremur. Vbi porro illud monendum duximus, nos consultò in id allaborasse, ut singula hic Theoremata & Problemata, quantum fieri posset, à se invicem essent distincta, ne concatenato ordine à capite usq; ad calcem forent evolvenda, sed ubique pro arbitrio Lectoris studium occuparetur.

Restat denique ut edocearis, Amice Lector, quo in primis consilio laborem hunc suscepimus: nimirum, ut novis exemplis ac nobilioribus Apollonii Problematis Geometriae Methodus, viri incomparabilis & nunquam satis laudati Renati des Cartes, in quam antehac commentaria edidimus, majorem lucem acciperet. Etenim ejus vestigiis, quibus in sua Geometria nobis præcessit, insistentes, ut calculi Geometrici studiosis ansam se exercendi subministraremus, nonnulla, ad ipsa universaliora reddenda, ab iisq; parum aliena, de nostro adjecimus. Ne autem frequentiori calculo dictæ Methodi imperitis aut minus exercitatis tadium excitaremus, nevé omnem ejus studiosis se exercendi materiam præriperemus; sed potiùs utrique parti, quantum in nobis est, satisfaceret: ideo in his Locis restituendis, is noster scopus fuit, ut solum in difficilioribus, qua non neminem remorari possent, analysis nostra exerceretur; in reliquis verò vulgaris pertractandi modus observaretur. E quibus (uti confidimus) Candido Lectori satis superque constabit, quid causa fuerit, cur sola difficiliora per calculum Geometricum expediverimus, scilicet ut nimiam Lemmatum multitudinem, quibus aliàs difficulter carere licuisset, evitarem; quamvis hac via aequè nobis in promptu fuisset, atque altera. Studio itaque nostro & inventis, qua in artis propagationem elucubravimus, fave ac frueri. Vale.

APOL-



APOLLONII PERGÆI
LOCA PLANA
RESTITUTA.

IN
PRIMI LIBRI
PROPOSITIONES,
THEOREMAT A
ET
PROBLEMAT A.

In ^{ma}m Propositionem

I THEOREMA.



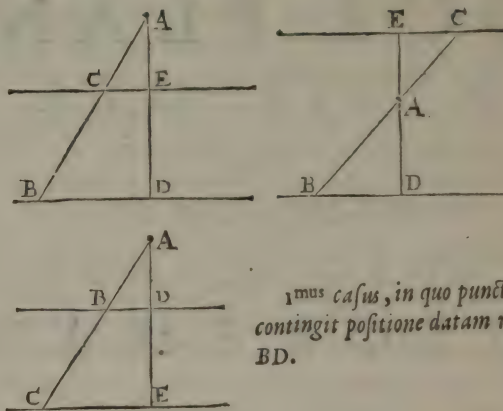
I à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ AB, AC, datam inter se habentes rationem; & B terminus unius AB contingat locum planum BD positione datum: similiter quoque C, terminus alterius AC, locum planum positione datum contingeret.

Cc 2

Con-

Constructio 1^{mi} casus.

Primò enim cadente B in recta linea BD, si ex alio quocunque in ea puncto D ad A recta linea perducatur, fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE: dico C punctum rectam lineam contingere, quæ per E ipsi BD ducitur parallela.



1^{mus} casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Cum enim per constructionem BA ad AC sit, sicut DA ad AE: erit^a juncta CE ipsi BD parallela. Hinc, quum una duntaxat recta per E duci possit, quæ ipsi BD parallela existat, necessum est, ut C punctum eandem contingat. Quod erat propositum.

*2^a 2. libr.
6. Elem.*

Constructio 2^{di} casus.

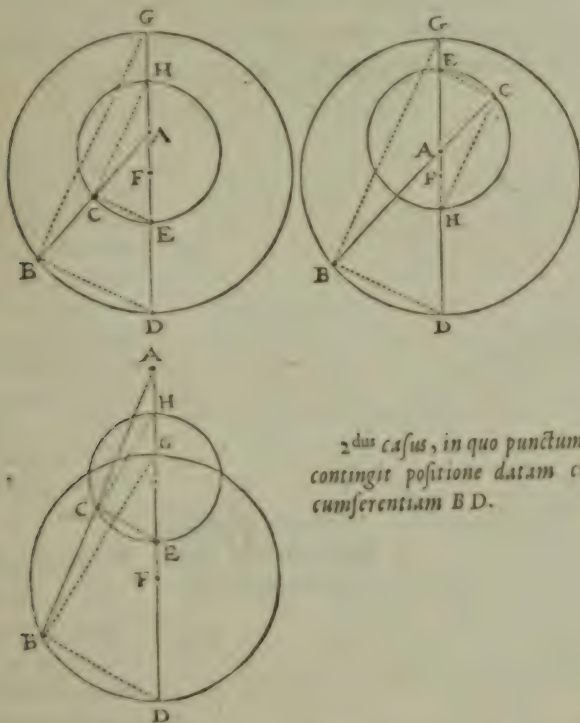
Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, agatur per puncta A, F recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, fiatque ut BA ad AC, sic DA ad AE; ac rursus ut BA ad AC, sic GA ad AH. Tum descripto circa diametrum EH circulo, dico punctum C cadere in ipsius circumferentiam.

De-

Demonstratio 2^{di} casus.

Junctis enim DB, BG, ut & EC, CH, quoniam per constructionem BA est ad AC, sicut DA ad AE: erit^b recta BD rectæ CE parallela. Eodem modo, cum BA ad AC sit, sicut GA ad AH, erit recta BG rectæ CH parallela. Hinc, cum propter parallelas BD, CE an-

b p 2. libr.
6. Elem.



2^{us} casus, in quo punctum B
contingit positione datam cir-
cumferentiam BD.

guli DBA & ECA^c sint æquales, similiterque propter parallelas BG, CH anguli ABG & ACH æquales sint, erit quoque DBG ipsi ECH æqualis. Est autem^d DBG, in semicirculo, rectus. Quare etiam ECH rectus erit. Ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.

c p 29. libr.

1. Elem.

d p 31. libr.

3. Elem.

Cc 3

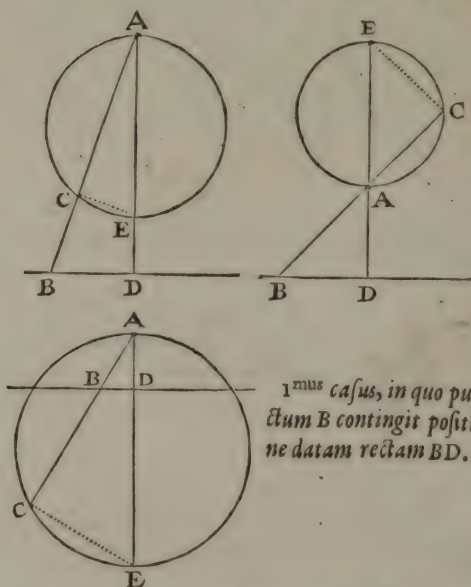
Si

Si ergo à dato puncto A in rectam lineam vel directum, &c. Quod erat ostendendum.

II THEOREMA.

Si à dato puncto A in rectam lineam vel directum dux agantur rectæ AB, AC, datum continentes spacium BAC; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum positione datum.

Constructio 1^{mi} casus.



Primò cadente B in recta linea BD, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis AD; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE, & circa diametrum AE circulus describatur: dico punctum C cadere in hujus circumferentiam.

1^{mus} casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.

Demonstratio 1^{mi} casus.

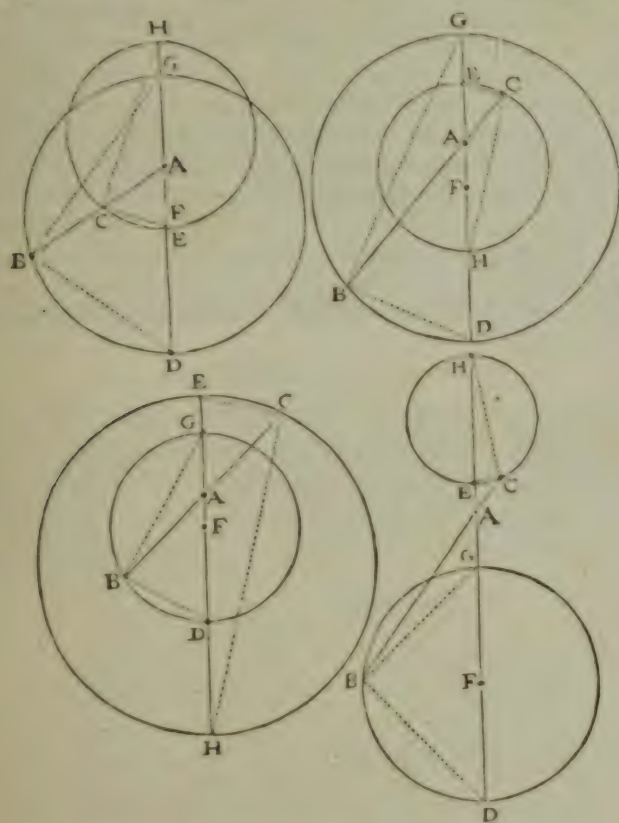
Etenim junctâ CE, cum in \triangle is BAD, EAC latera circa communem

aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt quoque ^a anguli ad D & C æquales. Est autem D angulus in \triangle o BAD per constructionem rectus. Quocirca & angulus ad C in \triangle o EAC rectus erit, ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propositum. -

Con-

Constructio 2^{di} casus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^{dus} casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

nata in D & G, fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE; ac rursus, ut GA ad AB, ita CA ad AH, & diametro EH circulus describatur: Dico in hujus circumferentiam cadere punctum C.

De-

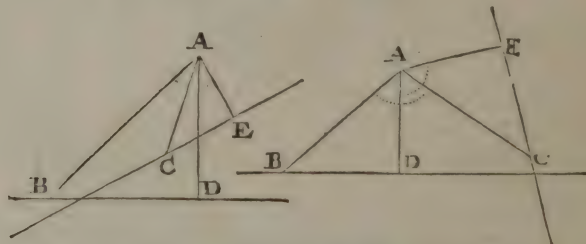
Demonstratio 2^{di} casus.

Junctis namque BD, BG, ut & CE, CH, quoniam in \triangle lis BAD, EAC circa communem aut æqualem angulum ad A latera ex constructione proportionalia sint, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE:
 b p 6. libr. erunt quoque ^b anguli DBA & AEC æquales. Rursus cum in
 6. Elem. \triangle lis BAG, HAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, GA ad AB, sicut
 c p 6. libr. CA ad AH: erunt similiter ^c anguli GBA & CHA æquales. Porro,
 6. Elem. quoniam additis aut detractis angulis DBA & GBA ^d ex iis fit re-
 d p 31. libr. ctus DBG: erunt pariter & anguli AEC & CHA additi aut detracti
 3. Elem. recto æquales. E quibus, cum ^e & ECH rectum angulum esse con-
 e p 32. libr. stet, sequitur, punctum C fore in circulo, cujus diameter EH. Quod
 1. Elem. erat propositum.

Ergo si à dato puncto A in rectam lineam vel directum &c. Quod erat ostendendum.

III THEOREMA.

Si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, datum angulum continentes BAC, datamque inter se habentes rationem; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget pariter & C, terminus alterius AC, locum planum, positione datum.

Constructio 1^{mi} casus.

1^{mus} casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.

Primo cadente B in recta linea BD, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis AD, ac juxta hanc ad punctum A construatur angulus

lus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE:
Dico punctum C cadere in rectam lineam per E ductam, huic AE
perpendicularem.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Quoniam enim ^a BA ad AC est, sicut DA ad AE; permutando
erit ^b BA ad AD, sicut CA ad AE. Porro cum æquales sint anguli
BAC & DAE, & iisdem addito aut subtracto communi angulo
DAC, angulus quoque BAD ipsi CAE est æqualis: erit, juncta CE,
 \triangle BAD ipsi CAE æquiangulum. Est autem angulus ad D in \triangle ^{lo}
BAD ^d rectus. Quare etiam angulus ad E in \triangle ^{lo} CAE rectus erit,
hoc est, juncta CE ipsi AE erit perpendicularis. Quum verò ad E
non nisi una recta duci possit, quæ ipsi AE perpendicularis existat,
manifestum est, C punctum eandem contingere. Quod erat propo-
situm.

^a Ex con-
structione.
^b p 16. libr.
^c Elem.
^c p 6. libr.
^d 6. Elem.
^d Ex con-
structione.

Constructio 2^{di} casus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F,
si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-
nata in D & G, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus
DAE æqualis dato BAC; fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE; ac
rursus ut BA ad AC, ita AG ad AH: dico C punctum in circuli cir-
cumferentiam cadere, cujus diameter EH.

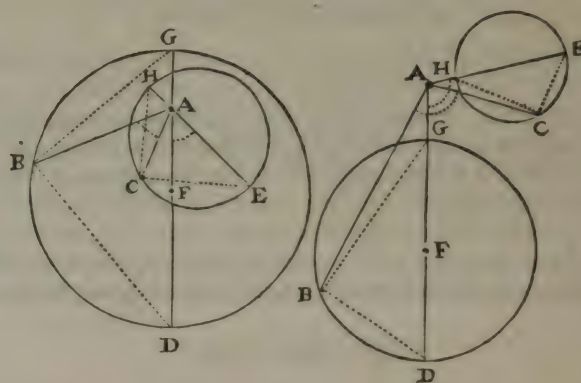
Demonstratio 2^{di} casus.

Etenim junctis BD, BG, ut & CE, CH, quoniam ^e BA est ad
AC, sicut DA ad AE: permutando erit ^f BA ad AD, sicut CA ad AE.
Porro cum anguli BAC & DAE s sint æquales, & iisdem addito
aut subtracto communi angulo DAC, angulus item BAD ipsi CAE
sit æqualis: erit pariter ^h & DBA angulus \triangle ^{lo} BAD angulo ECA
trianguli CAE æqualis. Rursus quia ⁱ BA est ad AC, sicut AG ad
AH: permutando erit ^k BA ad AG, sicut CA ad AH. Unde cum
hæc latera existant \triangle ^{locum} BGA & CHA, quæ sunt circa æquales
angulos BAG, CAH: erunt itidem anguli ABG & ACH in iisdem
 \triangle ^{lo}, ^l æquales. Quia autem anguli DBA, ABG additi aut detracti
faciunt rectum angulum DBG; at verò anguli ECA, ACH similiter
additi aut detracti faciunt angulum ECH: erit pariter ECH rectus

^e Ex con-
structione.
^f p 16. libr.
^g Elem.
^g Ex con-
structione.
^h p 6. libr.
ⁱ 6. Elem.
ⁱ Ex con-
structione.
^k p 16. libr.
^l Elem.
^l p 6. libr.
^o Elem.

Dd angu-

angulus, ac proinde C punctum in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.



2^{us} casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

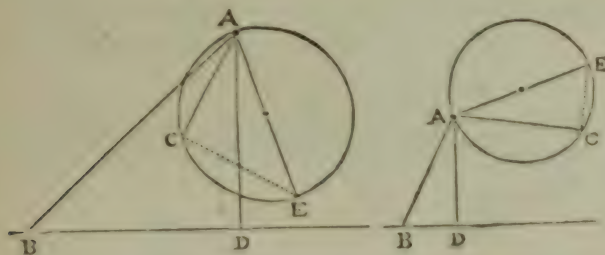
IV THEOREMA.

Si à dato puncto A duæ lineæ agantur AB, AC, datum angulum continentibus BAC, datumque comprehendentes spaciū BAC; & B terminus unius AB contingat locum planum BD, positione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum, positione datum.

Con-

Constructio 1^{mi} casus.

Primò cadente B in recta linea B D, si ex A super eam demittatur perpendicularis A D, ac juxta hanc ad punctum A constituatur angu-



1^{mus} casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam B D.

Ius DAE æqualis dato BAC; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter AE.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Angulo enim DAE per fabricam æquali existente angulo BAC, si iis addatur auferaturve communis angulus CAD: erit quoque angulus CAE ipsi BAD æqualis. Deinde junctâ CE cum latera \triangle orum BAD & EAC circa hosce æquales angulos ex constructione proportionalia sint: nimirum, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt similiter qui ad D & C anguli in iisdem \triangle is, per 6 prop. 6^{ta} libr. Elem., æquales. Est autem qui ad D in \triangle BAD rectus. Quare etiam is, qui ad C, in \triangle EAC rectus erit: adeoque punctum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propositum.

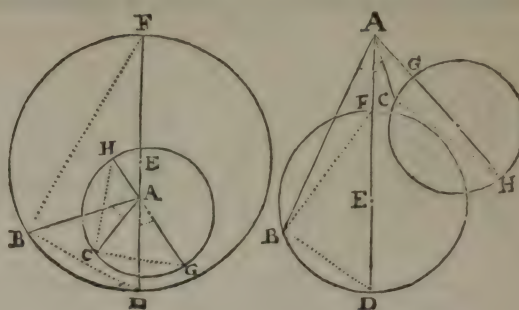
Constructio 2^{di} casus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia B D, cujus centrum E, si per puncta A, E recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & F, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus

D d 2

DAG

DA G æqualis dato BAC; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AG; ac



2^{dus} casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

rursus ut FA ad AB, ita CA ad AH: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GH.

Demonstratio 2^{di} casus.

Junctis BD, CG, quoniam, ut supra, anguli BAD & CAG sunt æquales, atque circa eos latera in \triangle BAD, CAG, per constructionem, proportionalia: videlicet, DA ad AB, sicut CA ad AG: erunt quoque anguli DBA & AGC in iisdem \triangle BAD, CAG, per 6 Prop. libr. 6. Elem., æquales. Rursus, quoniam junctis BF, CH, in \triangle BFA & CHA latera, quæ circa æquales angulos BAF, CAH, ex fabrica sunt proportionalia: nimirum, FA ad AB, sicut CA ad AH: erunt similiter anguli ABF & CHA in iisdem \triangle BFA, CHA, per 6.6., æquales. Hinc cum anguli DBA & ABF additi aut detracti rectum efficiant angulum DBF: erunt pariter anguli AGC & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & GCH angulum rectum esse, per 32 prop. 1. libr. Elem., constet, sequitur C punctum in circulo fore, cujus diameter est GH. Quod erat propositum.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

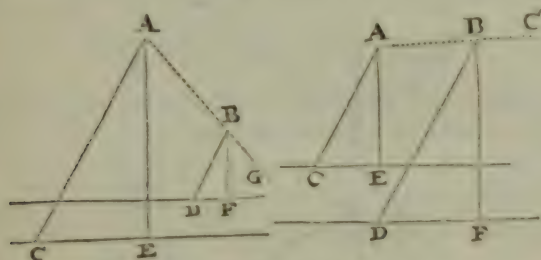
V THEO-

V THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ agantur rectæ parallelæ AC, BD, datam inter se habentes rationem AC ad BD; & C terminus unius AC contingat locum planum CE, positione datum: continget pariter & D, terminus alterius BD, locum planum positione datum.

Constructio 1^{mi} casus.

Primò cadente C in recta linea CE, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis AE, & ex B agatur ei parallela BF, fiatque ut CA



1^{mus} casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CE.

ad DB, ita AE ad BF: Dico D punctum cadere in rectam lineam, ductam per F ipsi BF perpendicularem.

Demonstratio 1^{mi} casus.

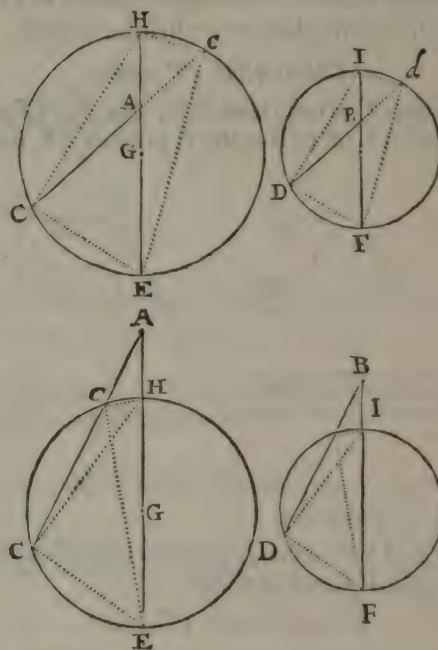
Quoniam enim, ductâ per puncta A, B rectâ lineâ ABG, anguli CAG, DBG, ut & EAG, FBG^a sunt æquales, erunt quoque CAE^a & DBF æquales. Deinde cum^b CA ad DB sit, sicut AE ad BF, permutando erit^c CA ad AE, sicut DB ad BF. Hinc, junctâ DE, quoniam^d anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter^d ad E & F anguli æquales. Est autem qui ad E in \triangle^o CAE rectus. Quare & is, qui ad F in \triangle^o DBF rectus erit; adeoque DF ipsi BF perpendicularis. Unde cum una tantum recta per F duci possit, quæ ipsi BF perpendicularis existat, sequitur D punctum eandem contingere. Quod erat propositum.

D d 3

Con-

Constructio 2^{di} casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia CE, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H; ductâque per B rectâ BF ipsi AE parallelâ, fiat ut CA



2^{do} casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam CE.

ad DB; ita AE ad BF; ac rursus ut CA ad DB, ita AH ad BI. Postea descripto circa diametrum FI circulo: Dico punctum D cadere in ipsius circumferentiam.

Demonstratio 2^{di} casus.

Etenim junctis CE, cH, ut & DF, dI, quoniam, ut supra, anguli CAE

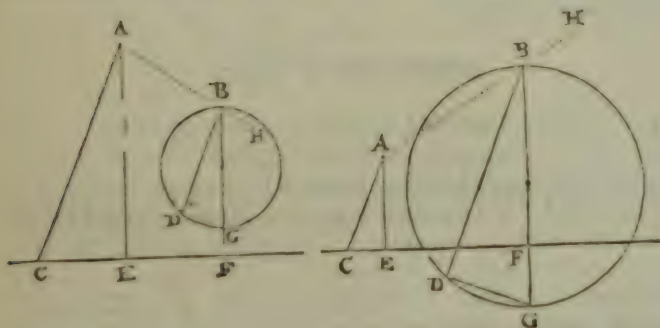
CAE & DBF æquales sunt, & ^e CA ad DB, ut AE ad BF, hoc est, ^e *Constru-*
permutando ^f CA ad AE, ut DB ad BF: erunt quoque ^g qui ad C & ^f *tionem.*
D angulis in \triangle CAE & DBF æquales. Porò cum ^h CA ad DB ^g *fp 10. libr.*
sit, sicut AH ad BI: permutando erit ⁱ CA ad AH, sicut DB ad BI. ^g *fp 6. libr.*
Unde cum hæc latera existant \triangle CHA & DIB, quæ circa æqua- ^{6.} *Elem.*
les angulos CAH & DBI: erunt quoque ^k illi qui ad C & D anguli ^h *Constru-*
in iisdem \triangle æquales. Quoniam autem anguli ECA & ACH ad- ^{6.} *tionem.*
diti aut detracti efficiunt rectum ECH; & anguli FDB & BDI simi- ⁱ *fp 16. libr.*
liter additi aut detracti faciunt angulum FDI: patet angulum FDI ^{5.} *Elem.*
quoque rectum fore. Ac proinde D punctum in circulo, cujus dia- ^k *fp 6. libr.*
meter FI. Quod erat propositum. ^{6.} *Elem.*

Ergo si à duobus datis punctis A & B, &c. Quod erat ostenden-
dum.

VI THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ agantur pa-
rallæ AC, BD, datum comprehendentes spacium
 \square AC, BD; & C terminus unius AC contingat locum
planum CE, positione datum: continget quoque D ter-
minus alterius BD locum planum, positione datum.

Constructio 1^{mi} casus.



1^{mo} casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CE.

Primò cadente C in linea recta CE, si ex A in ipsam demittatur
per-

perpendicularis AE, & ex B agatur ei parallela BF; fiatque ut EA ad DB, ita AC ad BG: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter est BG.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Ducta enim per puncta A, B recta ABH, quoniam anguli CAH, DBH, ut & EAH, FBH^a æquales sunt: erunt quoque anguli CAE, DBG æquales. Deinde cum^b EA ad DB sit, sicut AC ad BG, permutando erit^c EA ad AC, sicut DB ad BG. Hinc juncta DG, quoniam \triangle lorum CAE, DBG anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter anguli ad E & D^d æquales. Est autem qui ad E in \triangle lo CAE^e rectus. Quare & is, qui ad D in \triangle lo DBG rectus erit; adeoque D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propositum.

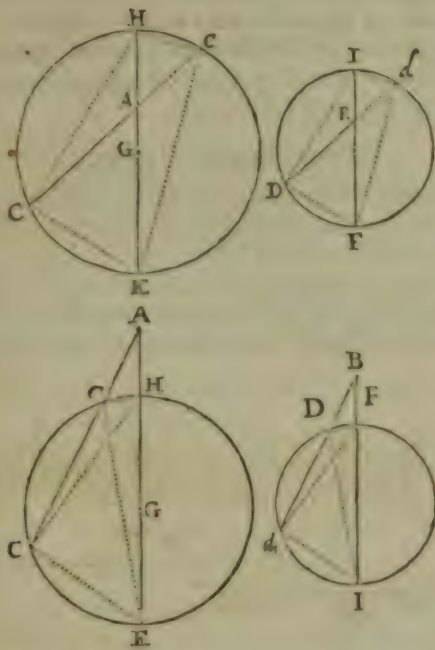
Constructio 2^{di} casus.

Deinde cadente C in circuli circumferentia CE, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H: ductaque per B recta BF ipsi AE parallelâ, fiat ut EA ad DB, ita AC ad BF; ac rursus ut AH ad DB, ita AC ad BI. Postea descripto circa diametrum FI circulo, dico punctum D cadere in ejus circumferentiam.

Demonstratio 2^{di} casus.

Junctis namque CE, CH, ut & DF, DI, quoniam, ut supra, anguli CAE & DBF sunt æquales, & EA ad DB, sicut AC ad BF, hoc est, permutando^f EA ad AC, sicut DB ad BF: erunt quoque qui ad C & F anguli in \triangle lis CAE & DBF^g æquales. Rursus cum AH ad DB sit, sicut AC ad BI, permutando erit^h AH ad AC, ut DB ad BI. Unde cum in \triangle lis CAH, IBD latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia existant: erunt similiter anguli, qui ad C & I in iidem \triangle lisⁱ æquales. Porro, quoniam additis aut detractis angulis ad C, hoc est, ECA & ACH, ex iis^k fit rectus ECH: erunt pariter & anguli ad F & I, hoc est, BFD & DIB, additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & FDI^l rectum angulum esse constet: sequi-

quitur D punctum fore in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propositum.



2^{us} casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam CE.

Ergo si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ parallelæ agantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

VII THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datamque inter se habentes rationem, & C terminus unius AC contingat locum planum CF, positione datum: contingeret pariter & D terminus alterius BD locum planum, positione datum.

Ee

Con-

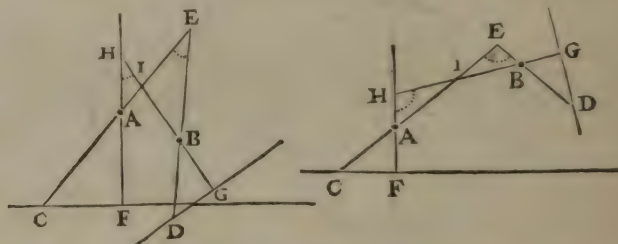
Constructio 1^{mi} casus.

Primò cadente C in recta linea CF, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis AF, & ex B ad hanc ducatur BH in dato angulo E, sicut 7^{mo} Problemate 2^{di} Tractatus est ostensum; fiat que ut CA ad BD, ita AF ad BG: Dico D punctum in rectam lineam cadere, ductam per G ipsi BG perpendicularem.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Cum enim anguli H & E in \triangle lis AHI & IEB, per constructionem, æquantur, anguli que AHI, EIB ad verticem constituti ^a æquales existant: erunt pariter HAI & IBE anguli ^b æquales. Est autem ^c angulus HAI æqualis angulo CAF, & IBE æqualis angulo DBG. Quare & anguli CAF & DBG æquales erunt. Porro cum per constructionem CA ad BD sit, sicut AF ad BG, permutando erit ^c CA

a p 15. libr.
1. Elem.
b p 32. libr.
1. Elem.
c p 16. libr.
5. Elem.



1^{mus} casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CF.

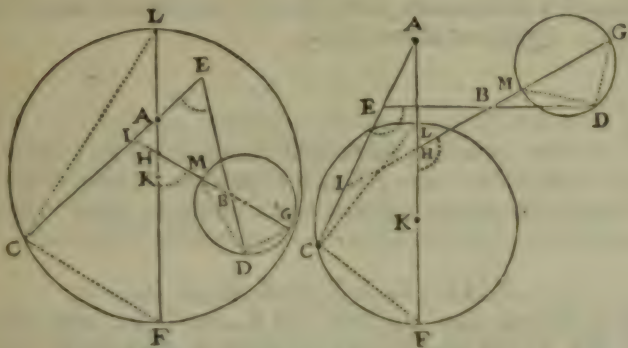
ad AF, sicut DB ad BG. Hinc, junctâ DG, quoniam \triangle lorum CAF, DBG latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia sunt, erunt pariter & qui ad F & G anguli ^d in iisdem \triangle lis æquales. Est autem angulus ad F in \triangle lo CAF, per constructionem, rectus. Quocirca & is, qui ad G in \triangle lo DBG, rectus erit. Adeoque, cum ad G ipsi BG unam solummodo perpendicularem ducere obtingat, patet eandem à D puncto contingi. Quod erat propositum,

d p 6. libr.
6. Elem.

Constructio 2^{di} casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia, cujus centrum K; si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in

in F & L, & ex B ad hanc ducatur BH in dato angulo E, sicut 7^{mo} Problemate 2^{di} Tractatus est ostensum; fiatque ut CA ad BD, ita AF



2^{us} casus, in quo punctum C contingit positione datam
circumferentiam CF.

ad BG; ac rursus ut CA ad BD, ita AL ad BM: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter GM.

Demonstratio 2^{di} casus.

Producta GBH, donec occurrat ipsi CAE in I, quoniam angulus
 FHB est æqualis sibi opposito IHA, sicque \triangle^{1a} IAH, IEB præter e p 15. libr.
 communem angulum ad I etiam æquales habent angulos IHA & 1. Elem.
 IEB: erit pariter & 3^{tius} IAH æqualis 3^{do} IBE, hoc est, DBG. Por- f p 32. Et 15.
 ro, junctis CF, DG, quoniam per constructionem CA est ad BD, lib. 1. Elem.
 sicut AF ad BG: permutando erit & CA ad AF, sicut DB ad BG. g p 16. libr.
 Unde cum \triangle^{lorum} CAF & DBG anguli ad A & B æquales sint ostens, 5. Elem.
 lateraque circa eos proportionalia: erunt similiter ^h qui ad C & D an- h p 6. libr. 6.
 guli in iisdem \triangle^{lis} æquales. Eodem modo, junctis CL, DM quoniam Elem.
 per constructionem CA est ad BD, sicut AL ad BM, permutando
 erit CA ad AL, sicut DB ad BM. Unde cum \triangle^{lorum} CLA & DMB
 anguli ad A & B æquales sint, lateraque circa eos proportionalia:
 erunt itidem qui ad C & D anguli in iisdem \triangle^{lis} æquales. Quia au-
 tem ad C anguli, hoc est, FCA & ACL additi aut detracti faciunt
 rectum angulum FCL; anguli que ad D, hoc est, GDB & BDM

similiter additi aut detracti faciunt angulum GDM: erit pariter GDM angulus rectus. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propositum.

Ergo si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

NOTA,

Si lineæ AC, BD eo sensu ducendæ forent, quo ductæ sunt AE, BE: nimirum, ut inflexæ datum contineant angulum E, vel inter se datam obtineant rationem AE ad BE: punctum ad inflexionem E similiter locum planum positione datum continget. Sicut hîc post manifestum fit ex 2^{do} tum hujus, tum sequentis libri Problemate.

VIII THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datumque comprehendentes spaciū \square AC, BD, & C terminus unius AC contingat locum planum CF positione datum: & alterius quoque BD terminus D locum planum positione datum continget.

Constructio 1^{mi} casus.

Primò cadente C in recta linea CF, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis AF, & ex B ad hanc agatur BH in dato angulo E, sicut 7^{mo} Problemate 2^{di} Tractatus est ostensum; fiatque ut AF ad BD, ita AC ad BG: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter BG.

Demonstratio 1^{mi} casus.

Productâ GBH, donec occurrat ipsi CAE in I, quoniam angulus FHB^a æqualis est sibi opposito IHA, sicque \triangle ^{1a} IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos IHA & IEB: erit pariter & 3^{ius} angulus IAH æqualis 3^{io} IBE, hoc est, DBG^b. Porro, junctâ DG, quoniam per constructionem AF est ad BD, sicut AC ad BG: permutando erit^c FA ad AC, sicut DB ad BD. Unde cum \triangle ^{locum} CAF, DBG anguli ad A & B æquales sint^d ostensi, & latera circa eos proportionalia: erunt similiter^d qui ad F & D

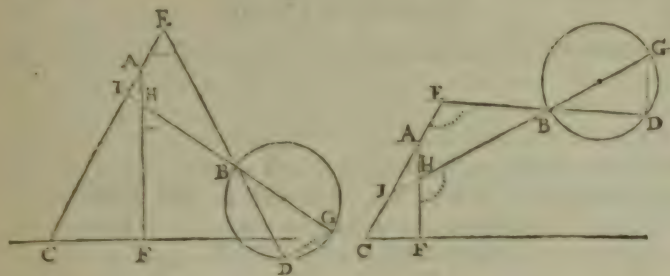
a p 15. libr.
1. Elem.

b p 32. & 15.
libr. 1. Elem.

c p 16. libr.
5. Elem.

d p 6. libr.
6. Elem.

& D anguli in iisdem \triangle is æquales. Est autem angulus ad F in \triangle lo CAF per constructionem rectus. Quare & is, qui ad D in \triangle lo

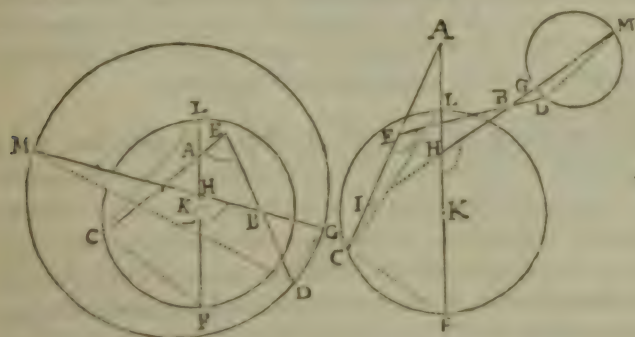


1^{us} casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CF.

DBG, rectus erit. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propositum.

Constructio 2^{di} casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia CF, cujus centrum K, si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiae termi-



2^{us} casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam CF.

nata in F & L, & ex B ad hanc in dato angulo E ducatur BH, sicut 7^{mo} Problemate 2^{di} Tractatus est ostensum; fiatque ut AF ad BD, ita

Ee 3

ita

222 APOLL. PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.

ita AC ad BG; ac rursus ut AL ad BD, ita AC ad BM: Dico D punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GM.

Demonstratio 2^{di} casus.

Etenim recta GBH secante producta rectam CAE in I, junctisque CF, DG, quoniam, ut supra, anguli IAH & DBG æquales sunt, & latera circa eos in \triangle^{lis} CAF, DBG proportionalia: erunt pariter anguli FCA & DGB in iisdem \triangle^{lis} æquales. Porro junctis CL, DM, quoniam per constructionem AL est ad BD, sicut AC ad BM: permutando erit LA ad AC, sicut DB ad BM. Unde cum in \triangle^{lis} CLA, MDB latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia sint: erunt similiter anguli ACL & DMB in iisdem \triangle^{lis} æquales. Quia autem anguli FCA & ACL additi aut detracti efficiunt rectum angulum FCL^h: erunt pariter anguli DGB & DMB additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum i & GDM rectum angulum esse constet, sequitur, D punctum fore in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propositum.

Ergo si à duobus punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

N O T A,

Si loco rectarum AC, BD, à datis punctis A & B ducendarum, expeterentur rectæ AE, BE, datum spacium \square AEB comprehendentes: punctum ad inflexionem E locum Super-solidum continget, lineam scilicet curvam 2^{di} generis, positione datam.

Hinc:

*Conclusio
1^{ma} Propo-
sitionis.*

Si duæ lineæ agantur vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam seu directum, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam rationem habentes, vel datum comprehendentes spacium; contingat autem terminus unius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget. Interdum quidem ejusdem generis, interdum verò diversum, & interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

Pro diversa scilicet datorum sive subiectorum consideratione. Quod erat demonstrandum.

SE.

223

S E Q V V N T V R
P R O B L E M A T A
I N

P R I M I L I B R I
P R O P O S I T I O N E S .

In 2^{da} Propositionem

I P R O B L E M A .

E dato puncto A rectam lineam ducere AD, datæ rectæ BC æqualem.

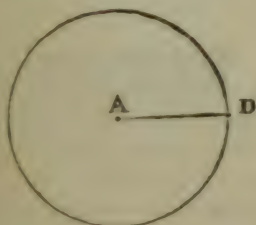
Constructio.

EX A, tanquam centro, intervallo BC describatur circulus; & ex A ad quodlibet in circumferentia punctum D agatur recta AD.

B ——— C

Dico AD æqualem esse BC. Cujus demonstratio est constructione manifesta est.

Hinc:



Si rectæ lineæ, magnitudine datæ, unus terminus datus sit, alter circumferentiâ concavam, positione datam, continget. Quod erat demonstrandum.

*Conclusio
2^{da} Propositionis.*

N O T A ,

In conclusione dici: Si rectæ lineæ magnitudine datæ, &c. non autem, positione datæ, &c. Quod ipsum vult Apollonii Propositio, quæ intelligi nequit, nisi linea simul magnitudine data sit. Dato autem rectæ alicujus, positione & magnitudine datæ, termino uno, alter quoque datus esse intelligitur, per 27 Datorum Euclidis. Eo ipso tamen non dicimus, alterum hujus lineæ terminum indifferenter ad quodcunque in circumferentia punctum cadere, eo sensu, quem omnes

omnes Apollonii Propositiones hujus Tractatus præ se ferunt, sed in unum duntaxat locum determinatum, ad quem inveniendum nullâ circuli descriptione opus est. Immutavimus igitur has voculas, scribarum ignorantia & negligentia procul dubio illapsas; prout hanc licentiam, eandem ob causam in conclusione plurium aliarum Propositionum hîc sequentium nobis sumpsimus.

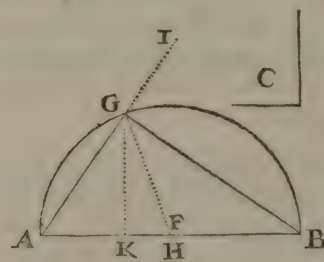
In 3^{ti}am Propositionem,

II PROBLEMA.

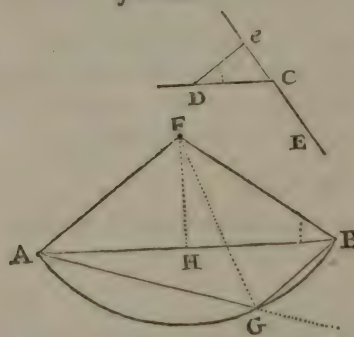
A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AG, BG, continentes angulum AGB, dato angulo C æqualem.

Constructio.

Primò. Si datus angulus C est rectus, ducta AB secetur bisariam in F, descriptoque ex F intervallo AF vel FB super AB semicirculo AGB: Dico, si ex punctis A, B ad quodlibet in circumferentia punctum G agantur rectæ AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C.



1^{mus} casus, in quo datus angulus C est rectus.



2^{us} casus, in quo datus angulus C est obtusus.

Quòd si datus angulus C sit obtusus, producto altero laterum DC, CE, erigatur ex aliquo puncto e, in producto, ad ipsū perpendicularis e D, donec cum latere altero CD concurrat in D, & ad A & B anguli BAF & ABF æquales constituentur angulo CDe. Tunc descripto ex F, ubi lineæ æquales angulos comprehendentes concurrunt, circuli segmento AGB, intervallo FA vel FB, ad alteram

ram partem lineæ AB: Dico, si ex punctis A, B ad quodcunque in circumferentia punctum G agantur AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato DCE.

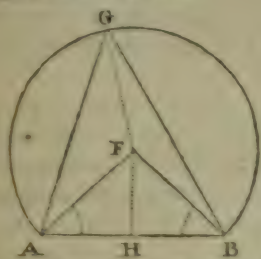


Figura A, ubi angulus AGB cadit supra angulum AFB.

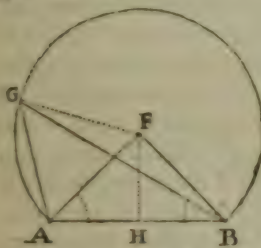


Figura B, ubi angulus AGB cadit juxta angulum AFB.

Denique, si datus angulus C sit acutus, agatur è quolibet puncto E, in altero laterum DC, CE, ad ipsum perpendicularis ED, occurrens lateri DC in D. Tum ad AE constitutis angulis BAF & ABF, angulo EDC, (ut supra) æqualibus, descriptoque ex F super AB, intervallo AF vel FB, ad eandemque partem, circuli segmento AGB: Dico rursus, ductis ex A & B ad quodvis in circumferentiâ punctû G rectis AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C.

Figura
3^{ti} casus,
in quo
datus
angulus
C est acutus.

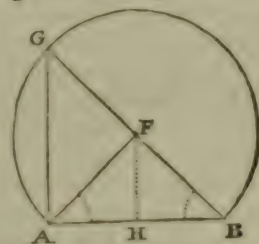


Figura C, ubi punctum G cadit in altera linearum productarum AF, FB.

Demonstratio.

Jungatur enim FG, & ex F in AB demittatur perpendicularis FH. Deinde in 1^{mo} & 2^{do} casu producatur AG ad I.

Quoniam itaque latera AF, FG \triangle^{li} AFG inter se æqualia sunt, erunt quoque anguli AGF, FAG æquales. Eodem modo, cum latera BF, FG \triangle^{li} BFG sint æqualia, erunt etiam anguli BGF, FBG æquales. Ideoque in 1^{mo} & 2^{do} casu, ut & in figura A tertii casus, angulus AGB æqualis erit angulis FAG, FBG simul sumptis. At in

ag s. libr. 1.
Elem.

Ff

figura

figura B angulus AGB erit æqualis angulo FAG , subtracto eidem angulo FBG .

b p 32. libr. 1. Elem. Siquidem igitur in 1^{mo} casu b angulus externus BGI itidem est æqualis duobus angulis FAG & GBF , sequitur angulum AGB æqualem esse angulo BGI , adeoque illum in primo casu esse rectum, datoque angulo C æqualem.

c p 32. libr. 1. Elem. Porro cum in 2^{do} casu bini anguli FAG , GBF , hoc est, angulus AGB cum binis AGB , BFA c quatuor rectos angulos constituent; atque etiam angulus AGB cum binis BAG , GBA duos rectos efficiant: sequitur, si illuc bis & hic semel auferatur angulus AGB , angulum reliquum BFA æqualem esse bis reliquis BAG , GBA , hoc est,

d p 32. libr. 1. Elem. d duplo anguli BGI . Est autem angulus AFB duplus quoque anguli AFH vel DCE e . Quocirca in 2^{do} casu angulus BGI erit æqualis angulo DCE , & consequenter angulus AGB f æqualis angulo DCE .

e p Constr. 32. libr. 1. Elem. Eodem modo, quoniam in fig. A tertii casus anguli BAF , FBA

f p 13. libr. 1. Elem. cum angulis FAG , GBF , hoc est, cum angulo AGB , unà cum eodem angulo AGB & duos rectos angulos efficiunt; atq; iidem anguli BAF ,

g p 32. libr. 1. Elem. FBA cum angulo AFB similiter duos rectos efficiant: erit angulus AFB in eadem figura duplus anguli AGB . Pari ratione, cum in fig. B

h p 32. libr. 1. Elem. anguli BAF , FBA cum angulo FAG , dempto eidem angulo FBG , hoc est, cum angulo AGB , unà cum eodem angulo AGB b duos rectos constituent; itemque iidem anguli BAF , FBA cum angulo AFB duobus rectis sint æquales: erit angulus AFB in eadem figura duplus quoque anguli AGB . Hinc cum angulus AFB in hisce duabus figuris duplus sit anguli AGB , ac ipse quoque duplus sit anguli AFH vel C : patet angulum AGB in iisdem figuris esse æqualem dato angulo C .

i p 32. libr. 1. Elem. Denique cum in fig. C i angulus externus AFB æqualis sit duobus internis oppositis & æqualibus angulis AGF , FAG , isque ideo duplus sit anguli AGF seu AGB ; simulque AFB duplus sit anguli AFH vel C : manifestum est, angulum AGB in eadem figura æqualem esse dato angulo C .

A datis ergo duobus punctis A & B duas rectas lineas infleximus AG , BG , angulum efficientes AGB , dato angulo C æqualem. Quod erat faciendum.

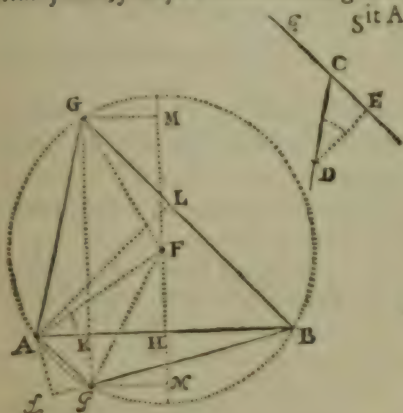
E quibus liquet, cum in genere sit ostensum, lineas AG , BG , ex A & B ad quodcunque punctum G in circumferentia AGB eductas, angulum constituere AGB dato angulo C æqualem:

Quòd,

Quòd,
Si à duobus punctis datis duæ rectæ lineæ inflectantur, *Conclusio*
datum angulum continentes, commune ipsorum punctû *3^{ia} Propo-*
contingat circumferentiam concavam, positione datam. *sitionis.*
Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hoc Problema unà cum precedente aliter ab Euclide demonstratum est in
Geometria Elementis, uti videre est Prop. 32 tertii, & 2^a primi. Quoniam
autem ex allata demonstratione aliarum insignium Propositionum Euclidean-
rum veritas constat, ut 20, 21, & 31 tertii: opera pretium nos facturos ar-
bitrati sumus, si majoris exercitationis gratiâ operationem hic adjiceremus.



Sit $AH \propto HB \propto a$

$CE \propto b$

$ED \propto c$

$KH \propto x$, ergo $KB \propto a + x$

$KG \propto y$.

$\frac{a+x}{y}$

$\frac{+ax+xx}{y}$

$\frac{aa+ax}{y}$

add. $\left\{ \begin{array}{l} \square KB. \frac{aa+2ax+xx}{y} \\ \square KG. \frac{yy}{y} \end{array} \right.$

summa, seu $\square GB. \frac{aa+2ax+xx+yy}{y}$

$GB. \sqrt{aa+2ax+xx+yy}$.

Pro qua radice scribatur brevitatis
causâ z , & pro $aa+2ax+xx+yy$
scribatur zz .

Tum fiat propter similitudinem $\triangle^{num} KGB, ABL$

$\left. \begin{array}{l} GB \quad BA \quad \left\{ \begin{array}{l} KG. y \\ KB. a+x \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{ad} \left\{ \begin{array}{l} AL. \frac{2ay}{z} \\ BL. \frac{2aa+2ax}{z} \end{array} \right. \text{quâ subtractâ ex GB, } z,$

relinquitur $LG \frac{zz-2aa-2ax}{z}$.

Rursus cum propter similitudinem $\triangle^{num} DCE, AGL$ proportionales sint,
 $\frac{DE}{c} = \frac{EC}{b} = \frac{AL}{\frac{2ay}{z}} = \frac{LG}{\frac{zz-2aa-2ax}{z}}$: erit productum sub extremis DE, LG , *ap 16. libr.*
 $\frac{c}{z} = \frac{b}{z} = \frac{2ay}{z} = \frac{2ax}{z}$: æquale productum sub mediis $E C, A L$, *6. Elem.*
Ff 2 hoc

hoc est, $\frac{cz\zeta^2 - caa - 2cax}{z} \propto \frac{2bay}{\zeta}$

$$\text{vel } \frac{cz\zeta^2 - caa - 2cax}{z} \propto \frac{2bay}{\zeta}$$

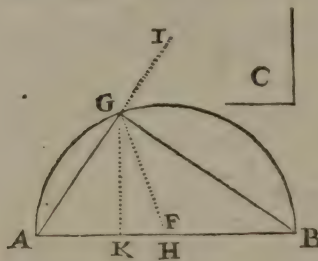
Dividatur utrinque
per c , fit $\frac{\zeta^2 - aa - 2ax}{c} \propto \frac{2bay}{c}$

Unde restituendo

valorem ipsius $z\zeta$, erit $aa + 2ax + xx + yy - 2aa - 2ax$, hoc est,
 $--aa + xx + yy \propto \frac{2ba}{c}y$, vel in debita forma: $yy \propto \frac{2ba}{c}y + aa - xx$.

Ad tollendam fractionem $\frac{2ba}{c}$, fiat, ut c ad b , hoc est, ut DE ad EC ,
ita $2a$ ad $\frac{2ba}{c}$, vel ita a , hoc est, AH , ad $\frac{ba}{c}$. quam voco d , & designare

suppono lineam HF . Quâ ratione fit $y \propto d + \sqrt{dd + aa - xx}$, nimirum, si x minor sumatur quàm a , & datus angulus C sit acutus. Sed y & designat
+ vel -- $\propto -d + \sqrt{dd + aa - xx}$, si angulus sit obtusus. Et $y \propto d \pm \sqrt{dd + aa - xx}$, si x sit major quàm a , & angulus C acutus. ubi porro patet, si datus angulus C sit obtusus, x non debere majorem sumi quàm a .



Præterea liquet etiam, xx non debere majus sumi quàm dd & aa simul juncta, hoc est, KH non majorem quàm AF vel FG . secus si fit, non inveniretur punctum G . quod quidem hîc, uti apparet, in circuli peripheriam cadit, cujus centrum est F , & radius AF .

Denique si datus angulus C est rectus, quoniam eo casu CE æqua-

lis b est æqualis o : erit æquatio $yy \propto aa - xx$, hoc est, $y \propto \sqrt{aa - xx}$. Ostendens punctum G repertum iri in circumferentiam semicirculi, cujus diameter sit AB , & centrum H . Quo casu x semper minor erit quàm a .

In

In 4^{ta} Propositionem.

III PROBLEMA.

Super data recta AB triangulum describere AEB, dato rectilineo C æquale.

Constructio.

rectilineo C: junctisque AE, EB, erit \triangle^{lum} AEB dato rectilineo C æquale.

Demonstratio.

Per 34.^{1^{mi}} Elem. $\triangle AFE$ est æquale \triangle^{lo} AED, & per 38 ejusdem $\triangle AED$ est æquale $\triangle DEB$. Unde sequitur bina \triangle^{1a} AFE AED, hoc est, parallelogrammum ADEF, esse æquale binis \triangle^{lis} AED, DEB, id est, \triangle^{lo} AEB. Est autem parallelogrammum ADEF per constructionem æquale rectilineo C. Æquale igitur etiam est $\triangle AEB$ ipsi rectilineo C: adeoque super AB descriptum $\triangle AEB$, dato rectilineo C æquale. Quod erat faciendum.

Porro, quoniam per 37.^{1^{mi}} Elem. omnia \triangle^{1a} , ut AEB, AGB, super eadem basi AB, & inter eandem parallelam FEG constituta, æqualia sunt: patet, si ex duobus terminis lineæ AB ad quodcunque in linea FEG punctum G ducantur rectæ AG, BG, ipsas constituere $\triangle AGB$, dato rectilineo C æquale.

Si ergo trianguli spaci magnitudine dati, basis positione & magnitudine data sit: vertex ipsius contingeret rectam lineam, positione datam.

Quod erat demonstrandum.

Conclusio
4^{ta} Propo-
sitionis.

Ff 3

In

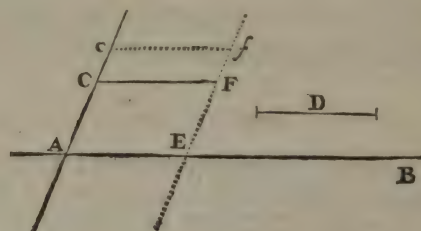
In 5^{ta}m Propositionem.

IV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis AB, AC, ad unam AC rectam lineam ducere CF, datæ rectæ D æqualem, & alteri AB parallelam.

Constructio.

Ex A, intersectione rectarum AB, AC, statuatur in AB linea AE æqualis datæ D, & per E ducatur EF parallela AC. Dico quod, ex



puncto quolibet C in linea AC ducta CF parallela AB, donec attingat lineam EF, ipsa CF sit quæsita. Cujus Demonstratio ex 34. 1^{mi} Elem. est manifesta.

*Conclusio
5^{ta} Propo-
sitionis.*

Si ergo rectæ lineæ, magnitudine datæ, & cuius positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat rectam lineam, positione datam: & alter terminus rectam lineam, positione datam, continget.

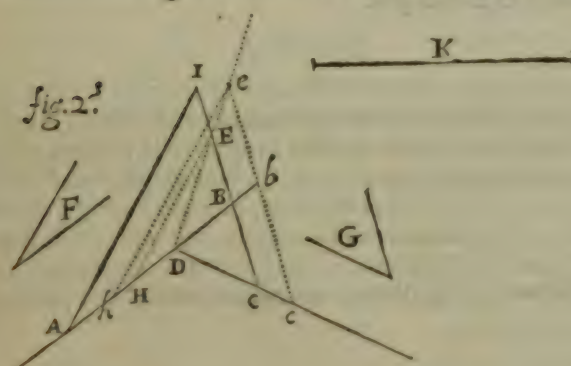
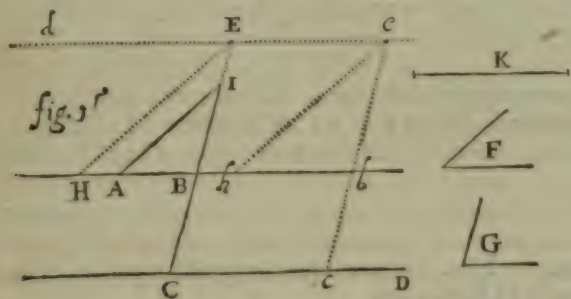
Quod erat demonstrandum.

In

In 6^{ta}m Propositionem.

V P R O B L E M A.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD; invenire extra ipsas punctum E, à quo ad positione datas AB, CD ductæ duæ rectæ EH, EC in datis angulis F, G sint ad se invicem in ratione data r ad f .



Ponamus angulos BAI, DCB esse æquales datis angulis F, G; itemque lineas AI, CB (ubique ad AB, CD ductas) concurrere in I. Deinde sit AI ad K, sicut r ad f .

Con-

Constructio.

Fiat, ut excessus, quo K superat BI, ad BI, ita BC ad BE. Tum ductâ E d parallelâ AB vel CD (ut in 1^{ma} figura), vel ductâ ex D per E rectâ (ut in 2^{da} fig.): si ab aliquo in ea puncto e ad AB, CD ducantur rectæ eh, ec parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G: erit he ad ec, sicut AI ad K, vel rad f.

Demonstratio.

a p 18. libr.
5. Elem.

Cum, per constructionem, excessus, quo K superat BI, sit ad BI, sicut BC ad BE; erit componendo ^a K ad BI, sicut CE ad EB. Jam autem ratio CE ad EB composita est ex ratione CE ad EH, & ex ratione HE ad EB, vel AI ad IB. Quocirca etiam ratio K ad BI ex iisdem rationibus erit composita. Eodem modo, cum ratio K ad BI sit composita ex ratione K ad AI, & ex ratione AI ad IB: erit ratio composita ex ratione CE ad EH, & ex ratione AI ad IB eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad AI, & ex ratione AI ad IB. Unde sublatâ utrinque communi ratione AI ad IB, erit reliqua ratio CE ad EH eadem reliquæ rationi K ad AI, vel rad r. Quod erat faciendum. Idem similiter liquet de quolibet puncto e, ubicunque in recta DE assumpto.

NOTA.

Quandoquidem ex hoc Problemate sequens facilè innotescit, ex eoque primum membrum Propositionis sit manifestum: non abs re erit ad faciliorem secundi membri Propositionis captum (quando una duarum linearum, à quæsito puncto ducendarum, simul cum illa, ad quam altera datam habet rationem, data est, idemque punctum similiter in rectam lineam positione datam cadit) præmittere sequentia duo VI & VII Problemata: cum ipsa non minus grata, quam ad Propositionem universaliorem reddendam proficua fore judicaverimus.

VI PRO-

VI PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD , invenire extra ipsas punctum E , à quo in datis angulis F, G eductis duabus rectis EC, EH ad positione datas AB, CD , altera EC ad alteram EH datâ lineâ Q sit major quàm in ratione data r ad f .

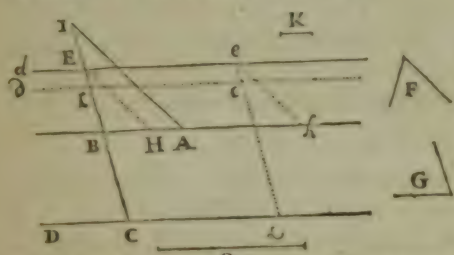
Sint (ut ante) anguli BAI, DCB æquales angulis F, G , & lineæ AI, CB , ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I . Deinde sit Ct æqualis Q , & K ad AI , ut r ad f .

Constructio.

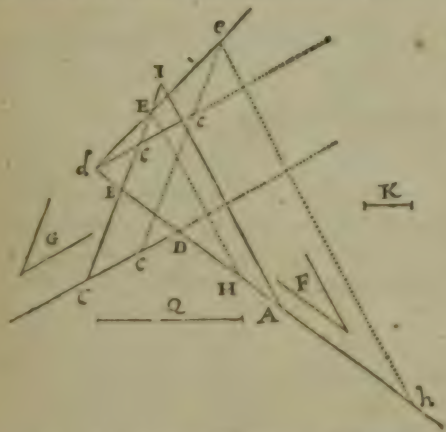
Ductâ ex c recta ct parallelâ DC , occurrente in 2^{do} casu cum AB in d , fiat, ut excessus, quo BI superat K , ad BI , ita Be ad BE . Tum ductâ E parallelâ AB vel CD (ut in 1^{mo} casu), aut ductâ ex d per E rectâ indefinitâ (ut in 2^{do} casu), assumptoque in ea aliquo puncto e , à quo, si ad CD, AB ducantur rectæ ec, eb parallelæ ipsis CI, IA , hoc est, in datis angulis G & F : Dico ct e ad eb datâ Q majorem esse, quàm in ratione data K ad AI , vel r ad f .

Similiter quoque invenitur punctum e , si ct e ad eb datâ lineâ Q minor sit, quàm in ratione data K ad AI , vel r ad f .

De-



1^{mus} casus, in quo data lineæ AB, CD sunt parallelæ.



2^{us} casus, in quo data lineæ AB, CD concurrunt in D .

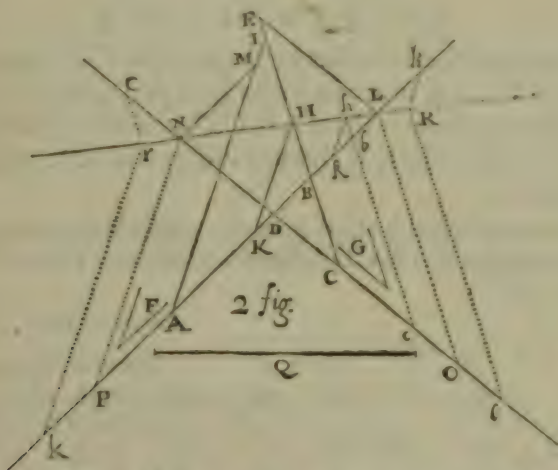
Gg

Demonstratio 1^{mi} casus.

Cum \triangle^{1a} KHB, AIB similia sint, ^a erit KH ad HB, ut AI ad IB, ^{a p 4. libr.}
 & componendo ^b KH, HB ad HB, ut AI, IB ad IB. Sed sicut AI, ^{6. Elem.}
 IB ad IB, ita per constructionem est quoque BE ad BH. ^{b p 18. libr.}
 itaque sunt KH, HB simul sumptæ ipsi BE. ^c Equales ^{5. Elem.}
 BC, erunt quoque KH, HC simul sumptæ æquales EC, hoc est, Q. ^{c p 9. libr.}
 Eadem est ratio de quolibet puncto *h*, ubicunque in recta *d* H assum- ^{5. Elem.}
 pto.

Constructio 2^{di} casus.

Ducatur ex E recta EL parallela DC, occurrens ipsi AB in L.
 Deinde sumatur AM æqualis CE, ducaturque ex M recta MN pa-
 rallela AB, occurrens ipsi DC in N, jungaturque NL. Dico, si ex ali-



2^{das} casus, in quo data lineæ AB, CD concurrunt in D.

quom ea puncto *h* ad positione datas AB, CD ducantur *hk*, *hc* paral-
 lelae AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G, quod aggregatum ipsarum
kh, *hc* sit æquale datæ rectæ CE vel Q.

Gg 2

De-

Demonstratio 2^{di} casus.

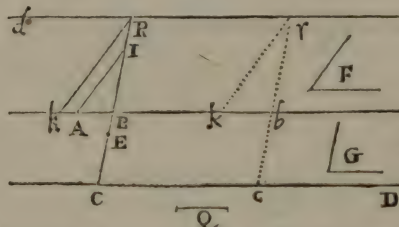
d p 34. libr.
1. Elem.
e p 24. libr.
5. Elem.

Ductis LO, NP parallelis CI, IA, occurrentibus datis DC, AB in O & P: erit LO^d æqualis CE, & NP æqualis AM vel CE. Porro cum propter similitudinem \triangle^{rum} NHC, NLO, NH sit ad NL, ut HC ad LO vel EC; itemque propter similitudinem \triangle^{rum} LHK, LNP, LH sit ad LN, ut HK ad NP, hoc est, CE: erit quoque^e, (quia NH, ceu prima, est ad NL, ceu secundam, sicut HC, ceu 3^{tia}, ad EC, ceu 4^{ta}m; nec non HL, ceu 5^{ta}, ad NL 2^{da}m, sicut HK, ceu 6^{ta}, ad EC 4^{ta}m), ut aggregatum ipsarum NH, HL, 1^{ma} & 5^{ta}, ad 2^{da}m NL, ita aggregatum ipsarum HC, HK, 3^{ta} & 6^{ta}, ad 4^{ta}m EC. Quocirca sicut aggregatum ipsarum NH, HL est æquale ipsi NL, ita quoque aggregatum ipsarum HC, HK erit ipsi EC vel Q æquale. Eadem est ratio de quovis puncto *h*, ad libitum assumpto in recta NL, inter puncta N, L. Datis ergo positione &c. Quod faciendum erat.

VIII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD, invenire extra ipsas punctum R, à quo eductis ad positione datas AB, CD, in datis angulis F, G, duabus rectis Rk, RC, harum differentia data rectæ Q sit æqualis.

Fiant rursus anguli BAI, DCB æquales angulis F, G, lineæque AI, CB, ubicunque ad AB, CD ductæ, convenient in I. Deinde sit CE æqualis Q.

Constructio 1^{mi} casus.

1^{mus} casus, in quo datae lineæ AB, CD sunt parallelæ.

æque differentia ipsarum cr, rk æqualis datæ CE vel Q.

Fiat ut differentia, quæ est inter AI, IB ad IB, ita BE ad BR; ductæque dR parallelæ AB vel CD, agatur ex aliquo in ea puncto r ad ipsas AB, CD rectæ rk, rc parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G: erit-

De-

Demonstratio 1^{mi} casus.

Quoniam, propter similitudinem Δ^{cum} hRB , $AI B^a$, hR est ad RB , ut AI ad IB , erit dividendo ^b sicut differentia ipsarum hR , RB ad RB , ita differentia ipsarum AI , IB ad IB . Sed ut differentia ipsarum AI , IB ad IB , ita quoque per constructionem est BE ad BR . Quocirca ^a differentia ipsarum hR , RB æqualis est ipsi BE , idcirco ^c & Rh æqualis RE ; ac proinde CE , hoc est, Q , differentia, quæ est inter RC , Rh . Idem similiter accipe de quolibet puncto r , ubicunque in recta dR assumpto.

a p 4. libr.

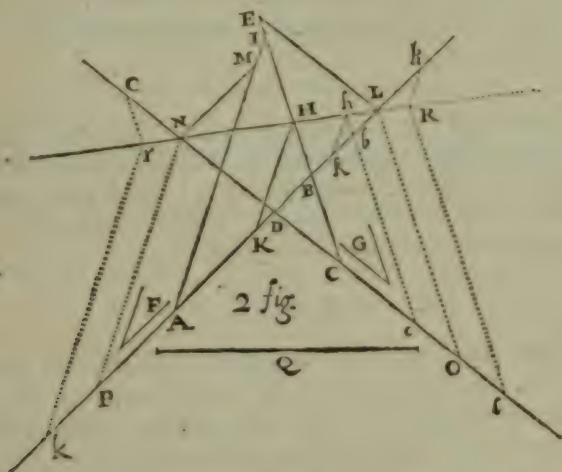
6. Elem.

b p 17. libr.

5. Elem.

c p 9. lib. 5.

Elem.



2^{us} casus, in quo data lineæ AB , CD concurrunt in D .

Constructio 2^{di} casus.

Inventâ, ut prius in 2^{do} casu præcedentis Problematis, lineâ NL ,eductisq; à puncto aliquo R , in ea utrinque producta assumpto, rectis Rh , Rt parallelis AI , IC , hoc est, in datis angulis F , G ad positione datas AB , CD : erit differentia ipsarum Rt , Rh æqualis datæ CE vel Q .

Gg 3

De-

Demonstratio 2^{di} casus.

d p 4. libr. Cum \triangle^1 NRc, NLO^d similia sint, erit NR ad NL, ut Rc ad
 6. Elem. LO vel CE. Rursus, quoniam \triangle^1 LRh, LNP similia sunt, erit
 LR ad LN, sicut Rh ad NP vel CE. Quocirca cum NR
 ceu 1^{ma} sit ad NL 2^{da}m, sicut Rc ceu 3^{ta} ad EC 4^{ta}m; itemque
 LR ceu 5^{ta} ad NL 2^{da}m, sicut Rh ceu 6^{ta} ad EC 4^{ta}m: erit quoque
 e Vide Cla-
 vium ad
 24. libr. 5.
 Elem. differentia inter primam NR & 5^{am} LR ad 2^{da}m NL, sicut diffe-
 rentia, quæ est inter 3^{iam} Rc & 6^{am} Rh, ad 4^{am} EC. Est autem
 differentia ipsarum NR, LR æqualis 1^{da} NL. Quare etiam differen-
 tia ipsarum Rc, Rh est æqualis 4^{ta} EC, hoc est, datæ Q. Idem simi-
 liter accipiendum est de quovis puncto r, in producta LN, ad libi-
 tum assumpto, extra puncta N & L. Datis ergo positione &c. Quod
 erat faciendum.

Corollarium.

Ex his liquet, ductis à quolibet puncto h in linea NL, assumpto
 inter puncta N & L, ad positione datas AB, CD duabus rectis hk, hc
 parallelis AI, IC, summam ipsarum hk, hc ipsi CE fore æqualem;
 At assumpto puncto r utcumque in producta NL extra N & L, diffe-
 rentiam ipsarum rk, rc ipsi CE esse æqualem.

IX. PROBLEMA.

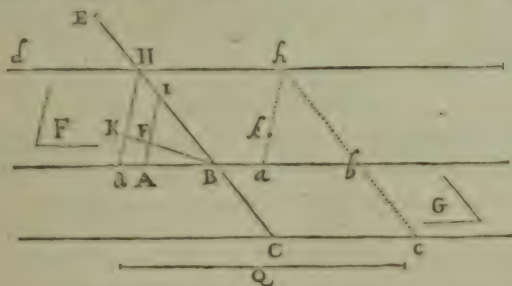
Datis positione duabus rectis parallelis vel concur-
 rentibus AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo
 eductis in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD
 duabus rectis Ha, Hc, ut harum una HC simul cum HK,
 eâ, ad quam altera Ha datam habet rationem r ad s, sit
 æqualis datæ rectæ Q.

Fiant, ut ante, anguli BAI, DCB æquales datis F, G; & lineæ AI,
 CB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I. Deinde sit AI
 ad IF, ut r ad s; & CE, sicut ante, æqualis Q.

Con-

Constructio I^{mi} casus.

Fiat ut aggregatum ipsarum FI, IB ad IB, ita BE ad BH; ducta'que
 a H parallela AB vel DC: dico, si ex B per F agatur recta B F K, do-

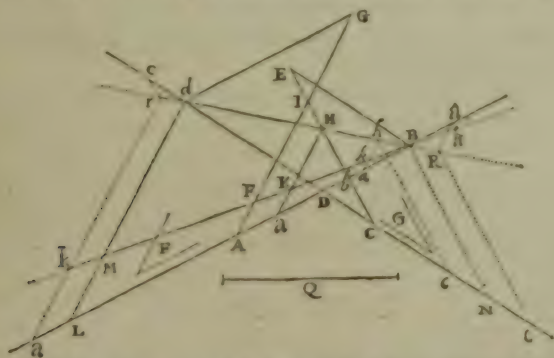


1^{us} casus, in quo data lineæ AB, DC sunt parallelæ.

nec occurrat rectæ a H ipsi A I parallelæ in K, a H esse ad H K, sicut
A I ad I F, vel r ad f; & H C simul cum H K esse æqualem ipsi C E
vel Q.

Demonstratio I^{mi} casus.

Quoniam $\Delta^1 a$ a H B, A I B, ut & K H B, F I B similia sunt: erit a p 4. libr.
a H ad H B, ut A I ad I B; & H B ad H K, ut I B ad I F: ideoque b A H ad
b p 22. libr.
s. Elem.



2^{us} casus, in quo data linea AB , CD concurrunt in D .

HK, ut AI ad IF. Porro cum KH sit ad HB, sicut EI ad IB; componendo

c p 18. libr. nendo erit ^c sicut aggregatum ipsarum KH, HB ad HB, ita aggrega-
s. Elem. tum ipsarum FI, IB ad IB. Est autem per constructionem BE ad BH,
d p 9. libr. sicut aggregatum ipsarum FI, IB ad IB. Æquale igitur est ^d aggre-
s. Elem. gatum ipsarum KH, HB ipsi BE. Quarum unicuique additâ com-
 muni BC, erunt & KH, HC simul sumptæ ipsi EC vel Q æquales.
 Id quod similiter est accipiendum de quolibet puncto *b*, ubicunque in
 lineâ *d* H assumpto.

Constructio 2^{di} casus.

Ductâ ex E rectâ EB parallelâ DC, occurrente ipsi AB in B, fiat
 ut FI ad IA, ita CE ad AG. Deinde ductâ G *d* parallelâ AB, donec
 ipsi CD occurrat in *d*; itemque *d* L parallelâ AI, donec occurrat ipsi
 AB in L: dico, si jungatur *d* B, & à quolibet in ea puncto *b* ad AB,
 CD ducantur rectæ *ba*, *bc* parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis
 F, G, sumaturque *d* M æqualis CE, & jungatur MB, quod *ab* sit ad
bk, ut AI ad IF, hoc est, *r* ad *f*; & quod *bc* simul cum *bk* sit æqualis ipsi
 CE vel Q.

Demonstratio 2^{di} casus.

Per 34. 1^{mi} Elem. L *d* est æqualis AG, & per constr. *d* M æqua-
 lis CE, & FI ad IA, ut CE ad AG, hoc est, *d* M ad *d* L: & inverte-
c p Cor. 4. do ^c L *d* ad *d* M, ut AI ad IF. Quoniam autem ^f \triangle^{1a} L *d* B, a HB, ut
lib. 5. Elem. & M *d* B, KH B, similia sunt, & idcirco L *d* ad *d* B, ut a H ad HB; &
f p 4. lib. 6. *d* B ad *d* M, ut HB ad HK: erit etiam ^g L *d* ad *d* M, ut a H ad HK. Sed
Elem. ut L *d* est ad *d* M, ita AI erat ad IF. Quocirca erit ut a H ad HK, sic
g p 22. libr. AI ad IF, hoc est, ut *r* ad *f*.
s. Elem.

Porro, quod HC simul cum HK, ad quam a H, ut ostensum est,
 eam habet rationem, quam AI ad IF, vel *r* ad *f*, sit æqualis CE vel Q,
 patet ex demonstratione 2^{di} casus VII Problematis: cum omnes
 lineæ HC, HK, ductæ à puncto H, utcunque assumpto in lineâ *d* B
 inter duo puncta *d* & B, ad rectas DC, KB ipsis CI, IA parallelæ,
 sint simul sumptæ ipsi CE vel Q æquales. Datis ergo positione &c.
 Quod erat faciendum.

N O T A,

Cum sequens Problema ejusdem ferè sit argumenti cum superio-
 ri, faciliq; viâ per illud solvi possit, placuit nobis id hîc subjun-
 gere, ut sequitur.

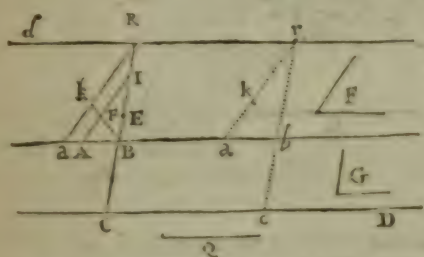
X P R O -

X PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD , invenire extra ipsas punctum R , à quo ductis in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duabus rectis Ra, Rk , differentia inter harum unam RC & aliam Rk , ad quam altera Ra datam habet rationem r ad f , sit æqualis datæ rectæ lineæ Q .

Fiant anguli BAI, DCB , ut ante, æquales angulis F, G , & rectæ AI, CB , ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I . Deinde sit AI ad IF , ut r ad f ; sitque CE æqualis Q , ut ante.

Constructio 1^{mi} casus.



1^{mus} casus, in quo data linea AB, CD sunt parallelæ.

Fiat ut differentia ipsarum FI, IB ad IB , ita BE ad BR ; agaturque dR parallela AB vel CD . Tum ducta ex R recta Ra parallela AI , & ex B per F recta BFk , occurrente ipsi aR in k , erit aR ad Rk , sicut AI ad IF , hoc est, ut r ad f ; itemque differentia inter RC & Rk æqualis CE vel Q .

Demonstratio 1^{mi} casus.

Quoniam $\triangle^{1a} aRB, AIB$, ut & kRB, FIB similia sunt, erit aR ad RB , sicut AI ad IB , & RB ad Rk , sicut IB ad IF ; & per consequens aR ad Rk , sicut AI ad IF . a p 4. libr. 6. Elem.

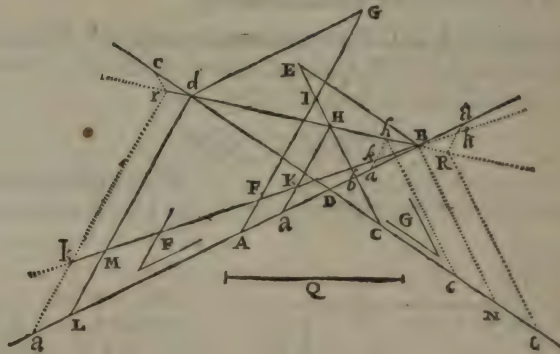
Porro cum kR sit ad RB , ut FI ad IB ; erit dividendo ut differentia ipsarum kR, RB ad RB , ita differentia ipsarum FI, IB ad IB . b p 22. libr. 5 Elem.
Est autem per constructionem BE ad BR , sicut differentia ipsarum FJ, IB ad IB . c p 17. libr. 5 Elem.
Æqualis itaque est differentia ipsarum kR, RB ipsi aR ipsi BE ; ideoque kR æqualis RE , & per consequens CE vel Q æqualis d p 9. libr. 5. Elem.
differentia, quæ est inter RC, Rk . Quod eodem modo intelligendum est de quolibet puncto r , in linea dR assumpto.

Hh

Con-

Constructio 2^{di} casus.

Inventâ, ut in 2^{do} casu præcedentis Problematis, lineâ dB , ductisque à puncto aliquo R , in ea utrinque producta, ad AB , CD rectis Ra , Rc , parallelis AI , IC , hoc est, in datis angulis F , G : erit



2^{us} casus, in quo data lineæ AB , CD concurrunt in D .

aR ad Rk , ut AI ad IF , vel r ad f ; & Rk subducta ex Rc æqualis CE vel Q .

Demonstratio 2^{di} casus.

Quòd aR sit ad Rk , ut AI ad IF , vel r ad f , patet ex eadem ratione, quâ in 2^{do} casu superioris Problematis demonstravimus, aH esse ad HK , ut AI ad IF , vel r ad f . Eodem modo liquet ex demonstratione 2^{di} casus VIII Problematis, differentiam ipsarum Rc , Rk æqualem esse CE vel Q . Quod similiter intelligendum est de quolibet puncto r , ubicunque assumpto in producta dB ad alteram partem. Datis ergo positione &c. Quod erat faciendum.

Hinc :

Hinc:

Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur duæ *Conclusio 6^{ta} Propositionis.* rectæ lineæ in datis angulis, datam inter se habentes rationem; vel quarum una, simul cum aut minus datâ lineâ, ad alteram sit in ratione data; vel quarum aggregatum aut differentia sit datæ rectæ æqualis; vel denique quarum una simul cum ea aut minus eâ, ad quam altera datam habet rationem, datæ rectæ sit æqualis: continget punctum rectas lineas, positione datas.

Quod erat demonstrandum.

In 7^{ma} Propositionem.

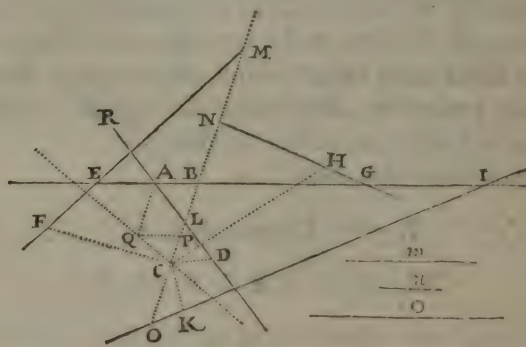
XI PROBLEMA.

Datis positione quocunque rectis lineis AB, AD, EF, GH, IK: invenire extra ipsas punctum C, à quo eductis in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, CKO ad positione datas AB, AD, EF, GH, IK rectis CB, CD, CF, CH, CK, id, quod sub data lineâ *m* & una ducta CB comprehenditur rectangulum, unâ cum eo, quod sub alia ducta CD & data *n* comprehenditur, æquale sit ei, quod sub alia data *o* & reliquis ductis CF, CH, & CK continetur.

Cum propter datarum linearum atque angulorum multitudinem explicatio constructionis prolixior futura esset, quàm ut votis hujus & alterius responderet, brevitati consulentes satis fore duximus, si calculo Geometrico operationem expediremus, ut sequitur.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque, ut ex omnium harum linearum confusione me expediam, considero unam ex datis atque unam ex quæsitis, ut ex. gr. AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Pono itaque lineam AB vocari *x*, BC autem vocari *y*, & alias lineas datas omnes productas esse, donec secent hæc duas, etiam productas, si opus fuerit, & ipsis non sint parallelæ, ut puta AB, in punctis A, E, G, I; at BC in punctis L, Hb 2 M, N,

M, N, & O. Deinde observans angulos $\triangle^{li} ABL$ esse datos, datam-
que ideo rationem laterum ipsius AB ad BL, quam pono ut ζ ad a :
erit, existente AB $\propto x$, BL $\propto \frac{ax}{\zeta}$, & CL $\propto y - \frac{ax}{\zeta}$. nimirum, si pun-
ctum L cadit inter B & C; cadente verò B inter C & L, erit CL \propto



$y + \frac{ax}{\zeta}$; & $-y + \frac{ax}{\zeta}$, si C ceciderit inter B & L. Eodem modo, datis
angulis $\triangle^{li} LCD$ datur & ratio laterum, quæ est inter CL & CD,
quæ si ponatur esse, ut z ad b : erit, existente CL $\propto y - \frac{ax}{\zeta}$, CD $\propto \frac{by}{\zeta} -$
 $\frac{abx}{\zeta}$. Porro, quoniam lineæ AB, AD, EF positione datæ sunt, dabitur
etiam intervallum inter puncta A & E, quod si vocetur i , erit EB
 $\propto i + x$; at $i - x$, si punctum B ceciderit inter A & E; & $-i + x$, ca-
dente E inter A & B. Similiter, datis angulis $\triangle^{li} EBM$, datur ratio
laterum, quæ est inter EB & BM, quæ sit ut z ad c . Cumque EB sit
 $i + x$, erit BM $\propto \frac{ci + cx}{z}$, & CM $\propto \frac{zy + ci + cx}{z}$. Haud secus datis
angulis $\triangle^{li} FCM$, datur ratio laterum, quæ est inter CM & CF. Quæ
si ponatur ut z ad d , erit CF $\propto \frac{dz + ci + cx}{z}$. Pari ratione, datis
positione rectis lineis AB, AD, & GH, datur quoque intervallum
inter puncta A & G, quod si vocetur k , erit BG $\propto k - x$; at $k + x$,
cadente A inter B & G; & $-k + x$, cadente G inter A & B. Eodem
modo, cum dantur anguli $\triangle^{li} BNG$, datur & ratio laterum, quæ est
inter

inter BG & BN. Quæ si ponatur ut z ad e , BG existente $k-x$, erit
 $BN \propto \frac{ek-ex}{z}$, & $CN \propto \frac{zy-ek-ex}{z}$. Rursus datis angulis Δ^{II}
 CNH , dabitur ratio laterum, quæ est inter CN & CH. Quæ si po-
 natutur ut z ad f : erit $CH \propto \frac{fz + esk - ex}{z}$. Denique, cum, datis po-
 sitione rectis AB, AD, KI, detur & AI, intervallum inter puncta A
 & I: id quod si vocetur l , erit $BI \propto l-x$; sed $l+x$, cadente A inter
 B & I; & $-l+x$, cadente I inter A & B. Porro, cum, datis angu-
 lis Δ^{II} OBI, detur ratio laterum BI ad BO: si ponatur illa ut z ad g ,
 erit, existente BI $\propto l-x$, $BO \propto \frac{gl-gx}{z}$; & $CO \propto \frac{-zy + gl-gx}{z}$. Eo-
 dem modo datis angulis Δ^{II} OCK, atque ideo ratione laterum,
 quæ est inter CO & CK: si illa ponatur ut z ad h , erit $CK \propto$
 $\frac{-hzy + ghl - ghx}{z}$. Et sic ulterius, si plures lineæ positione data fuerint.

Ubi constat, datis positione quocunque lineis rectis, in similibus
 terminis inveniri semper quantitatem cujusque lineæ, ex puncto C
 ad quamlibet datarum linearum in dato anguloeductæ.

Notandum autem, quod si data lineæ sunt ipsi AB parallelæ, in
 nulla istarum quantitatum x reperiri. At ubi data lineæ ipsi CB
 sunt parallelæ, nullos invenitum iri terminos, quantitatem y invol-
 ventes. Denique quod attinet signa + & -, possunt ipsa tot modis
 variari, quot excogitari queunt datarum linearum positiones. Tan-
 dem cum constet longitudinem cujusque ductarum linearum iis ter-
 minis exprimi, in quibus solummodò x vel y continetur, non autem
 xx vel yy : sequitur, non obstante multiplicatione uniuscujusque ea-
 rundem linearum per quantitatem alterius datæ, nunquam tamen
 ad xx vel yy adscendi. Id quod arguit punctum C in rectam lineam
 cadere, positione datam, ut hic deinceps ostenditur.

Idcirco ad determinandum punctum C, cum CB, hoc est, y , multi-
 plicata per m producat my ; & CD, hoc est, $\frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$ multiplicata per
 n , producat $\frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz}$; ac porro CF, CH, & CK multiplicata per o
 producant $\frac{dozy + cdio + cdox + fozy + esk - ex - box - hzy + ghl - ghx}{z}$

Et Hh 3 erit

erit æquatio $my + \frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz} = \frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko -}{zz}$
 $\frac{efox - hozy + ghlo - ghox}{zz}$. Hoc est, multiplicatis utrinque per zz , &
 æqualitate ad legitimam formam reductâ: $y = \frac{cdio + abnx + efko + zdox + ghlo - efox - ghox}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$.

Nempe si ponatur $mz + bn + ho$ majus quàm $do + fo$. Cum aliâs, si $mz + bn + ho$ minus esset quàm $do + fo$, signa $+$ & $-$ forent immutanda. Quòd si contigerit y esse æqualem nihilo aut minorem quàm o , postquam suppositum fuerit punctum C cadere intra angulum DAE , oporteret idipsum quoque sumere intra angulum DAG , GAR , vel RAE , mutando ad hoc signa $+$ & $-$, prout requiritur. Quòd si verò in hisce quatuor positionibus, y deprehenderetur esse æqualis o , indicio esset Problema hujusmodi conditionibus circumvallatum esse impossibile. Posito autem quòd sit possibile, pro

$\frac{cdio + efko + ghlo}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ scribatur, brevitatis causâ, p ; & loco
 $\frac{abn + cdo - efo - ghlo}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ scribatur $\frac{q}{r}$ habebiturque $y = p + \text{vel}$
 $-\frac{q}{r}x$. Nimirum erit $y = p + \frac{q}{r}x$, si $abn + cdo$ majus sit quàm
 $efo + ghlo$; sed $y = p - \frac{q}{r}x$, si $abn + cdo$ est minus quàm $efo + ghlo$.

Quapropter cum omne illud, quod in Problemate requirebatur, sit peractum, nihilque amplius relictum sit cujus ope æquatio inveniri possit ad obtinendam quantitatem indeterminatam x , liberum erit x pro lubitu sumere; ita ut hoc pacto innumera puncta C , quæsito satisfactientia, inveniri queant.

Hinc sumptâ AB ad lubitum, fiat BP æqualis p , ponaturque à B versùs C , si habeatur $+p$; quæ aliâs versùs N esset sumenda, si haberetur $-p$; aut, si p fuisset æqualis nihilo, nullo modo ducenda fuisset. Deindeeductâ ex P lineâ PQ parallelâ & æquali AB , ducò QC , ita ut QP sit ad PC , ut r ad q . hoc est, si QP est x , tum PC sit $\frac{qx}{r}$; ita ut

pun-

punctum C cadat inter B & P, si habeatur $-\frac{qx}{r}$. Contra si habeatur $+\frac{qx}{r}$, faciendum est, ut C cadat ad alteram partem extra P. quemadmodum hic factum apparet. Ubi observandum, nullo modo ducendam fuisse lineam QC, si $\frac{qx}{r}$ fuisset æqualis 0. Id quod argumento fuisset, punctum quæsitum C casurum fuisse in inventa PQ, ab utraque parte in infinitum producta.

Eodem modo sumendo aliam semper atque aliam magnitudinem pro AB, hoc est, ducendo CB in dato angulo CBA, ex alio atque alio puncto B, inveniuntur innumera puncta C, quæsito satisfaciencia. Quæ quidem omnia cadent in rectam lineam QC, utrinque in infinitum productam.

Ubi porro notandum ducimus, quo pacto quæsitum punctum C non solum in rectam lineam sit casurum, quæ positione est data, quotiescunque illud, quod sub data m & ducta CB, unà cum eo, quod sub data n & ducta CD continetur, æquale est ei, quod sub data o & reliquis CF, CH, & CK comprehenditur; verum etiam quoties unum productum ad alterum datam habet rationem; sicut etiam quoties unaquævis ductarum CF, CH, & CK per peculiarem quandam datam fuerit multiplicata, & producta ipsarum ad se invicem utcunque fuerint comparata.

Patet igitur:

Si sint quotcunque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod sub data linea & ducta continetur, unà cum contento sub data linea & altera ducta, æquale ei, vel datam habens rationem ad illud, quod sub data & alia ducta & reliquis continetur: punctum rectam lineam positione datam contingere.

Quod erat demonstrandum.

In

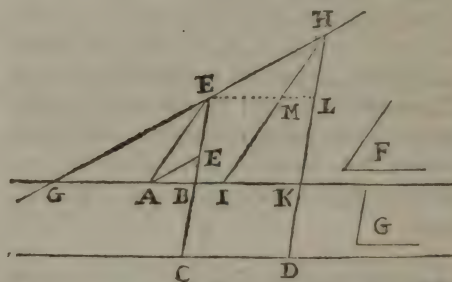
Conclusio
7^{ma} Pro-
positionis.

In 8^{va}m Propositionem.

XII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duæ rectæ HI, HD, ipsæ ad data puncta A & C in positione datis AB, CD intercipient rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem c ad b .

Fiant anguli BAE, DCB æquales datis angulis F, G; rectæque AE, CB productæ concurrant in E. Deinde sit FE ad EB, sicut c ad b .

Constructio.

Ductâ AF, agatur per E ipsi parallela EH; ductisque ex aliquo in ea puncto H ad positione datas AB, CD duabus rectis HI, HD, ipsis AE, EC parallelis, hoc est, in datis angulis

F, G: erit AI ad CD, ut FE ad EB, vel c ad b .

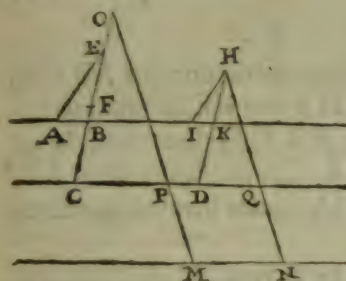
Demonstratio.

Ductâ HE occurrente ipsi AB in G; & ex E ductâ EL parallelâ AB, secante IH in M, & ipsi DKE occurrente in L: erit propter similitudinem $\triangle ELH, GBE$, ut & EMH, GAE , LE ad EH, ut BG ad GE; & EH ad EM, ut GE ad GA: ac proinde ex æquo LE ad EM, hoc est, CD ad AI, ut BG ad GA. Porro cum BA sit ad AG, ut BF ad FE, hoc est, componendo BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG sit ad GA, sicut CD ad AI: erit CD ad AI, ut BE ad EF, hoc est, ut b ad c . Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum est de quovis puncto in linea EH assumpto.

NOTA

NOTA I^{ma}.

Quamvis hæc Propositio universalis sit, & in quocunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operæ pretium tamen nos facturos existimavimus, si ad maiorem ejus perfectionem sequentem operationem hic adjiceremus.

In 3^{bus} lineis.

Sit $AB \propto a$
 $BE \propto b$
 $EF \propto c$
 $OC \propto d$
 $CP \propto e$
 $BC \text{ vel } DK \propto f$
 $CD \text{ ad } MN, \text{ ut } d \text{ ad } g$
 $AK \propto x$
 $KH \propto y$

$BE \ AB \ KH$
 $b \propto a - y \mid IK. \frac{ay}{b}$ } subtr.

$FE \ EB$
 $c - b - AI. \frac{bx - ay}{b} \mid CD. \frac{bx - ay}{c}$ } add.

$OC \ CP \ DH$
 $d - e - y + f \mid DQ. \frac{ey + ef}{d}$

$CQ. \frac{bdx - ady + cey + cef}{cd}$

subtr. $CP. \frac{e}{cd}$

$d - g - \frac{CD}{bx - ay} \mid PQ \text{ vel } MN. \frac{bdx - ady + cey + cef - cde}{cd}$
 $\frac{bdx - ady + cey + cef - cde}{cd} \propto bgx - agy$
 $agy - ady + cey \propto bgx - bdx + ced - cef$
 fit $y \propto \frac{bgx - bdx + ced - cef}{ag - ad + ce}$

Quod arguit punctum H in rectam lineam cadere, positione datam.

Ii

Idem

Idem similiter liquet de quocunque datis parallelis.

NOTA 2^{da}.

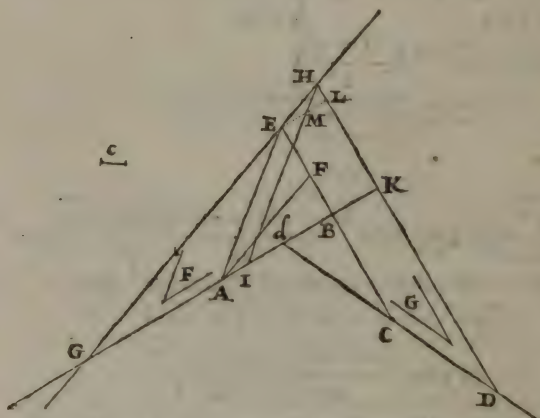
Quoniam quæsitum non tantum in lineis parallelis, prout ab Apollonio propositum est, sed in concurrentibus quoque locum habet, ideo sequens addere nobis placuit

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis concurrentibus AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duæ rectæ lineæ HI, HD, ipsæ ad data puncta A, C in positione datis AB, CD intercipient rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem.

Fiant, ut ante, ad A & C anguli BAE & d CB æquales angulis F & G, rectæque AE, CB æquales hosce angulos constituentes concurrant in E. Deinde sit data ratio ut e ad EB.

Constructio.



Fiat ut B d ad d C, ita e ad EF; junctæque AF agatur per E parallela EH. Tum ductis ex aliquo in ipsa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, EC, hoc est in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut e ad EB.

De-

Demonstratio.

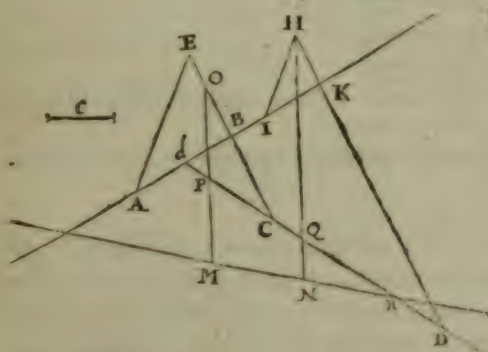
Cum propter Δ^{1a} similia ELH, GBE, ut & EMH, GAE^a, LE^a sit ad EH, sicut BG ad GE; & EH ad EM, sicut GE ad GA: ex æquo erit^b LE ad EM, hoc est, KB ad AI, sicut BG ad GA. Porro cum BA sit ad AG, ut BF ad FE, hoc est, componendo^d BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG sit ad GA, ut KB ad AI: erit KB ad AI, ut BE ad EF; & invertendo^f AI ad BK, ut FE ad EB. Sed ut BK ad CD, ita est B d ad d C; itemque ut B d ad d C, ita per constructionem^e est ad EF. Erit igitur BK ad CD, ut e ad EF. Hinc cum AI, BK & CD sint 3 magnitudines ab una parte, & e, FE, & EB 3 aliæ ab altera parte, quæ binæ sint in eadem ratione, sitque earum portio perturbata, h erit quoque ex æquo 1^{ma} AI ad 3^{am} CD (in g^o p^o 11. libr. 3^{bus} primis), sicut 1^{ma} e ad 3^{iam} EB (in 3^{bus} postremis). Quod erat faciendum. Idem similiter intelligi debet de quolibet puncto in linea EH assumpto.

a p 4. libr.
6 Elem.
b p 22. libr.
5. Elem.
c p 2. libr. 6.
Elem.
d p 18. libr.
5. Elem.
e p 11. libr. 5.
Elem.
f p Cor. 4.
libr. 5. Elem.
in g^o p^o 11. libr.
5. Elem.
h p 23. libr.
5. Elem.

N O T A.

Cum hæc Propositio verificetur in tot lineis concurrentibus, quot quis voluerit, itaque ad maiorem ejus perfectionem sequentem operationem adjecimus

In 3^{bus} lineis.



Esto AB $\propto a$
BE $\propto b$
AI ad CD, ut e ad b
B d $\propto d$
BC $\propto e$
OC $\propto f$
CP $\propto g$
P n $\propto h$
n M $\propto i$
CD ad MN, ut h ad k
AK $\propto x$
KH $\propto y$

Ii 2

BE

$$\begin{array}{l}
 \text{AK. } x \\
 \left. \begin{array}{l} \text{BE AB HK} \\ b - a - y \end{array} \right\} \text{subtr.} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{IK. } \frac{ay}{b} \\ \text{BE} \\ c - b - \text{AI. } \frac{bx - ay}{b} \end{array} \right\} \text{CD. } \frac{bx - ay}{c} \\
 \text{BK. } x - a \\
 \left. \begin{array}{l} \text{d B BC add. dB. } d \\ d - e - d \text{ K. } x - a + d \text{ KD. } \frac{ex - ae + de}{d} \end{array} \right\} \text{add. CP. } g \\
 \left. \begin{array}{l} \text{PD. } \frac{bx - ay + eg}{c} \\ \text{add. HK. } y \\ \text{f - g - HD. } \frac{ex - ae + de + dy}{d} \text{ DQ. } \frac{egx - aeg + deg + dgy}{df} \end{array} \right\} \text{subtr.} \\
 \left. \begin{array}{l} \text{Pn nM} \\ h - i - \text{PQ. } \frac{bdfx - adfy + cdsg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdf} \end{array} \right\} \\
 \text{ad MN. } \frac{bdfx - adfy + cdsg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdfh} \\
 \text{CD} \quad \text{MN.} \\
 b - k - \frac{bx - ay}{c}, \text{ ad } \frac{bdfx - adfy + cdsg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdfh} \\
 \frac{bdfx - adfy + cdsg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdfh} \propto \frac{bdfx - adfy}{cdfh} \\
 \frac{adfy + cdgy - adfk}{cdfh} \propto \frac{bdfx - cegx - bdfk + cdsg + aceg - cdeg}{cdfh} \\
 \frac{adfy + cdgy - adfk}{cdfh} \propto \frac{bdfx - cegx - bdfk + cdsg + aceg - cdeg}{cdfh} \\
 \frac{adfy + cdgy - adfk}{cdfh} \propto \frac{bdfx - cegx - bdfk + cdsg + aceg - cdeg}{cdfh} \\
 \frac{adfy + cdgy - adfk}{cdfh} \propto \frac{bdfx - cegx - bdfk + cdsg + aceg - cdeg}{cdfh}
 \end{array}$$

Id quod arguit, punctum h cadere in rectam lineam, positione datam.

Idem similiter liquet de quocunque positione datis rectis concurrentibus.

Hinc:

Si ab aliquo puncto ad quocunque positione datas parallelas vel concurrentes in datis angulis ducantur re-
prioris par- ctæ lineæ, quæ ad data in ipsis puncta abscindant rectas
tis & Pro- lineas datam inter se rationem habentes; punctum con-
positionis. tinget positione datam rectam lineam.

Quod erat demonstrandum.

NOTA

N O T A.

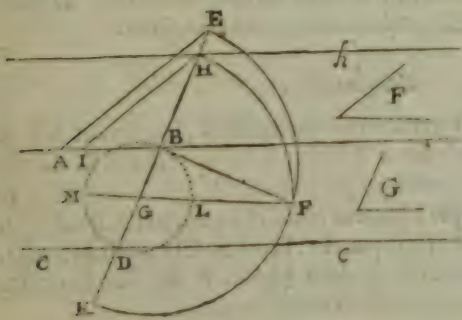
Cum in 7^{ma} Propositione ulterius quoque habeatur, quòd, si abscissa rectæ linear datum spatium comprehendant, quaesitum punctum contingat rectam lineam positione datam, nec tamen id ipsum sive in parallelis sive in concurrentibus locum inveniat, quoniam punctum eâ ratione non in rectam lineam sed Hyperbolam cadit: idcirco casum istum, seu ab imperito quodam insertum, negleximus & repudiavimus, ejusque loco sequens Problema 13, genuinam illius mentem exponere nobis visum, subrogavimus. Deinde cum ibidem adhuc dicatur, quòd, si rectæ positione datae sunt parallelæ, & species ab ipsis ductis vel excessus specierum dato spacio est æqualis, punctum similiter contingat positione datas rectas lineas: idcirco illud ostensum, antequam posteriorem 7^{ma} Propositionis partem concluderemus, duo reliqua sequentia 14 & 15 Problemata huic applicavimus.

XIII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD ; invenire extra ipsas punctum H , à quo eductis ad positione datas AB, CD in datis angulis F, G duabus rectis HI, HD , rectangulum IHD , sub ipsis comprehensum, dato spacio sit æquale.

Fiant, ut ante, anguli BAE, & DE æquales angulis F, G; lineæque AE, DB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde datum spacium esto illud, quod sub AE & BK continetur.

Constructio.



Inventâ inter EB
& BK mediâ pro-
portionali BE, ſecetur BD bifariam in
G jungaturque GF.
Però factâ GH
æquali GF, agatur
per H recta Hh pa-
rallela AB vel CD;
deſcripſe ab aliquo
in ea puncto H ad
Ii 3. AE.

AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: dico quod sub IH, HD continetur rectangulum esse æquale dato spacio sive rectangulo contento sub AE, BK.

Demonstratio.

Descripto ex G intervallo DG vel GB circulo DMBL, secetur ejus circumferentia ab FG in L, atque ab eadem producta in M:
a p Cor. 36. eritque \square MFL, hoc est, DHB æquale \square ex BF. Est autem
libr. 3. Elem. \square \square ex BF etiam æquale \square KB E. Æquale igitur est \square DHB
b p 14. libr. ipsi \square KB E. Unde erit \square ut DH ad KB, ita BE ad BH. Sed ut BE
2. vel 17. ad BH, ita est quoque \square AE ad IH. Quare erit ut DH ad KB, sic
libr. 6. Elem. AE ad IH: ideoque \square id, quod sub extremis continetur \square DHI
c p 16. libr. æquale \square sub mediis KB, AE, hoc est, dato spacio. Quod erat fa-
6. Elem. ciendum.
Elem. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto *h* in linea H *h*
c p 16. libr. assumpto.
6. Elem.

XIV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione datas AB, CD in datis angulis F, G duabus rectis HI, HD, quæ ab ipsis fiunt quadrata simul sumpta sint æqualia dato spacio.

Fiant, ut ante, anguli BAE, ϵ DE æquales angulis F, G; lineæque AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde sit datum spacium, illud, quod continetur sub BD, DG.

Constructio.

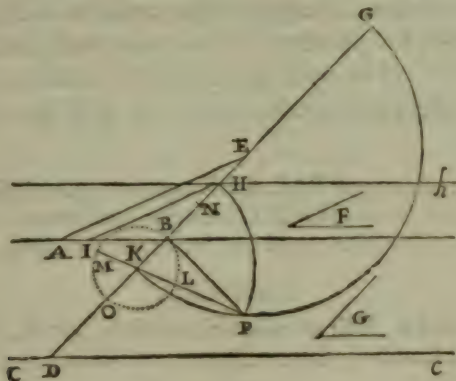
Inventâ ad AE, EB tertiâ proportionali EN, hoc est, ut AE sit ad EB, sicut EB ad EN: fiat ut AEN ad EN, ita DB ad BK. Porro inventâ inter KB, BG mediâ proportionali BF, junctâque KF, fiat eidem æqualis KH, & per H agatur recta H *h* parallela AB vel CD. Tum eductis ex aliquo in ipsa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD, parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: dico summam \square ex IH, HD dato spacio BDG esse æqualem.

De-

Demonstratio.

Descripto ex K intervallo KB circulo OMBL, secetur ejus peripheria ab FK in L, atque ab eadem producta in M: eritque ^a \square MFL, hoc est, OHB \propto quale \square ex BF. Est autem ^b \square ex BF \propto quale \square KBG. Quare etiam \square OHB \propto quale erit \square KBG. Porro,

a p Cor. 30.
libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2.
vel 17. lib.
6. Elem.



quoniam per constructionem AE est ad EB, sicut E Bad EN, id est, ^c AE ad EN, sicut \square ex AE ad \square ex EB, vel ut \square ex IH ad \square ex HB: erit componendo ^d ut AEN ad EN, hoc est, DBad BK, ita summa \square ex IH, HB ad \square ex HB. Quoniam verò ^e DB ad BK, sicut \square DBK ad \square HBK, vel ^f sicut duplum \square DBH ad duplum \square HBK, hoc est, ad \square HBO: erit quoque summa \square ex IH, HB ad \square ex HB, sicut duplum \square DBH ad \square HBO. Ac proinde, per 12. 5, ut summa \square ex IH, HB unà cum duplo \square DBH ad summam \square ex HB & \square HBO, hoc est \square OHB, ita summa \square ex IH, HB ad \square ex HB, seu DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita quoque ^h est \square DBG ad \square KBG. Quocirca ut summa \square ex IH, HB unà cum duplo \square DBH ad \square OHB, ita \square DBG ad \square KBG. Et invertendo ⁱ ut \square OHB ad summam \square ex IH, HB unà cum duplo \square DBH, ita \square KBG ad \square DBG.

\square DBG. Unde, cum \square OHB æquale sit ostensum \square^{lo} KBG,
k p 14. libr. erit quoque \square^{k} summa \square^{sum} ex IH, HB unâ cum duplo \square DHB
5. Elem. æquale \square^{lo} DBG. Et proinde si addatur utrinque \square^{sum} ex DB,
1 p 4. & 3. erit \square^{l} summa \square^{sum} ex IH, HD æqualis dato spacio seu \square^{lo} BDG.
libr. 2. Elem. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quo-
 libet puncto h , in linea Hh assumpto.

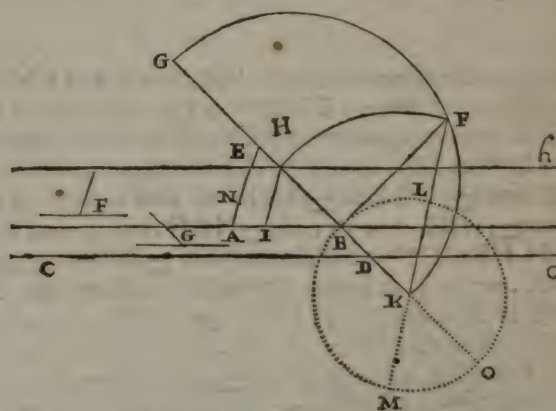
XV PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, inve-
 nire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione
 datas AB, CD in datis angulis F, G, duabus rectis HI,
 HD, differentia quadratorum ex ipsis dato spacio sit
 æqualis.

Fiant, ut ante, anguli BAE, CDE æquales angulis F, G; lineæque
 AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde
 sit datum spaciū, illud, quod continetur sub BD, DG.

Constructio.

Inventâ ad BE, AE, 3^{ta} proportionali EN, hoc est, ut BE sit ad
 EA, sicut AE ad EN: fiat ut differentia ipsarum BE, EN ad EN,



ita DB ad BK. Tum inventâ inter KB, BG mediâ BF, jungatur KF,
 fiatque KH æqualis KF. Deinde per H ductâ rectâ Hh parallelâ AB
 vel

vel CD, ductisque ex aliquo in ea puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc est, in datis angulis F, G: erit differentia \square^{cum} ex DH, HI aequalis dato spacio BDG.

Demonstratio.

Descripto ex K intervallo KB circulo OMBL, secetur ejus peripheria ab LK in L, atque ab eadem producta in M: ^{a p Cor 30. libr 3. Elem.} eritque \square^{cum} MFL, hoc est, OHB aequale \square^{cum} ex BF. Est autem \square^{cum} ex BF ^{b 14. libr 1. vel 17. lib. 6. Elem.} aequale \square^{lo} KBG. Quare \square^{cum} OHB aequale quoque erit \square^{lo} KBG. Porro cum per constructionem BE sit ad EA, ut AE ad EN. id est ^{c p Cor. 20. libr. 6. Elem.} BE ad EN, sicut \square^{cum} ex BE ad \square^{cum} ex EA, vel ut \square^{cum} ex BH ad \square^{cum} ex HI: erit quoque ^{d p Cor. 19. libr. 6. Elem.} per conversionem rationis & invertendo ut differentia rectarum BE, EN ad BE, hoc est, per constr. ut DB ad BK, ita differentia \square^{cum} ex BH, HI ad \square^{cum} ex BH. Quoniam verò DB est ad BK ^{e p 1. libr. 0. Elem.}, sicut \square^{cum} DBH ad \square^{cum} HBK, vel ^{f p 15. libr. 5. Elem.} ut duplum \square^{cum} DBH ad duplum \square^{cum} HBK, hoc est, ad \square^{cum} HBO: erit quoque differentia \square^{cum} ex BH, HI ad \square^{cum} ex BH, sicut duplum \square^{cum} DBH ad \square^{cum} HBO: & per consequens, per 12. 3, ut excessus, quo \square^{cum} ex BH simul cum duplo \square^{cum} DBH superat \square^{cum} ex HI, ad summam \square^{cum} ex BH & \square^{cum} HBO, hoc est, ad \square^{cum} OHB, ita differentia \square^{cum} ex BH, HI, ad \square^{cum} ex BH, vel ut DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita ^{g p 1. libr. 6. Elem.} est quoque \square^{cum} DBG ad \square^{cum} KBG. Quocirca ut excessus, quo \square^{cum} ex BH unâ cum duplo \square^{cum} DBH superat \square^{cum} ex HI ad \square^{cum} OHB, ita ^{h p Cor. 4. libr. 5. Elem.} \square^{cum} DBG ad \square^{cum} KBG. Et invertendo ^{i p 14. libr. 5. Elem.} ut \square^{cum} OHB ad excessum, quo \square^{cum} ex BH unâ cum duplo \square^{cum} DBH superat \square^{cum} ex HI, ita \square^{cum} KBG ad \square^{cum} DBG. Unde, cum \square^{cum} OHB sit aequale ostensum \square^{lo} KBG, erit etiam ^{k p 4. libr. 3. Elem.} excessus, quo \square^{cum} ex BH unâ cum duplo \square^{cum} DBH superat \square^{cum} ex HI, aequalis \square^{lo} DBG. Ac proinde si utrinque addatur \square^{cum} ex DB, erit quoque ^{libr. 2. Elem.} differentia \square^{cum} ex DH, HI aequalis dato spacio seu \square^{lo} BDG Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto h in recta HL assumpto.

NOTA,

Cum 7^{ma} Propositio in genere doceat, quòd, si species vel excessus specierum, quæ à ductis sunt, sint dato spacio æquales, quantum punctum rectam lineam contingat positione datam (id quod in binis proxime præcedentibus Problematis de quadratis tantum

K k

osten-

258 APOLL. PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.

ostendimus) : sciendum erit, postquam ex demonstratione 77^{ma} Prop^{nis} Datorum Euclidis constet, datis specie duabus figuris ad invicem datam rationem habentibus, quadratum quoque cujuslibet lateris unius ad quadratum cujuslibet lateris alterius datam rationem habere, quòd, datâ ratione istarum figurarum, detur quoque ratio horum quadratorum. Id quod similiter in sequentibus Problematicis, in quibus de figuris, specie datis, sermo fit, intelligendum est. quo ipso septimæ Propositioni colophonem imponimus.

Hinc:

*Conclusio
posterioris
partis 8^{væ}
Propositio-
nis.*

Si ab aliquo puncto ad positione datas duas parallelas ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis datum spatium continentibus; vel quarum species vel excessus specierum sit dato spacio æqualis: punctum continget positione datas rectas lineas.

Quod erat demonstrandum.

SE.

SEQVUNTUR
PROBLEMAT A
IN
SECUNDI LIBRI
PROPOSITIONES.

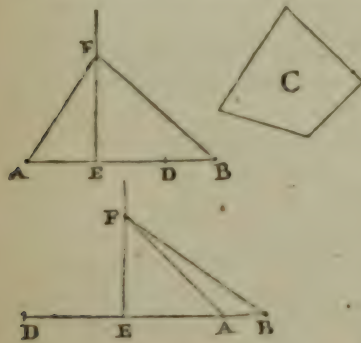
In primam Propositionem

I PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, ut illorum, quæ ab ipsis fiunt, differentia sit æqualis dato spatio C.

Constructio.

DUCTA AB, fiat \square ABD æquale dato spatio C, seceturque AD bifariam in E. Tum ex E ducta EF ad angulos rectos super AB, & ex A & B ad aliquod in ea punctum F ductis duabus rectis AF, BF; erit differentia \square ex BF, AF æqualis dato spatio C.



Demonstratio.

Per 6. 2^{di} Elem. \square ex EB superat \square ex AE vel ED, \square ABD, hoc est, dato spatio C. Sed quoniam in æqualibus adjunctis æqualibus totorum excessus æqualis est excessui eorum, quæ erant à principio, constat, addito utrinque communi \square ex EF, \square ex EB, EF, simul sumpta, tantum excedere \square ex AE, EF, simul sumpta, quantum \square ex EB excedit

Kk 2

2. p 47. libr.
1. Elem.

dit \square^{tum} ex AE. Sunt autem \square^{a} bina \square^{ta} ex EB, EF \square^{a} qualia \square^{to} ex BF, & bina \square^{ta} ex AE, EF \square^{a} qualia \square^{to} ex AF. Quocirca si \square^{tum} ex EB excedit \square^{tum} ex AE dato spatio C, excedet quoque \square^{tum} ex BF ipsum \square^{tum} ex AF eodem spatio C. Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto in linea EF assumpto, estque manifestum de omnibus figuris, datâ specie super AF, BF descriptis.

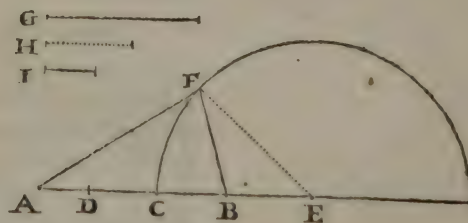
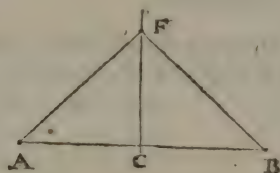
In ^{ma}m Propositionem.

II P R O B L E M A.

A datis duobus punctis A, B duas rectas inflectere AF, BF, datam inter se rationem habentes, AC ad CB.

Constructio I^{mi} casus.

Primò sit AC æqualis CB , ductâque CF ipsi AB perpendiculari, agantur ex A & B ad quodlibet in ea punctum F rectæ AF , BF .



critique A F æqualis B F. Cujus demonstratio manifesta est ex 4.^{ta} 1.ⁿⁱ Elementorum.

Con-

Constructio 2^{di} casus.

Esto jam $A C$ major quàm $C B$, lineâ $A D$; fiat què ut $A D$ ad $D C$, ita $C B$ ad $B E$. Tum ex E intervallo $C E$ descripto circulo, eductisque ex A & B ad aliquod in circumferentia punctum F duabus rectis: erit $A F$ ad $F B$, ut $A C$ ad $C B$.

Demonstratio 2^{di} casus.

Junctâ $F E$, quoniam per constructionem $A D$ est ad $D C$, ut $C B$ ad $B E$, hoc est, componendo ^a $A C$ ad $C D$ vel $C B$, ut $C E$ ad $E B$: *a p 18. libr.* erit quoque per 12.5. $A E$ ad $C E$, hoc est, $E F$, sicut $C E$ vel $E F$ ad $E B$. *5. Elem.* Hinc cum $\triangle^{num} A E F, F E B$, communem habentium angulum E , latera circa ipsum proportionalia sint: erunt quoque ^b reliqua latera *b p 6. libr.* $A F, F B$ ad se invicem, ut $A E$ ad $E F$, vel $E F$, hoc est, $C E$, ad $E B$. *6. Elem.* Sed ut $C E$ ad $E B$, ita est $A C$ ad $C B$. Quapropter erit ut $A F$ ad $F B$, ita $A C$ ad $C B$. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto F in circumferentia assumpto.

Quod ipsum aliter quoque demonstratum reperitur ab Eutocio in principio Commentariorum suorum in Apollonii Conica.

N O T A.

- * Hinc quoque dimanat constructio sequentis Problematis, ejusdem fermè cum præcedente argumenti.

Adhuc in 1^{am} Propositionem.

III P R O B L E M A.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere $A F, B F$, ut, quæ ab ipsis fiunt, datam inter se habeant rationem G ad I .

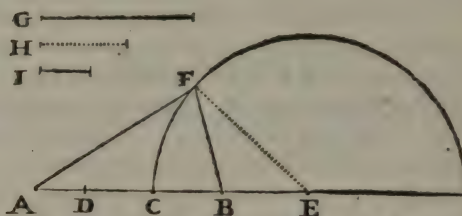
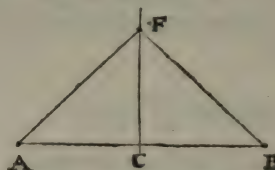
Primo, si G sit æqualis I , agatur, ut ante, ex C , medio ipsius $A B$ ad ipsam perpendicularis $C F$: ductisque ex A & B ad aliquod in ea punctum F rectis $A F, B F$, erunt, propter harum æqualitatem, etiam

$K k$ 3

quæ

quæ ab ipsis fiunt quadrata sibi invicem æqualia, cadetque punctum
a p 13. libr. F, ut in 1^{mo} casu præcedentis Problematis, in rectam CF.
6 Elem.

Sin autem G major sit quàm I, inventâ^a inter G & I mediâ pro-
b p 10. libr. portionali H, secetur AB in C^b, ita ut AC sit ad CB, sicut G ad H:
6 Elem.



e p 22. libr. eritque, si fiat, ut ante, AF ad FB, sicut AC ad CB, ^c ut \square^{rum} ex AF
6 Elem. ad \square^{rum} ex FB, sic \square^{rum} ex AC ad \square^{rum} ex CB, vel \square^{rum} ex G ad
d p Cor. 20. \square^{rum} ex H, id est ^d, sicut G ad I. Quod erat faciendum. Idem
libr. 6. Elem. similiter liquet de quolibet puncto F, in circumferentia assumpto.

Eodem modo patet: si à duobus punctis duæ rectæ lineæ infle-
 ctantur, habeantque figuræ, datâ specie super ipsis descriptæ, datam
 inter se rationem, punctum quæsitum contingere rectam lineam aut
 circuli circumferentiam.

Hinc:

Conclusio Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur,
3^{ma} Propo- ut illorum, quæ ab ipsis fiunt, differentia sit æqualis dato
sitionis. spatio, punctum inflexionis continget rectam lineam po-
 sitione datam. At verò rectam lineam aut circuli circum-
 ferentiam, si inflexæ, vel quæ ab ipsis fiunt, datam inter
 se habeant rationem.

Quod erat demonstrandum.

In

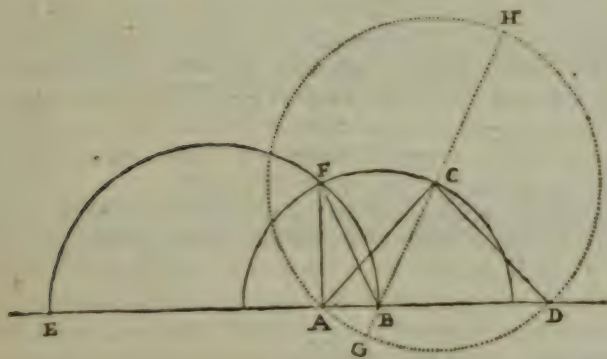
In 2^{dam} Propositionem.

IV PROBLEMA.

A dato puncto A in positione data recta linea AD rectam lineam terminatam ducere AC, ita ut, si ab ejus termino C ad positionem datam AD ducatur alia CD ipsi æqualis, id quod ab ea fit æquale sit rectangulo sub data AB, & alia ED, quæ ad datum punctum E in positione data AD à ducta CD abscinditur.

Constructio.

Inventâ mediâ proportionali BF inter EB & BA, describatur ex B intervallo BF circulus CF, ductâque ex A ad aliquod in circumfe-

1^{ma} figura.

rentia punctum C rectâ AC, & ex C rectâ CD æquali CA: erit
 \square^{um} ex CD æquale \square^{lo} sub AB, ED.

Demonstratio.

Descritto enim ex C intervallo CD vel CA circulo AGDH, juncta CB occurrat producta circumferentiæ in G & H, eritque in 1^{ma} fig., cum GH sic bifariam sit secta in C, & non bifariam in B, ^{a ap. libr. 21} \square^{um} GBH, sub inæqualibus segmentis, unâ cum \square^{um} ex BC vel BF, ^{Elem.} in-

265

Est enim $k \square^{\text{am}}$ ex A C vel C D æquale \square^{lo} F A I vel B A D, ut *k g Cor. 3.*
 requirebatur. Id quod similiter de quolibet in circumferen- *Sexti, ut Cor.*
 tia puncto est intelligendum. *17. Sexti*
Elem.

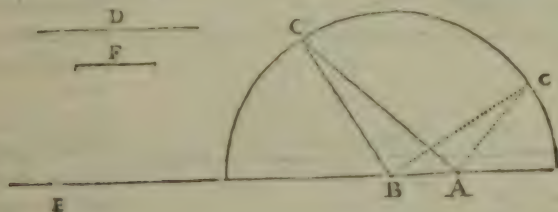
Aliud in 2^{dum} Propositionem.

V P R O B L E M A.

A dato puncto A in positione data recta linea A B rectam lineam ducere AC, ita ut, si ab ejus termino C ad positionem datam AD ducatur alia recta CB datæ D æqualis, quadratum, quod ab hac CB describitur, sit æquale rectangulo sub data F, & alia EB, quæ ad datum punctum E in positione data A B à ducta CB abscinditur.

Constructio.

Fiat ut F ad D, ita D ad E B, & ex B intervallo D describatur circulus. Tum ex A ducta ad aliquod in circumferentia punctum C re-

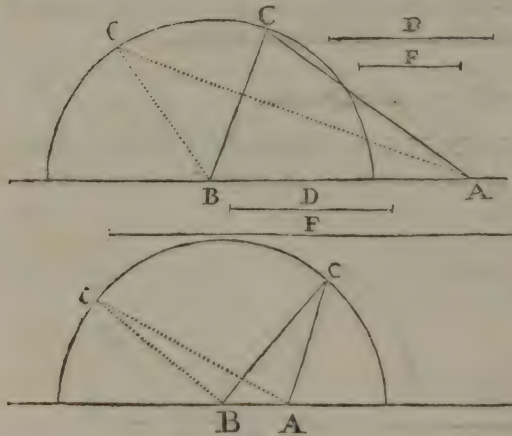
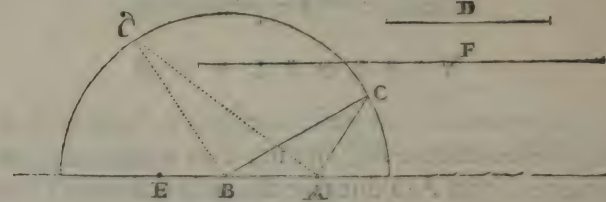
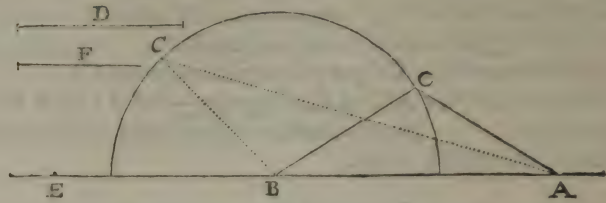


Et à AC, & à Cad B re à CB: erit \square^{um} quod ab ipsa describitur
æquale \square^{b} contento sub data F & abscissa EB.
Quod erat faciendum.

Li

Idem

Idemliquet de quolibet puncto C in circumferentia assumpto.



Ad eundem modum, si ex A sit ducenda recta AC, & ex C ad B data D æqualis, cujus \square^{um} sit æquale \square^{1o} sub data F & linea AB, quæ ad punctum A à ducta CB abscinditur, fiat rursus ut F ad D, ita D ad AB; descriptoque ex B, ut ante, circulo in-

tervallo D, & ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum rectâ AC, tum CB: erit ipsa data D æqualis, & \square^{um} ab ea descriptum æquale \square^{1o} contento sub lineis F & AB. ut requirebatur. Quod similiter de quolibet in circumferentia puncto est intelligendum.

Ad-

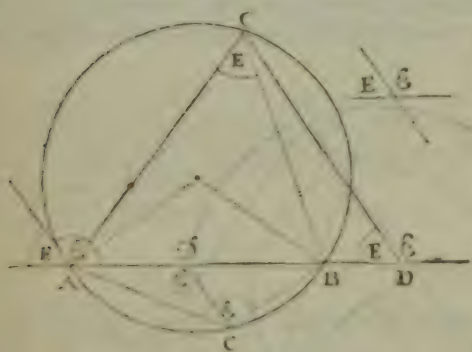
a p 17. libr.
6. Elem.

Adhuc aliud in 2^{dam} Propositionem.

VI PROBLEMA.

A dato puncto A in positione data recta linea A D rectam ducere lineam A C, ita, ut, si ab ejus termino C ad positionem datam A D ducatur alia C D in dato angulo E, quadratum à primò ducta A C descriptum sit æquale rectangulo sub data A B & alia A D, quæ ad datum punctum A in positione data A D ab ultimò ducta C D abscinditur.

Constructio.



Descripto super A B per 33. 3^{ti} Elem., vel per 2 Probl. 1^{mi} hujus segmento circuli A C B, quod capiat angulum A C B æqualem dato E; ductaque ex A ad aliquod in circumferentia punctum C recta A C, & ex C recta C D in dato angulo E:

erit \square^{um} ex A C æquale \square^{lo} B A D, contento sub data A B & abscissa A D.

Demonstratio.

Junctâ C B, cum angulus C A D utrique \triangle^{lo} A C B, A D C sit communis, & anguli ad C & D sint æquales: erit 3^{ti} quoque 3^{do} a \square^{lo} Cor. 32. æqualis, ac proinde \square^{lo} B A ad A C, sicut A C ad A D: adeoque \square^{lo} sub extremis B A, A D \square^{lo} æquale \square^{lo} media A C. Quod erat faciendum. Idem similiter constat de quolibet puncto C in circumferentia circuli A C B assumpto. \square^{lo} 4. libr. 6. Elem. \square^{lo} 17. libr. 6. Elem.

Eodem ferme modo solvitur sequens.

L I 2

V I I

Demonstratio.

Produceis HA, CA donec circumferentia occurrant in K & L,
 demissaque ex I super AG perpendiculari IM, jungatur GB. Quo-
 niam itaque angulus CAD utrique Δ^{lo} AGB, ADC communis est,
 & angulus ad G æqualis angulo ad D, erit quoque Δ^{us} Δ^{tio} æqualis ^{b p Cor. 32.}
 ac proinde BA ad AG, sicut AC ad AD, & per consequens Δ^{um} ^{libr 1. Elem.}
 sub extremis BA, AD æquale Δ^{lo} sub mediis CA, AG. Porro ^{c p 4. libr. 6.}
 cum IM sit perpendicularis ad AG, erit AM Δ^{e} æqualis MG, ut & LM ^{Elem.}
 æqualis MC, quibus à se invicem subductis, erit quoque LA æqua-
 lis GC. Eodem modo, cum IA per constructionem sit perpendicu-
 laris ad HK, erit quoque HA æqualis AK. Hinc cum Δ^{um} CAL, hoc
 est, ACC Δ^{e} , sit æquale Δ^{lo} KAH, hoc est, Δ^{um} ex AH, & hoc sit ^{d p 16. libr.}
 æquale Δ^{lo} FAB Δ^{e} ; erit etiam Δ^{um} ACG æquale Δ^{lo} FAB. Est ^{6. Elem.}
 autem Δ^{um} CAG æquale ostensum Δ^{lo} BAD. Quare cum ^{c p 3. libr. 3.} duo
 Δ^{lo} CAG, ACG simul sumpta sint æqualia Δ^{um} ex AC; itemque ^{Elem.}
 duo Δ^{lo} BAD, FAB simul sumpta æqualia Δ^{lo} sub AB, FD: erit ^{f p 35. libr.}
 Δ^{um} ex AC æquale Δ^{lo} sub AB, FD. Quod erat faciendum. ^{g p Constr.}
 Idem similiter patet de quolibet puncto in circumferentia IHLKC ^{17. libr.}
 assumpto. ^{6. Elem.} ^{h p 2. libr. 2.} ^{Elem.} ^{i p 1. libr. 2.} ^{Elem.}

His adijunge sequens

VIII PROBLEMA.

A dato puncto A extra positione datam rectam lineam
 NP rectam lineam terminatam ducere AC, ita ut, si ab
 ejus termino C ad positione datam NP alia ducatur recta
 CP in dato angulo E, quadratum primò ductæ AC sit
 æquale rectangulo sub data AB & alia NP, quæ ad datum
 punctum N in positione data NP ab ultimò ducta CP
 abscinditur.

LI 3

Con-

H, B, C transeuntem, in B; eritque ⁿ angulus CBD ad contactum ⁿ p 32. libr. 3. Elem. angulus BHC, in alterno circuli segmento. Hinc, cum ^o angulus CBD sit æqualis angulo DCB, erunt etiam anguli BHC & DCB inter se æquales. Est autem angulus BCD æqualis angulo G, &c.

Quod autem hic demonstratum est de \square^{is} super AC & CB descriptis, intelligendum quoque erit de aliis figuris, datâ specie super ipsas descriptis.

Hinc:

Si à datis duobus punctis dux rectæ lineæ inflectantur, ^{Conclusio} & sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato majus ^{3^{ta} Propo-} quam in ratione data: punctum inflexionis continget po- ^{sitionis.} sitione datam circumferentiam.

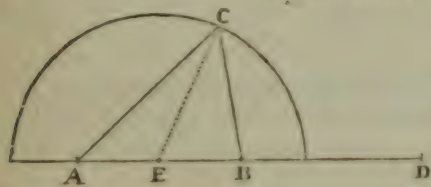
Quod erat demonstrandum.

In 4^{ta} Propositionem.

X PROBLEMA.

A duobus pluribusve datis punctis A, B rectas lineas inflectere AC, BC; ut, quæ ab ipsis fiunt, sint æqualia dato spatio DAB.

Constructio.



Secâ AB bifariam in E, inveniatur inter AE, ED media proportionalis EC; descriptoque ex E intervallo EC circulo, ductisque à punctis A, B ad ali-

quod in circumferentia punctum C rectis AC, BC: erunt, quæ ab ipsis fiunt \square^{a} , simul sumpta, æqualia dato spatio DAB.

a p 18. Prop. 2da partis, Primi tractatus.

Demonstratio.

Junctâ EC, erunt ^a bina \square^{a} ex AC, CB dupla \square^{num} ex AE, EC simul sumptorum. Est autem \square^{num} ex EC ^b \square^{lo} AED, & ^b \square^{lo} AED, & ^c \square^{lo} AED ^c \square^{lo} DAE. Aequalia igitur sunt bina \square^{a} ex AC, CB duplo \square^{lo} DAE. Hinc, cum \square^{lo} DAB ^{du-}

b p 2 Constr. 17. libr. 6. Elem. c p 3. libr. 2. Elem.

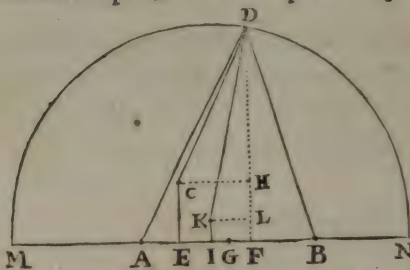
duplum quoque sit \square^{li} DAE: erunt bina \square^{ta} ex AC, CB æqualia \square^{to} DAB. Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto C, in circumferentia circuli assumpto.

Sequitur resolutio atque operatio Problematis.

A datis 3^{bus} punctis A, C, & B tres rectas lineas inflectere AD, CD, & BD, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, simul sumpta, sint dato spatio æqualia.

d p 47. libr.
1. Elem.



Demissâ ex C super AB perpendiculari CE, secetur AB bifariam in G, ponaturque AG vel GB $\propto a$, EG $\propto b$, & EC $\propto c$. Deinde ad inveniendum punctum D, sit GF $\propto x$, & perpendicularis DF $\propto y$: eritque

• AF $\propto a + x$, cujus \square^{to} $aa + 2ax + xx$ si addatur \square^{cum} ex DF, fit $aa + 2ax + xx + yy$, \square^{cum} ex AD.

Eodem modo, cum GB sit $\propto a$, & GF $\propto x$: erit FB $\propto a - x$, cujus \square^{to} $aa - 2ax + xx$ si addatur \square^{cum} ex DF $\propto yy$, fit $aa - 2ax + xx + yy$, \square^{cum} ex DB.

Similiter addendo bina \square^{ta} ex CH, HD, ut $bb + 2bx + xx$ & $yy - 2cy + cc$, erit summa $bb + 2bx + xx + yy - 2cy + cc$, \square^{cum} ex CD.

Hinc, additis 3^{bus} \square^{tis} ex AD, CD, & BD, erit aggregatum $2aa + bb + cc + 2bx - 2cy + 3xx + 3yy$ æquale dato spatio, quod sit $2aa + 2bb + 2cc + 4dd$. Quæ æquatio, ad simplicissimam formam reducta, erit $yy \propto + \frac{2}{3}cy + \frac{1}{3}bb$

$$\begin{aligned} &+ \frac{2}{3}cc \\ &+ \frac{4}{3}dd \\ &- \frac{1}{3}bx \\ &- xx. \end{aligned}$$

Ad quam solvendam cum nulla in Problemate supersit materia perveniendi ad æquationem pro x : argumentum est, Problema propositum non esse penitus determinatum, sed infinita esse puncta, ut D, quæ sitis satisfaciencia. Quæ igitur omnia inveniuntur, subinde su-

sumendo ad arbitrium aliam atque aliam lineam pro x . Quocirca y æquali existente $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$, cum pro $\frac{1}{3}bb$ poni possit $\frac{4}{9}bb - \frac{1}{9}bb$, poterit pro y $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$ scribi $y = \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. Otiendens longitudinem linearum DF, prout x indeterminata existit, ac proinde GF ad arbitrium sumitur.

Atque ita videre est, datis quocunque punctis, semper ejusmodi terminos inveniri; præterquam quod quidam ex illis interdum abesse possint, signaque $+$ & $-$ diversimodè mutari.

Construendo.

Ad constructionem fiat IG $\frac{1}{3}b$, & ex I erecta super AB perpendiculari IK $\frac{1}{3}c$, describatur centro K intervallo $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$ circulus MDN, & quodlibet in circumferentia punctum D

Demonstratio.

quæsito satisfaciet. Quod manifestum est sumendo KD $\frac{1}{3}b + x$, & KL, hoc est, IF $\frac{1}{3}b + x$; nimirum, æqualem radici ex $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$. quæ etiam esse potest $\frac{1}{3}b = x$, = significat quando perpendicularis DF cadit inter G & I, vel extra I, quæ inter $\frac{1}{3}b$ & x , cum non madmodum illam hîc inter G & B sumpsimus. Unde LD fit $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb}$ aut cognoscitur penes $\frac{2}{3}bx - xx$. qualem illam hîc invenimus, vel etiam $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, si $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd$ cesset. $+$ $\frac{1}{3}cc$ est majus quam $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Quæ etiam esse potest $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, quando $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ est minus quam $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Porro notandum, pro dato spatio sumi potuisse $2aa + 2bb + 2cc - \frac{4}{3}dd$, nimirum, minus duobus \square^a ex A C, CB: sicut hoc loco illud majus assumpsimus, sine reliqui immutatione.

Id quod ostendit, quo pacto à datis tribus vel pluribus punctis ad unum punctum rectæ linearum duci possint, quantum \square^a , simul sumpta, sint dato spatio æqualia. Quod erat faciendum.

Denique cum in 4^{ta} Propositione in genere fiat sermo de figuris datâ specie super ductas descriptis: id, quod hîc speciatim de \square^a ostendimus, aliis quoque figuris datæ speciei applicare licebit.

Mm 2

Quo-

Quoniam enim per 49 Prop^{ne}m Datorum Euclidis, si ab eadem recta duo rectilinea quælibet datâ specie describantur, ipsa ad invicem rationem habent datam: sequitur, si rationem \square^{ii} ex A D ad figuram datâ specie super A D descriptam ponamus ut e ad f; eamque \square^{ii} ex C D ad datâ specie figuram super C D ut e ad g; & denique rationem \square^{ii} ex B D ad figuram specie datam super B D ut e ad h, summam harum trium figurarum fore $aaf + 2afx + fxx + fyy + bbg + 2bgx + gxx + gyy - 2cgy + ccg + aah - 2ahx + hxx + hyy$.

Hinc si datum planum supponamus esse dd, æquatio ad legitimam formam reducta, erit $yy \propto + \frac{2cgy}{f+g+h} + \frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h - 2afx - 2bgx + 2ahx} - xx$.

8 significat
+ vel -.

Vel in simplicioribus terminis: $yy \propto + 2iy + kk - 2lx - xx$.

Hoc est, scribendo 2i pro $\frac{2cg}{f+g+h}$, & kk pro $\frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h - 2afx - 2bgx + 2ahx}$, & + vel - 2l pro $\frac{-2afx - 2bgx + 2ahx}{f+g+h}$. Datâ enim om-

nibus hisce quantitibus, licebit iis ad arbitrium nomina imponere. Quocirca cum hæc æquatio non sit diversæ formæ à præcedente, continget punctum D, ut ante, circumferentiam circuli positione datam. Idem similiter liquet de quocunque punctis.

Conclusio
4^{ta} Propo-
sitionis.

Hinc:

Si à quocunque datis punctis ad punctum unum inæstantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales: continget punctum positione datam circumferentiam.

Quod erat demonstrandum.

In

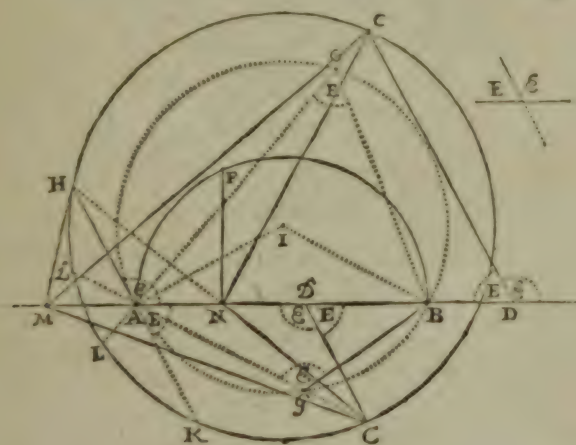
In 5^{ta}m Propositionem.

XI PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N in positione data recta linea AD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C ducatur recta CD in dato angulo E ad positione datam AD, quadrata ab inflexis MC, NC æqualia sint rectangulo sub data AB, & alia MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum M, vel aliud quodpiam in positione data AD ab ultimò ducta CD abscinditur.

Constructio.

Secunda MN bifariam in A, describatur super AB, dimidia data recta ^{apud 33. libr. 3.} αx , & segmentum circuli AGB, capiens angulum dato angulo E ^{Elem. vel per 2 Probl. 1^{us} huius.}

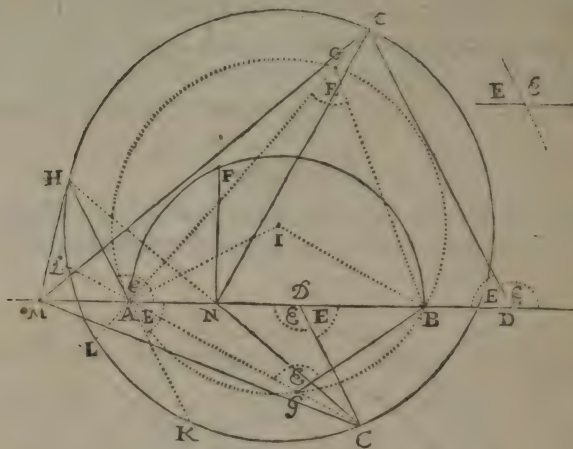


æqualem: inventaque inter AN, NB mediâ proportionali NF, eaque positâ ab A ad H, (hoc est, in linea AH, quæ cum MA angulum

Mm 3

facit

facit dato angulo E æqualem) describatur ex I centro circuli AGB per H circulus HCKL: Dico, si à punctis M, N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ MC, NC, tum recta CD ipsi AH parallela, hoc est, in dato angulo E, quod \square^{1a} ipsarum MC, NC simul sumpta sint æqualia \square^{1o} contento sub data 2 AB & abscessa MD.



Demonstratio.

Junctâ AC, secante circulum AGB in G, ducatur GB: eritque ut in 7^{mo} Problemate hujus, \square CAG æquale \square^{1o} DAB, & \square ACG æquale \square^{1o} ex AH vel NF, hoc est, \square ANB. Sunt autem
b p 2. libr. 2. Elem. bina \square^{1a} CAG, ACG \square^{1o} æqualia \square^{1o} ex AC; itemque \square ANB
c p 3. libr. 2. Elem. \square^{1o} æquale \square^{1o} NAB, hoc est, MAB minus \square^{1o} ex AN. Quocirca
d p 1. libr. 1. Elem. \square^{1o} ex AC æquale est binis \square^{1o} DAB, MAB, minus \square^{1o} ex AN, hoc est, \square^{1o} æquale erit \square^{1o} sub MD & AB, dempto eidem \square^{1o} ex AN. Atque adeò \square^{1o} ex AC minus est \square^{1o} sub MD, AB quadrato ex AN; hoc est, erit illud unà cum \square^{1o} ex AN æquale \square^{1o} sub MD, AB. Hinc cum \square^{1o} bina \square^{1o} ex MC, CN sint binorum \square^{1o} ex CA, AN dupla: erunt \square^{1o} ex MC, CN simul sumpta æqualia duplo \square^{1o}

\square^{lo} B A M, hoc est, æqualia \square^{lo} sub data 2 AB & recta A M, quæ à ducta A H ad datum punctum M in positione data A B abscinditur. ut requirebatur.

Sequitur Constructio & Demonstratio, cum bina \square^{ta} ex M C, C N æqualia requiruntur \square^{lo} sub data 2 A B & recta O D, quæ ad aliud quodpiam datum punctum, ut O, in positione data A D à ducta C D abscinditur.

Constructio.

Invento, ut ante, puncto H, ponatur in linea H I recta P H æqualis rectæ O M, & H Q æqualis A B; inventa quæ inter ipsas mediâ proportionali H R, & ex I per punctum R descripto circulo: Dico, si ex duobus punctis M & N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ M C, N C, \square^{ta} quæ ab ipsis fiunt, simul sumpta, esse æqualia \square^{lo} , contento sub data 2 A B & abscissa O D.

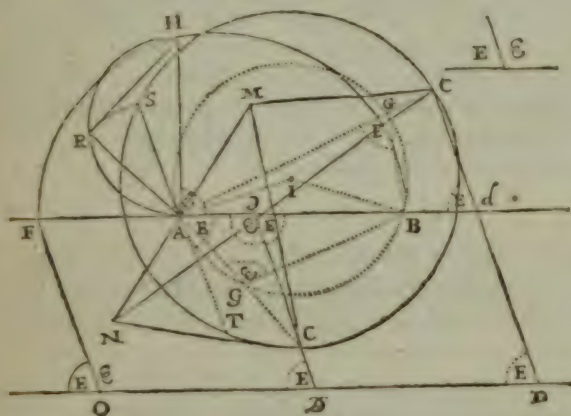
Demonstratio.

Productâ R H ad circumferentiam in V, ut & H A eandem utrinque terminante in punctis S & T: erit, ut in 7^{mo} Problematè hujus, \square C A G æquale \square^{lo} D A B, & \square A C G æquale \square^{to} ex A S. Hinc, cum bina \square^{la} C A G, A C G sint \square^{ta} æqualia \square^{to} ex A C; erit \square^{tum} ex A C æquale \square^{lo} D A B unâ cum \square^{to} ex A S. Est autem \square^{tum} ex A S æquale \square^{lo} S H T unâ cum \square^{to} ex A H. Quocirca etiam \square^{tum} ex A C æquale erit binis \square^{lis} D A B, S H T unâ cum \square^{to} ex A H. Porro, cum \square S H T sit æquale \square^{lo} R H V, hoc est, \square^{to} ex H R, quod \square^{lo} æquatur \square^{lo} P H Q, hoc est, \square^{lo} sub O M & A B; item quæ \square^{tum} ex A H, ut ante, æquale \square^{lo} M A B, dempto eidem \square^{to} ex A N: erit \square^{tum} ex A C æquale 3^{bus} \square^{lis} sub D A, A B, sub M A, A B, & sub O M, A B, multatis \square^{to} ex A N. Sunt autem 3^a \square^{la} sub D A, A B, sub M A, A B, & sub O M, A B \square^{m} æqualia \square^{lo} sub O D & A B. Æquale igitur est \square^{tum} ex A C \square^{lo} sub O D, A B multato \square^{to} ex A N: ac proinde \square^{tum} ex A C unâ cum \square^{to} ex A N æquale \square^{lo} sub O D, A B. Unde cum bina \square^{ta} ex M C, C N sint dupla \square^{to} ex C A, A N, liquet, illa simul sumpta æqualia esse duplo \square^{lo} sub O D & A B, hoc est, æqualia \square^{lo} sub O D & 2 A B. Quod erat faciendum.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto C in circumferentia R C T assumpto; ut & de aliis figuris datâ specie super M C, N C descriptis.

XII PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra positione datam rectam lineam OD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C agatur recta CD in dato angulo E ad positione datam OD, quæ ab inflexis MC, NC fiunt quadrata, simul sumpta, æqualia sint rectangulo sub data z AB & alia OD, quæ ad datum punctum O in positione data OD ab ultimo ducta CD abscinditur.



Constructio.

Junctâ NM, eâque bifariam sectâ in A, agatur FAB parallela OD; sumptâque in ipsa rectâ AB, æquali semissi datæ lineæ, describatur super ea ^a segmentum circuli AGB, capiens angulum æqualem ^a p 33. libr. dato E. Deinde ductâ ex O rectâ OF, faciente cum OD angulum ^{3.} Elem. vel æqualem angulo E, inveniatur ^b inter FA, AB media proportionalis ^{p 2 Probl. 1^{ma}} AH, & super ipsa describatur semicirculus ARH. In quo li ^c aptetur ^b p 13. libr. HR æqualis NA vel AM, jungatur RA. Tum sumptâ AS æquali ^{6.} Elem. AR, eâque positâ, ut angulus SAF sit æqualis dato E, describatur ^c p 1. libr. 4^a ex I centro circuli AGB per S circulus SCT; & ex punctis M, N ad ^{Elem.} ali-

aliquod in circumferentia punctum C ducantur MC, NC, tum ex C ad O D recta CD, in dato angulo E: eruntque, quæ ab MC, NC, fiunt \square^{ea} , simul sumpta, æqualia \square^{lo} , contento sub data 2 AB & abscissa O D.

Demonstratio.

Per 7^{mum} Problema hujus \square CAG est æquale \square^{lo} d AB, & d 31. libr. \square ACG æquale \square^{to} ex AS vel AR. Est autem d \square^{um} ex A R unà 3. & 47. cum \square^{to} ex RH, hoc est, AM æquale \square^{to} ex AH, hoc est, e libr. 1. Elem. \square^{lo} FAB. Hinc cum f bina \square^{la} CAG, ACG sint æqualia \square^{to} ex e p Constr. AC, & bina \square^{la} d AB, FAB æ equalia \square^{lo} sub F d & AB, hoc 17. libr. est, sub OD & AB: erit \square^{um} ex A C unà cum \square^{to} ex A M æquale 6. Elem. f p 2. libr. 2. \square^{lo} sub OD & AB. Sed h bina \square^{ea} ex AC, AM, subdupla sunt Elem. \square^{to} ex MC, NC. Quocirca bina quadrata ex MC, NC æqualia g p 1. libr. 2. erunt \square^{lo} sub OD & 2 AB. Quod erat faciendum. Idem similiter Elem. liquet de quolibet puncto C in circumferentia SCT assumpto; ut & h p 18. Prop. de aliis figuris, datâ specie super MC, NC descriptis. 2^æ partis. His adde duo sequentia Problemata. 2^æ tractat.

XIII PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N in positione data recta linea A D duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C ad positione datam A D in dato angulo E agatur recta CD, eorum, quæ ab inflexis fiunt, differentia, sit æqualis rectangulo sub data 4 AB & alia O D, quæ ad datum punctum O in positione data A D ab ultimò ducta CD abscinditur.

Constructio.

Secâ MN bifariam in A, statuatur AB æqualis 4^{te} parti datæ rectæ, ducaturque AH in dato angulo E. Tum ductâ AI perpendiculari super AH, donec occurrat perpendiculari BI in I, jungatur MI. 12. libr. Deinde a ad MB, BA, & OA inventâ 4^{ta} proportionali AF, (hoc est, 4. Elem. ut MB sit ad BA, sicut OA ad AF) agatur ex F recta infinita FHC, secans MI ad angulos rectos in G. Dico si ab M & N ad aliquod in ea punctum C ducantur MC, NC, tum CD parallela AH, hoc est, in dato angulo E, differentiam \square^{to} ex MC, NC esse æqualem \square^{lo} sub 4 AB & O D.

De-

k p 18. Prop. sub MN & AK, hoc est, quadruplum \square^{lum} sub MA & AK æ quale
 2^{da} partis, differentia \square^{torum} ex NH, MH. Quocirca etiam quadruplum \square^{lum}
 1^{mi} tractat. sub BA & AO, hoc est, \square^{lum} sub data 4BA & abscissa AO eidem
 differentia \square^{torum} ex NH & MH æ quale erit. Ut requirebatur.

*Demonstratio puncti C, ubicunque in
 linea FGC assumpti.*

Demissa ex C super AD perpendiculari CL, cum ¹ LK ad KF sit,
 Elem. sicut CH ad HF, itemque DA ad AF, sicut CH ad HF: erit etiam
 m p 11. libr. ^m LK ad KF, sicut DA ad AF. Et permutando ⁿ LK ad AD, sicut KF
 5. Elem. ad FA. Est autem MB ad MA, ut AK ad AF, hoc est, dividendo ^o BA
 n p 16. libr. ad AM, ut KF ad FA. Quocirca erit ^p ut LK ad AD, ita BA ad AM:
 5. Elem. ac proinde ^q \square^{lum} sub LK & MA æ quale \square^{lo} sub AD & AB. Est
 o p 17. libr. autem \square^{lum} sub KA & MA æ quale \square^{lo} sub OA & AB. Æ qualia
 5. Elem. igitur sunt bina \square^{la} sub LK, MA & sub KA, MA, hoc est, \square^{lum} ,
 p p 11. libr. sub tota LA & MA binis \square^{lis} sub AD, AB & sub OA, AB, hoc est,
 5. Elem. \square^{lo} sub tota OD & AB. Hinc cum quadruplum \square^{lum} sub LA,
 q p 16. libr. MA vel duplum \square^{lum} sub LA, MN sit æ quale ^r differentia \square^{torum}
 1 p 18. Prop. ex NC, MC: erit similiter quadruplum \square^{lum} sub OD, AB, vel sub
 2^{da} partis, OD & 4AB æ quale eidem differentia. Quod erat faciendum.
 1^{mi} tractat.

Idem similiter liquet de quolibet puncto C in recta FGC assumpto; ut & de aliis figuris, data specie, super MC, NC descriptis.

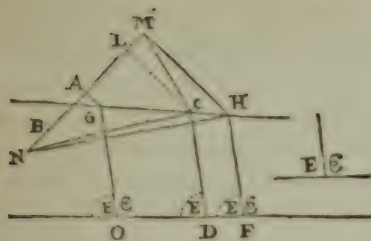
Eodem modo operandum, si differentia \square^{torum} ex NC, MC æ qualis requiratur \square^{lo} sub data 4AB & recta MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum, ut M, à recta CD abscinditur. nimirum si punctum O tantum coincidere fingatur puncto M, sine ulla constructionis aut demonstrationis immutatione.

XIV PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra positione datam rectam lineam OD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C agatur recta CD in dato angulo E, ad positione datam OD, eorum, quæ ab inflexis fiunt MC, NC, differentia sit æ qualis rectangulo sub data 4AB & alia OD, quæ ad datum punctum O in positione data OD ab ultimò ducta CD abscinditur.

Con-

Constructio.



Juncta NM secetur, ut ante, bifariam in A; sumptaque AB æquali $\frac{1}{4}$ æ parti data rectæ, inveniatur ad BA, AM 3^{ia} proportionalis OF, ducanturque OG, FH in dato angulo E, occurrentes perpendicularibus AG, MH in G & H. Per quæ si agatur recta linea infinita, & ex punctis N, M ad aliquod in ipsa punctum C, extra G, ducantur NC, MC; tum CD parallela OG vel FH, hoc est, in dato angulo E: erit differentia \square^{totum} ex NC, MC æqualis \square^{lo} sub data 4 AB & abscissa OD.

Demonstratio puncti H.

Juncta NH, quoniam \square^{totum} ex NH² excedit \square^{totum} ex MH quadrato ex NM, hoc est, $4^{plo} \square^{to}$ ex NA vel AM: sequitur, cum per constructionem BA ad AM sit, ut AM ad OF, & idcirco \square^{lum} sub BA, OF sit æquale \square^{to} ex AM, quod $4^{plum} \square^{lum}$ sub BA, OF, hoc est, \square^{lum} sub 4 BA & OF, sit æquale $4^{plo} \square^{to}$ rectæ AM, seu differentia \square^{totum} ex NH, MH. Ut requirebatur.

Demonstratio puncti C.

Demissa CL perpendiculari super NM, cum \square^{totum} ex NC majus sit \square^{to} ex MC duplo \square^{lo} sub NM & AL, hoc est, duplo \square^{lo} sub AM & AL; & BA sit ad AM, sicut AM ad OF, vel AL ad OD, & idcirco \square^{lum} sub BA, OD æquetur \square^{lo} sub AM, AL: sequitur quadruplum \square^{lum} sub BA, OD, hoc est, \square^{lum} sub 4 BA & OD esse æquale quadruplo \square^{lo} sub AM & AL seu differentia \square^{totum} ex NC, MC. Quod erat faciendum.

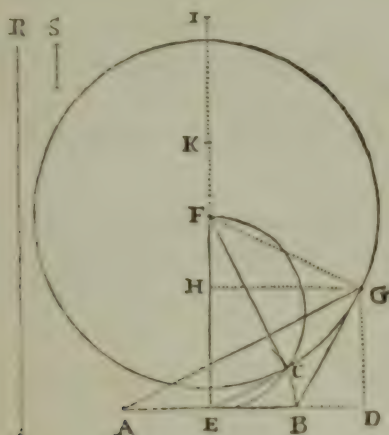
Idem similiter liquet de quolibet puncto C in recta GCH extra G assumpto; ut & de aliis figuris datæ specie super NC, MC descriptis.

Nn 3

Hinc:

Præparatio ad demonstrationem.

Demissâ ex G super AB perpendiculari GD, junctâque FG, agatur GH parallela AB. Deinde fiat FK æqualis FH, & FI æqualis FE.

*Demonstratio.*

Quoniam itaque ^a \square^{rum} ex FH unâ cum \square^{to} ex HG æquale est ^{a p 47. libr.}
 \square^{to} ex FG vel FC, hoc autem cum \square^{to} ex CE vel EB ^b sit æquale \square^{to} ^{1. Elem.}
ex EF: erunt \square^{ta} ex FH, HG, & EB simul sumpta æqualia \square^{to} ex ^{b p 31. libr.}
EF. Est autem ^c \square^{rum} ex EF æquale \square^{to} ex FH unâ cum \square^{to} HEK. ^{libr. 1. Elem.}
Quare etiam \square^{ta} ex FH, HG, & EB æqualia erunt \square^{to} ex FH unâ ^{c p 6. libr. 2.}
cum \square^{to} HEK. Unde ablato communi \square^{to} ex FH, erunt similiter ^{Elem.}
reliqua \square^{ta} ex HG, EB vel AE, ED reliquo \square^{lo} HEK æqualia.
Est autem ^d \square^{lo} HEK vel IHE æquale \square^{lo} IEH, dempto eidem ^{d p 3. libr. 2.}
 \square^{to} ex EH. Quocirca etiam \square^{ta} ex AE, ED æqualia sunt \square^{lo} IEH, ^{Elem.}
multato \square^{to} ex EH. Hinc si utrinque addatur \square^{rum} ex EH vel DG:
erunt ^{3^a} \square^{ta} ex AE, ED, & DG, simul sumpta, æqualia \square^{lo} IEH.
Ac proinde quoque eorum dupla, hoc est ^e, \square^{ta} ex AD, DB, unâ ^{e p 9. vel 10.}
cum \square^{to} ex DG bis sumpto, æqualia duplo \square^{lo} IEH, hoc est, ^{libr. 2. Elem.}
sub

*Demonstratio puncti E, ubicunque sumpti
in linea DCE.*

Cum AD sit æqualis DB, & idcirco AF æqualis BD, DF: erit
 \square^{um} ex AF ^d æquale \square^{co} ex FB unā cum \square BDF quater sumpto, ^{d p 8. libr. 2.}
 seu, quod idem est, \square^{um} ex AF majus erit \square^{co} ex FB quadruplo \square^{lo} ^{Elem.}
 BDF, hoc est, \square^{lo} sub dupla AB & DF. Unde si utrinque addatur
 \square^{um} ex FE, erunt bina \square^{co} ex AF & FE, hoc est \square^{um} ex AE, ma- ^{c p 47. libr.}
 jora binis \square^{co} ex FB & FE, hoc est, \square^{co} ex EB rectangulo sub du- ^{1. Elem.}
 pla AB & DF. Sed ut DB est ad BC, ita est & DF ad FE; & per conse- ^{f p 47. libr.}
 quens \square^{um} sub DB & FE, hoc est \square , $\triangle AEB$, æquale \square^{lo} sub ^{1. Elem.}
 BC & DF. Similiter \square^{um} sub dupla AB & DF est ad \square^{um} sub ^{g p 4. libr. 6.}
 BC & DF, sicut dupla AB ad BC. Quare etiam excessus quo \square^{um} ^{Elem.}
 ex AE superat \square^{um} ex EB ad $\triangle AEB$ erit, sicut dupla AB ad BC, seu ^{h p 16 Sextis,}
 ut radf. Quod erat faciendum. ^{c p 41. libr.}
^{1. Elem.}
^{1 p 1. libr. 6.}

Idem similiter liquet de quolibet puncto in linea DE assumpto, ^{Elem.}
 atque etiam manifestum est de quibuscumque aliis figuris, datā specie ab
 inflexis AE, BE descriptis.

E quibus igitur binis Problematis constat sequens

PROPOSITIO.

Si à terminis datæ rectæ lineæ duæ rectæ lineæ infle-
 ctantur: ita ut figuræ datæ specie ab ipsis descriptæ ad
 triangulum sub datâ & inflexis comprehensum datam
 habeant rationem: punctum ad inflexionem contingeret
 circumferentiam circuli positione datam. At verò rectam
 lineam, si differentia earundem figurarum ad dictum tri-
 angulum datam habeat rationem.

Quod erat demonstrandum.

Oo

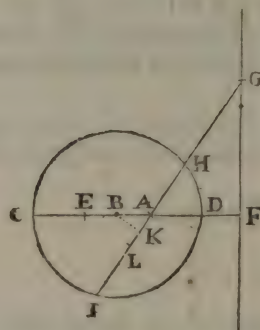
In

In 6^{am} Propositionem.

XVII PROBLEMA.

Extra datum positione circulum CHD punctum invenire G, à quo si per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea GHAI, circumferentiam secans in H & I; ut quadratum lineæ AG, inter hæc puncta interceptæ, sit æquale rectangulo IGH, contento sub tota secante IG & exteriori assumpta GH.

Constructio.



Ductâ per A & centrum B rectâ lineâ, secante circumferentiam in C & D; sumatur EB æqualis BA, fiatque ut EA ad AD, ita AD ad DF. Tum per F ductâ FG ad angulos rectos ipsi CAD: dico, si ex puncto aliquo in ea G per A agatur recta GHAI, circumferentiam secans in H & I, \square^{um} ex AG esse æquale \square^{lo} IGH.

Demonstratio puncti F.

Cum CB sit æqualis BD, & EB æqualis BA: erit etiam CE æqualis AD. unde & CA æqualis ED. Porro cum ^a EA sit ad AD, ut AD ad DF, hoc est, componendo ^b ED vel CA ad AD, sicut AF ad FD: erit quoque ^c CF ad FA, sicut AF ad FD: ac proinde ^d \square^{um} ex AF æquale \square^{lo} CFD. Ut requirebatur.

^a p. Constr. 14.
^b p. 18. libr. 5. Elem.

^c p. 12. libr. 5. Elem.

^d p. 17. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti G.

Demissâ ex B super IG perpendiculari BK, secabit ipsa ^e rectam IH bifariam in K. Hinc si LK, ut supra, sumatur æqualis KA, erit ^f similiter IL æqualis HA. Deinde cum ^g propter similitudinem \triangle^{lorum} ABK, AGF, BA sit ad AG, sicut KA ad AF; & idcirco EA ad AG,

^e p. 3. libr. 3. Elem.

^f p. 4. libr. 6. Elem.

LOCA PLANA RESTITUTA. 291

AG, sicut LA ad AF: erit \square EAF \propto quale \square LAG. Sed per
 constructionem EA est ad AD, sicut AD ad DF, hoc est, per 12. 5^{ti}
 Elem., EA ad AD, sicut ED, hoc est, CA, ad AF; ac proinde h
 \square EAF \propto quale \square CAD, hoc est \square IAH. Quocirca cum
 \square EAF sit \propto quale ostensum \square LAG, idemque similiter sit \propto qua-
 le \square IAH; erunt etiam \square LAG & IAH inter se \propto qualia. Unde
 erit \propto ut AG ad AH, ita IA ad AL; & dividendo \propto GH ad HA, sicut
 IL, hoc est, HA, ad AL. Cum igitur GH, HA, & AL sint 3 recte
 proportionales, sicut etiam FD, DA, & AE; illic autem IL sit
 \propto qualis HA, sicut hic CE \propto qualis DA: erit similiter, ut supra, \square cum
 ex AG \propto quale \square IGH. Quod erat faciendum.

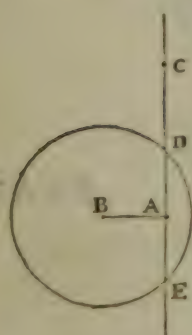
Idem similiter intelligendum de quolibet puncto G in recta FG
 assumpto.

Aliud in 6^{ta}m Propositionem.

XVIII PROBLEMA.

Extra datum positione circulum DE invenire pun-
 ctum C, à quo si per punctum intra circulum datum A
 recta ducatur linea CDAE, circumferentiam secans in D
 & E; ut quadratum lineæ AC inter hæc puncta interce-
 ptæ sit \propto quale rectangulo ECD, contento sub tota se-
 cante EC & exteriori assumpta CD, unà cum rectangulo
 EAD, comprehenso sub duabus intra circulum portio-
 nibus EA, AD.

Constructio.



Ductâ ex centro B ad punctum A rectâ
 BA, erigatur in A ad ipsam perpendicularis
 AC. Dico, si in ea extra circulum sumatur
 aliquod punctum C, \square ECD unâ cum
 \square EAD esse \propto quale \square ex AC. Quod
 erat faciendum. Idem similiter intellige de
 quolibet puncto C, in recta AC extra circu-
 lum assumpto.

Cujus demonstratio ex 6^{ta} 2^{da}, & 3^{ta}
 3^{ta} Elementorum Euclidis est manifesta.

O o 2

Hinc:

Hinc:

Conclusio
6^a Propo-
sitionis.

Si in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod sit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus, continetur: punctum extra assumptum positione datam rectam lineam continget.

Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem circumferentiam.

Quod erat demonstrandum.

FINIS.

FRAN-

243

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Mathematicos Professoris,
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER IV.
SIVE DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE,
TRACTATUS.
GEOMETRIS, OPTICIS;
Præsertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiae Typographi.
c15 Idc LVII.

Nobilissimis atque Amplissimis

DOMINIS,

ILLVSTRIS ACADEMIÆ

LUGDVNO-BATAVÆ, CVRATORIBVS,

- D. AMELIO BOVCHORST, Domino de Wimmenum, Rheno-landiæ Balivo & Chomarcho, atque in Confessu Præpotentum Illustrissimorumque Belgii Confœderati Ordinum ex Equestri Hollandiæ Ordine Delegato.
- D. GERARDO SCHAEF, ad Sereniss. & Potentiss. Daniæ Regem nomine Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum nuper Legato, nunc verò Urbis Amstelodamensis Consuli.
- D. CORNELIO à BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii & West-Iselmundæ Toparchæ, Comitatus Hollandiæ Consiliario ac in Zuidt-Hollandia Quæstori Generali, antehac ad Sereniss. & Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Legationibus perfuncto, jam autem in Confessu Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum Hollandiæ Delegato.

UT ET,

- D. CLEMENTI à BAERSDORP JC^{to}
- D. ADRIANO van STAVEREN
- D. NICOLAO vander MEER
- D. FOYTO van ZEP

*Florentissima Reip.
Lugd. Bat. Consuli-
bus.*

NEC NON,

Amplissimo, Prudentissimoque Viro,

- D. JOANNI à WEVELICHOVEN JC^{to}, Reip. Lugd. Bat. Syndico, iisdemque D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilissimi atque Amplissimi Viri,

Quemadmodum inter complures Mathematicæ scientiæ partes, Geometria reliquas ferè omnes ut basis sustinet, ita etiam in ea addiscenda Græci olim summam operam posuerunt. Cum autem eandem simul cū aliis scientiis ac artibus, felici successu, suo idiomate exercerent, factum inde quoque fuit ut illius utilitatem è vestigio deprehenderent, tam in cæteris facilius addiscendis, excolendisq; quàm in ritè dirigendis artibus omnibus Mechanicis, nec non variis instrumentis excogitandis, quæ ad quotidianum usum spectarent. Ei igitur parti quæ tractat de Conicis Sectionibus, cujus usum cum longè lateque se extendere agnoscerent, maximum studium adhibuerunt. Inter quos, qui ex professo hanc tractare susceperunt, nullus Euclide antiquior reperitur, qui quatuor libros eâ de re conscripsit. Apollonius autem post universalius hæc inspiciens, easdem Sectiones in unoquoque Cono ostendit, qui plurimis ingeniosis & pulcherrimis Theorematis Conicorum doctrinam locupletavit, & Euclidis libros quatuor ad octo perduxit. Quâ quidem re scientia hæc incredibile incrementum cepit, illeque inde magnam gloriam consequutus est, ita ut eo & sequentibus seculis Geometriæ magni nomen meruerit. Sed cum, injuriâ temporis, nulla eorum monumenta vel aliorum, qui ipsis posteriores sunt ad nos pervenerint, aut saltem (quod sciam) publicè extent, in quibus modus ipsas Sectiones uno ductu in plano describendi ostendatur; quarum tamen descripto in praxi quotidiana quàm maxime requiritur: Id ipsum materiam mihi subministravit, ut idonea instrumenta excogitarem: quibusque modis Conicæ lineæ Organicè, & quovis casu, in plano describi possent, peculiari tractatu demonstrare conarer. Quem, primitias studiorum meorum, Vobis Nobilissimi, Amplissimi que Viri, offerre non erubui: Vobis inquam, qui semper

per eximii scientiarum omnium artiumque liberalium
Meccenates extitistis, ac etiamnum ad eas promovendas,
atque Academiae vestrae ornamentum, curam omnem &
favoris operam confertis. Quam potèrò eò protulistis, ut
illa singularis in hoc appareat ac nunquam non laudanda
sit, quòd etiam Mathematicas artes, exemplo clarorum
olim Græcorum, vernaculâ linguâ in Academia Vestra
doceri volueritis, Batavosque & aliarum linguarum igna-
ros iis imbuï. Magno sanè Reipublicæ comodo, com-
munique omnium applausu: ut scilicet ipsæ usui publico
inserviant, nec non Vos earum fructus in gubernanda
Republica, tam belli quàm pacis tempore, ubique sentia-
tis. Denique quandoquidem, defuncto parente meo,
benevolentia vestra in ejus locum surrogatus fui, ut dis-
ciplinas hæc publicè profiterer, officii mei esse duxi,
grati animi aliquâ testificatione eidem respondere, &
quæ in usum publicum meditatus sum, Illustribus Vestris
Nominibus dedicare. Hunc igitur laborem qualemcun-
que, Viri Nobilissimi atque Amplissimi, in clientelam
Vestram accipite benignè; quippe qui Vobis omni animi
observantiâ à me offertur; eundemque accepti beneficii
gratitudinis ergo auspiciis Vestris in lucem prodire sinite.
Quod superest, DEUM OPT. MAX. rogo ut vos inco-
lumes ac felices quàm diutissimè conserve. Dabam
Leydæ, Kal. Novemb. Anni MDCXLVI.

*Nobilitatibus atque Amplitudinibus Vestris
devotissimus.*

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ.

PRÆFATIO AD LECTOREM.

QUANTVM incrementum Geometria, amice Lector, ex Conicorum doctrina, postquam Veteres ei sedulo incubuerunt, acceperit, quantaque ipsi dignitas acceperit; partim eorum monumenta; partim verò singularis eorum usus testantur. Inter quos, qui id sunt aggressi, nullus Euclide prior reperitur: qui Conum ex circumvolutione Trianguli rectanguli definivit, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere: statuens præterea tres Conorum differentes species, secundum triplicem angulorum ad verticem differentiam: deinde verò unumquemque horum trium secari plano ad unum Coni latus recto, unde tres illas ut Coni rectanguli, obtusanguli, & acutanguli sectiones deduxit. Verum postea Apollonius universalis Conum definiens ex conversione rectæ lineæ indefinitæ, circa Circuli circumferentiam, transeuntis continuo per aliquod punctum in sublimi, quousque ad eum locum redeat, à quo moveri cepit: universè inspexit in omni Cono, tam recto quam scaleno, unamquamque trium prædictarum sectionum inveniri, pro diversa nempe plani secantis in Cono contemplatione. Qui porro ante nominatas sectiones, rectanguli quidem Coni sectionem Parabolæ, obtusanguli Hyperbolæ, acutanguli verò Ellipsin appellavit, unicuique ex hisce tribus ab aliquo proprio accidente ejusmodi nomen imponens. Ut quilibet ex libris ejus, qui Conica Elementa inscribuntur, addiscere potest. Quorum propositiones, quantum iis ad demonstrationem indignimus, eorum, quæ hoc tractatu afferuntur, citavimus. Ceterum, quantopere ille hac in parte Geometriam ditavit, quantaque ejus inventis præstantissima huic scientiæ dignitas acceperit, vix dici potest. Hic namque Euclidis libros quatuor, ea dere conscriptos, ad octo perduxit. Et quàm-

Pp

vis

vis dolendum sit, quatuor duntaxat primos ad nos haecenus pervenisse, atque reliqui quidem temporis injuriâ periisse videantur; futurum tamen confidimus ut eosdem, ex genuina Arabum versione Latinè redditos, Vir Clarissimus D. Iacobus Golius haud diutiùs desiderari sinat: quàm primùm alio opere, cujus editione impraesentiarum distinetur, fuerit defunctus.

Verùm ut ad usum harum Sectionum accedamus, ostendamusq; ad quæ earum descriptio in plano deserviat: sciendum primò est, eam in Geometria ad solutionem Solidorum Problematum adèò requiri, ut quemadmodum illa solvi nequeunt, nisi in constructionem adhibeatur aliqua trium Coni Sectionum supra dictarum; ita etiam earum descriptionem nequaquam ibidem negligere decet.

Quod verò ad Opticam, jucundissimam Matheseos partem attinet, quæq; præter Visum, Lucem, Umbram, & Colores, objectorum quoque diversas apparentias contemplatur, ac earundem rationes reddit: considerando videlicet ea infinitis radiis ab objecto procedentibus conspici, qui in oculo simul conveniant: Quàm opportunum sit illic Conum, Conicæque Sectiones animadvertere, cuiusvis, qui Circulum pro objecto acceperit, judicandum relinquo.

Quòd si Opticam penitiùs perspiciamus, eamque porrò ut sit subdividamus in Catoptricam, Dioptricam, & Perspectivam, multò magis Conicorum frequens usus elucebit.

Nam quod ad Catoptricam spectat, quoniam illam novimus occupatam esse in imaginibus, quæ in speculis per reflexionem radiorum in nostros oculos fiunt, explicandis; Cumque in ea præterea specula efficere conemur, quæ miros prabeant effectus; Sicuti quorum beneficio lucente Sole aliquid accendatur, vel quibus lumen alicujus candela mirabiliter diffundatur: an non necessariam planè ad hoc Paraboles ac Hyperboles descriptionem unusquisque agnoscet? Siquidem ejusmodi specula dictas figuras omnino requirunt? Quemadmodum quoq; Hyper-
bola

bola exigitur ad radios è diversis locis prodeuntibus in unum punctum congregandos; Ellipsis verò ut qui ex uno puncto veniunt rursus in aliud reflectantur punctum. Quæ quidem non solum vario fini inservire queunt, verum etiam summa cum voluptate adhiberi ad prodigiosas rerum imagines representandas.

Tacebo-ne Dioptricam? quæ non solum hoc habet, ut sine eâ Visus ratio, ut & Lucis & Colorum minimè explicari valeat; sed etiam hoc sibi vendicat, ut vitra comburentia efficere nos doceat; nec non alia, quibus radii diversimode detorqueantur, & tam tubis Opticis, quam vario modo visum juvantibus, inserviant: Non-quid & ad illa Conicarum Sectionum descriptio utilis dicetur: cum ejusmodi vitra in formam Ellipsis ac Hyperbole expolienda esse, Dioptrica nobis demonstret. De qua re Dioptrica Nobilissimi Clarissimique Viri D. Renati des Cartes consuli potest; in qua mirâ brevitate subtilissimè, quacunque de reflexionibus, refractionibus, ceterisque rebus ad perfectionem visus pertinentibus, intelligi possunt, persequitur; & quæ de refractionis legibus ante fuerunt desiderata, planè perfecit. In qua parte si præterea expectes, quæ Clarissimus ac Subtilissimus Vir, D. de Beaune, Consiliarius Blasensis, post excogitavit, non video quid in hoc genere amplius requiras.

Optica colophonem addit Perspectiva, quæ non modò ad contemplationem objecti pertinet, veluti Optica, sed ad ipsam figuram apparentem in plano describendam. Quocirca dubitari nequit, quanto cum compendio Organica Conicarum Sectionum descriptio in Circulorum projectionibus institui possit: quandoquidem projectionem illam non nisi aliquam ex Conicis Sectionibus existere, manifestum est. Ceterum quàm crebra ibidem sit præ aliis Ellipseos decircinatio, nemini ambigendum puto, qui Planisphæria sibi parare unquam tentaverit. Ita ut hoc seculo, ob peculiare Conicorum studium, Optica quoque ad fastigium perducta videatur, summaque ejus perfectio speranda sit, si reliquos Conicorum libros

Nobilissimi ac Clarissimi Viri D. Claudii Mydorgii, in Francia Picardiae Quaestoris, nec non Conica Acutissimi Viri, D. des Argues, ab iis impetremus.

Non est quod multa dicam de Gnomonica, cujus totum ferme negotium in describendis Conicis Sectionibus consistit, cum Sol ibidem conversione sua quotidie nobis Conum referre statuat, quem Conum Luminis appellamus; cujus quidem basis Circulus est quem describit; vertex autem apex gnomonis; ipsum verò Solarium planum Sectionis Coni, priori oppositi, qui Conus Umbra vocatur. Ita ut linea, quas in eo extremitas umbra gnomonis seu styli singulis diebus describit, representent semper aliam atque aliam Coni Sectionem; prout nimirum Sol alium aliūque gradum Eclipticae quotidie perambulat; ut etiam pro diversa Sphaera constitutione, nec non vario plani Horologii situ. Vnde sit ut arcus diurni, signa Zodiaci, Paralleli Civitatum Latitudinum & Circuli, sicut etiam Paralleli Horizontis seu Circuli Almucantarat, omnes in Sectiones Conicas sint consignandi, totumque ferè opus ab iis describendis pendeat.

Superest Mechanica, quae artium Mathematicarum quasi exegesis est, cum instrumenta fabricare doceat, quorum praesidio id ipsum, quod cetera hujus Scientia partes construendum nobis suppeditant, exequi valeamus. Ad quam igitur Organicam Conicarum Sectionum descriptionem non immerito referas. Quocirca hac in parte laborandum mihi quoque proposui, unde reliqua commoditatis alienius possint participes reddi, atque ad finem optatum perducì. Praesertim etiam cum observassem harum linearum descriptionem Organicam in praxi quotidiana usum habere uberrimum, ut architectis, lignariis, cametariis in extruendis typis ligneis, lapideis fornicibus templorum, edificiorum pontium, porticum & cellarum sustinendis requisitos. Quemadmodum etiam diatresis in tornandis pluteis, nec non topiariis in diversimodè concinnandis pulvillis in horto, &c.

Cura

Cum ergo ad tam multa negotia Conicarum Sectionum in plano descriptio utilis sit, quid mirum, si vel ab ultima antiquitate praestantissimi Mathematici Conicarum doctrinam adeo sedulo sibi excolendam duxerint, semperque ei, praecipue vero hoc erudito seculo, accessio nova facta sit? Verum quod mirandum mihi videtur, est, quod nemo haecenus (quod sciam) Spartam hanc sibi ornandam suscepit, ut nempe aliquis inventus fuerit, qui de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione tractatum conscribere sit aggressus, eamque quovis casu demonstrare. Quod quidem perutile futurum, vel ex eo deprehendi potuit, quod casu fuerint inventi quidam modi, quorum in quotidiana praxi non parvus est usus: quos nostris interserere quoque libuit, ne aliunde quisquam quod huc spectat haberet quod peteret, & quod non possimus hac nostra opella ipsi suppeditare. Eateor me legisse, Franciscum Aguillonium in animo habuisse (ut ipsemet scribit) peculiarem tractatum hac de re institueret, verum morte praeventus, opus imperfectum reliquit. Novi insuper ingeniosissimum Virum D. Otterum multa super hac re excogitasse; sed neque ille quantum mihi innotuit, publici juris quidquam fecit. Quod autem attinet ad methodum, qua haec lineae in plano per puncta describuntur, de qua Clarissimus D. Mydorgius totum librum conscripsit, illa quidem, quum ipse majori forma sunt exhibenda ut in parietibus, caminis, pavimentis, hortis, & quales vulgo in Gnomonica & Mechanica requiruntur, non aequè facili via atque Organica succedit. Prout hoc à primo limine dignoscere licet in Sciothericis hoc pacto constructis, si notemus quam perperam plerumque ipsae designatae fuerint: siquidem methodus illa sapientis ibidem iteratam punctorum inventionem atque manus exercitae solertiam requirit, nec non ut praeterea, ad exactam operis exegesis, naturae earundem linearum in aperto sit. Quod usque in Organica methodo locum non habet: quippe qua lineas illas, multifariam iteratam operam vix dum acquiras, suam quasi sponte uno ductu continuo ob oculos ponit.

Placuit porro præ cæteris is modus Organicus, qui è motu implicato originem ducit, eo insuper habito, quo hæ lineæ circino in eum finem extructo describantur. Quoniam ibi easdem lineas primum descriptas habere oportet, ut circino adfixæ similium solummodo descriptioni infervere possint.

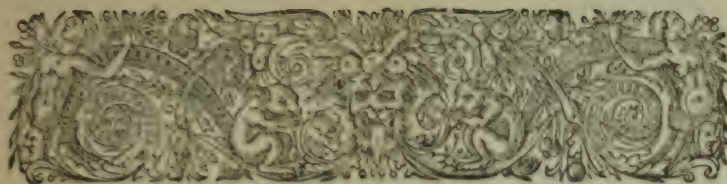
Præterea cum ratio ducendi lineas rectas, quæ curvas hæc in quibusvis punctis contingant, in indaganda objectorum varia apparentia ad Catoptricam & Dioptricam summopere sit necessaria; placuit quoque post ipsarum descriptionem in Scholiis de iis breviter tractare; ut & de spatiis quæ includunt: quandoquidem cognitio illa ad centra gravitatum eorundem spaci-
orum inveniendâ plurimum conducit, atque una ab altera pendet.

Denique ne quid deesset, quod ad hanc materiam spectare videretur, subjeci etiam relationem, quam inter se habent spatia quæcunque, rectis lineis & curvis Conicis comprehensa. In quorum demonstrationibus Lectorem monitum velim, me brevitas causâ methodo indivisibilium, quam subtilissimus Vir Bonaventura Cavallerius inivit, fuisse innixum: licet id aliâ quoque ratione exhibere potuerim.

Aliarum autem linearum curvarum superioris generis descriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit nostri instituti: cum maluerimus merito eximiiis Viris D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholosano, & D. Robervallo, Mathematicum in Academia Parisiensi Regio Professori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes, & centra invenire, quibus Geometriam mirifice ditare valeant, & (meo iudicio) vix lucē visura sunt, nisi Philomathematicorum precibus & persuasionibus ab iis in Reipub. Literaria bonum extorqueantur.

Hæc igitur primitias laboris nostri, amice Lector, si gratas tibi fuisse acceperimus, animū nobis addes ad Apollonii de locis planis Geometriam, aliosque tractatus brevi, Deo volente, edendos; & ad ea, quæ circa optimam muniendi rationem meditari capimus, absolvenda. His interim fructu, eaque in usum tuum converte, Vale.

FRAN-



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

DE

ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE
TRACTATUS.

CAPUT I.

*De rectis lineis, quæ in plano ex motu im-
plicato describuntur.*

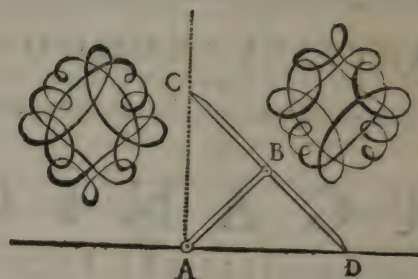


N plano quocunque concipiatur regula AB, mobilis circa punctum fixum A, atque alia regula CBD huic quidem annexa in puncto B, quæ circa illud in eodem plano converti possit: statuantur autem intervalla AB, CB & BD inter se æqualia.

Dico, si feratur punctum D in recta linea transiente per A, ut AD, punctum alterum C motu isto in eodem plano describere lineam rectam, priori AD perpendicularem.

Intelligatur enim à puncto C ad punctum A recta linea esse ducta AC. Quia igitur trianguli ABD latera AB, BD sunt æqualia, ^a erunt a p 5 Primi Elem. etiam anguli BAD, BDA inter se æquales. Eodem modo, quoniam in triangulo ABC latera AB, BC æqualia sunt, ^b erunt quoque an- b p 3 Primi Elem. guli

guli ACB , BAC inter se æquales. Æqualis igitur est angulus CAD duobus angulis BCA , ADB . ^{c p 32 Primi} Sunt autem tres anguli CAD , BCA , & ADB duobus rectis æquales. Rectus itaque erit angulus CAD . ^{Elem.} Cum vero constet, mutato situ puncti D in recta AD , mutari simul

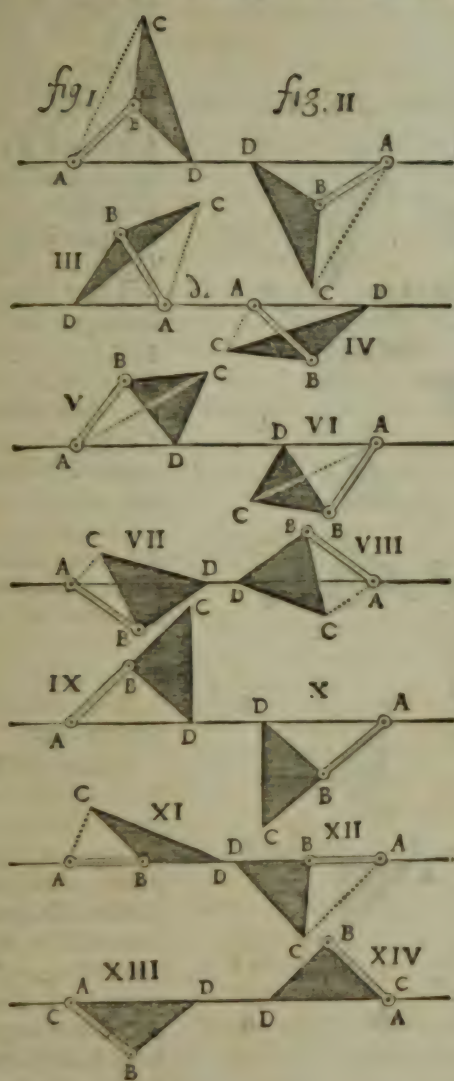


situm puncti C ; atque in omni alia constitutione instrumenti idem prorsus semper demonstretur, quod attinet punctum C : sequitur rectas omnes ductas à punctis infinitis C ad punctum A , rectos cum AD angulos efficere. Sed cum recti omnes anguli inter se sint æquales, non poterunt ejusmodi rectæ, à punctis C ad punctum A ductæ, nisi eundem angulum constituere, hoc est, rectæ omnes ex C ad A eductæ unam eandemque efficient rectam lineam. Unde liquet puncto D moto per rectam AD , alterum punctum C suo etiam motu in plano describere rectam lineam CA ipsi AD in puncto A perpendicularem. Quod erat demonstrandum.

Statuatur autem regulam AB , quæ mobilis est circa punctum A , non amplius sibi puncto B annexam habere regulam CB sed triangulum CBD , utrovis crure CB , BD ipsi AB æquale, quod circa illum suum verticem B , invariato manente angulo, moveri queat.

Dico rursus, si feratur punctum D in recta linea AD , alterum punctum C motu isto in plano describere rectam lineam, efficientem ad AD angulos obliquos; quorum quidem acutus æqualis erit subduplo angulo DBC , qui in triangulo sub æqualibus lateribus DB , BC continetur.

Cum



Cum autem punctum D in recta AD ferri concipitur ad utramque partem puncti A, atque inde punctum C situm quoque suum simul mutet: varia ex eo oriuntur instrumenti constitutiones, quæ secundum casuum species sunt consideranda, ut ex iis demonstratio universalis eliciatur.

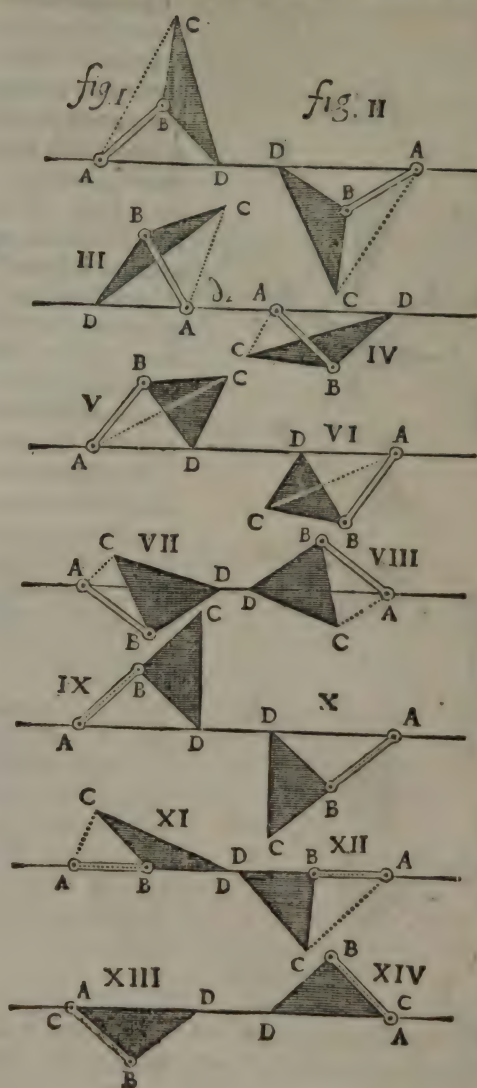
Intelligatur itaque instrumentum in qua libuerit constitutione, & à puncto C ad A recta linea esse ducta AC.

Quia igitur trianguli ABD latera AB, BD æqualia sunt, ^d erunt quoque anguli DAB, BDA æquales. Eadem ratione, quoniam trianguli ABC latera AB, BC æqualia sunt, ^e erunt ^{e p s Primi Elem.} in eodem anguli CAB, BCA æquales. ^ω Aequalis igitur est angulus CAD duobus angulis BDA, ACB in I, II, III & IV

Qq

fig. 32 Primi
Elem.

fig. 32 Primi
Elem.



IV figura; β at in V & VI figura æqualis angulo B D A detracto angulo ACB; γ in VII verò & VIII figura æqualis angulo ACB multato angulo BDA. ϵ Quoniam autem in I & II figura duo anguli DCB, BDC cum angulis BDA, ACB, æ id est, cum angulo CAD, unà cum angulo CAD duo bus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur: liquet in I & II figura, angulum DBC anguli CDA duplum fore.

Sed cum in III & IV figura ϵ anguli BDA, ACB, æ seu angulus CAD, unà cum angulis CAD, DBC quatuor rectis æquales existant; anguli autem DCA, ADC cum angulo CAD duobus rectis æquentur: erit

erit angulus DBC æqualis angulis DCA, ADC, bis simul sumptis. ^{h p 32 Primi Elem.}
 At verò quoniam trianguli DAC angulus externus CAD, duobus internis & oppositis DCA, ADC est æqualis: erit quoque in III & IV figura angulus DBC anguli acuti CAD duplus.

Porro cum in V & VI figura i anguli duo DCB, BDC cum angulo BDA dempto ACB, β qui est angulus CAD, unà cum angulo CAD, duobus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquantur: liquet pariter in V & VI figura angulum DBC anguli CAD esse duplum.

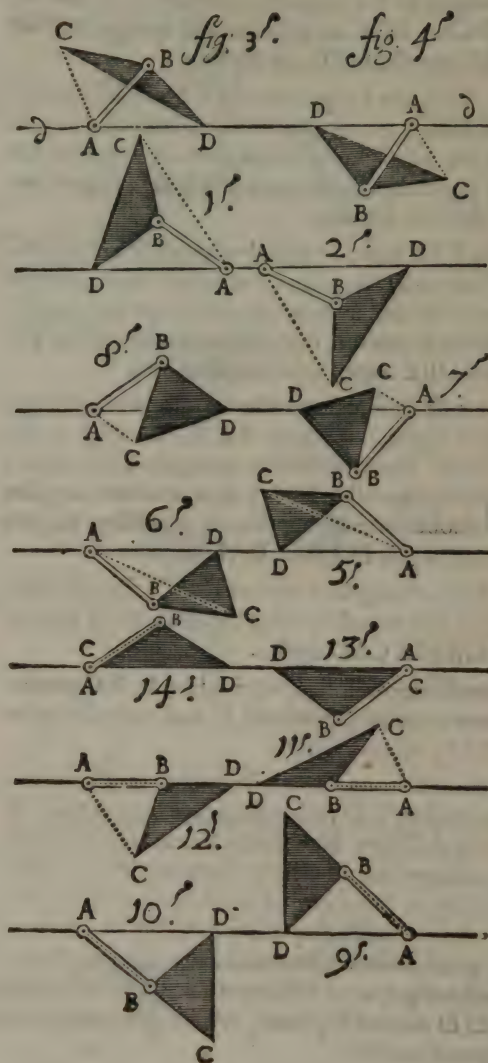
Denique, in VII & VIII figura, ^{k p 32 Primi Elem.} quia duo anguli DCB, BDC cum angulo ACB sublato ei BDA, γ qui est angulus CAD, unà cum angulo CAD duobus rectis sunt æquales; ac iidem duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquantur; manifestum similiter est in VII & VIII figura angulum DBC anguli CAD duplum fore.

Præterea concipi potest ejusmodi constitutio instrumenti, in qua AB, BC (sicut in IX & X figura,) sive etiam AB, BD (ut in XI & XII figura,) in directum jacent. Rursus enim fiet ut angulus DBC anguli CAD sit duplus. ^{l p 32 Primi Elem.} Æqualis enim est in IX & X figura externus angulus DBC trianguli ABD duobus internis oppositis & æqualibus angulis DAB, BDA, ac proinde anguli DAB seu CAD duplus.

In XI verò & XII figura ^{m p 32 Primi Elem.} angulus externus DBC trianguli ABC duobus internis & oppositis æqualibus angulis CAB, BCA æqualis est, ac ideo ipse CAB seu CAD duplus.

Nihil dico de ea constitutione instrumenti, ubi AB, BC prorsus coincidunt: perspicuum enim est, punctum C tum cadere in punctum A, ut in XIII & XIV figura apparet.

Quapropter punctum C in qualibet instrumenti constitutione, ex motu puncti D per rectam AD, talem accipit situm, ut quæ à C ad A recta ducitur cum AD sive supra eam sive infra faciat semper angulum subduplum assumpti anguli CBD. Cum autem duo illi anguli, qui supra & infra lineam AD sunt, ad punctum A tanquam verticem, inter se æquales existant, & pro duobus cruribus habeant unam lineam AD; ^{n p contr. sum 18 Primi Elem.} etiam duo reliqua crura una linea erunt. Cumque punctum C reperiat perpetuo in horum alterutro: necesse est ejusdem motu, puncti D motum sequente, rectam lineam in plano describi. Ut erat demonstrandum.



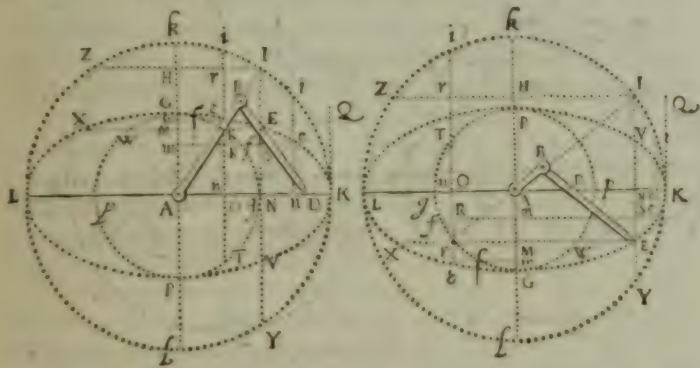
Sciendum tandem est, nihil referre ad quam partem rectæ BC concipiatur triangulum $BD C$, ut et fiant quæ proposita sunt. Si autem in alteram partem rectæ BC idem triangulum intelligatur, quod quidem fiet sumendo illud puncto C moveri per rectam AD : recta AC aliam tunc quoque ad punctum A positionem obtinebit. Sed ne opus sit novâ id ostendere demonstratione, satis esse duximus secundum eandem hypothesin consimiles omnes ejusdem instrumenti constitutiones exhibere, easque simili characterē insignire, quibus superius demonstrata communiter applicari possent. Cum alia nullâ differentia hic videatur advertenda, nisi quod pun-

punctum supra vocatum C, hic appelletur D; & quod ibi dicebatur D, hic à nobis nominetur C. Ita ut supervacaneum sit plura super hac re in medium afferre.

С А Р У Т. II.

*De ellipsis, quæ ex motu implicato in plano circa axes seu
extremas diametros describuntur.*

Revortor jam ad primum instrumentum supra descriptum, hoc est, concipio rursus in plano quocunque regulam AB , mobilem circa punctum fixum A , atque huic annexam esse aliam regulam BED in puncto B , quæ circa illud in eodem plano similiter circumagi pos-



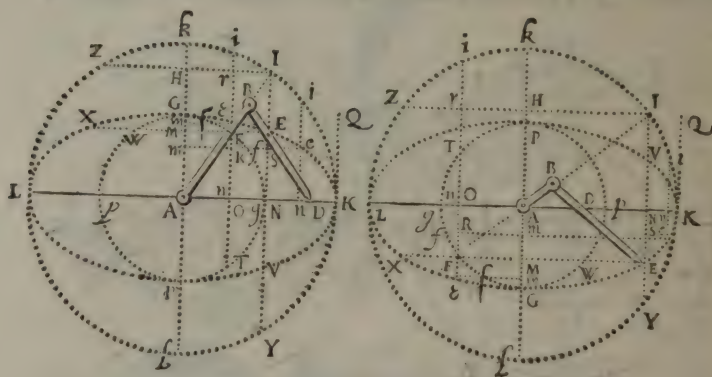
fit. Assumatur præterea in BD quodvis punctum E intra puncta B & D , five etiam in ea producta ultra D . Sit autem BD ipsi AB æqualis.

Dico si feratur punctum D per rectam lineam AD, punctum quidem E motu isto in eodem plano describere ellipsis circumferentiam; cujus centrum est A; & axis transversus æqualis duplæ compositæ ex AB, BE; at verò axis rectus æqualis duplæ DE. Hoc autem est ostendendum.

Quoniam enim AB mobilis est circa A , manifestum est, si sumatur quodlibet punctum in AB vel in ipsa producta, quod simul cum ea moveri intelligatur circa A , illud ipsum describere circuli circumferentiam. Assumatur itaque punctum F , ita ut BF sit æqualis BE , illudque describat circuli circumferentiam FGP . Sit porro recta

GAP

GAP perpendicularis ad AD, secans circumferentiam dicti circuli in G & P: erit ea axis rectus ellipsis. æqualis enim assumpta est BF ipsi BE, atque est etiam AB ipsi BD æqualis: quapropter & reliqua AF reliquæ DE æqualis erit, atque ita GAP æqualis duplæ DE. Producatur denuo AB ad I, donec BI sit æqualis BE, centroque A intervallo AI circuli circumferentia describatur LK, secans hinc inde AD in L & K: eritque LK axis transversus ellipsis. cum A I æquetur compositæ ex AB, BE, atque ita LA K æqualis sit duplæ compositæ ex AB, BE. His igitur ita se habentibus, demonstrandum est, punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus axes sunt, quos diximus.



ap 2 Sexti
Elem.

b p 4 Sexti
Elem.

c p 16 Quin-
ti Elem.

d p 15 Quin-
ti Elem.

e p 22 Quin-
ti Elem.

f p Corol. 20.
sexti Elem.

Agatur namque producaturve EF, ut secet AG in M: ^a erit igitur hæc parallela ipsi AD, ac perpendicularis ad AG. Agatur quoque seu producatur IE, donec secet AD in N: cadetque hæc similiter perpendiculariter in AD. Ducatur denique FO ipsi INE æquidistans, secans AD in O; ipsisque axibus LK, GP inventiatur tertia proportionalis KQ. ^b Cum igitur similia sint triangula AFO, AIN: erit FO ad FA, ut NI ad IA; ^c permutandoque FO ad NI, ut FA ad IA, ^d vel dupla FA seu GP ad duplam IA seu LK; ^e atque etiam quadratum FO ad quadratum NI, ut GP quadratum ad LK quadratum. Cumque, ob proportionales KQ, GP & LK, ^f quadratum GP ad quadratum LK sit,

fit, ut KQ ad LK : erit quoque ut quadratum FO , hoc est, quadratum NE , ad quadratum NI , ita KQ ad LK . \S Est verò quadratum NI *g p 35 Ter-
tia Elem.* \S Quapropter erit, ut quadratum NE ad
rectangulum LNK , ita KQ rectum figuræ latus ad LK latus trans-
versum. \S Liquet ergo punctum E esse in ellipsis circumferentia, cu-
jus extremæ diametri seu axes sunt LK , PG ; latus autem rectum
principale KQ , pertinens ad axem LK . *h p conversâ
21 Primi
Conic. Apol-
lonii.*

Quia autem hoc in infinitum ita se habet circa omnes alias rectas
 NE , ordinatim ad axem LK adplicatas, in quavis alia instrumenti
constitutione: sequitur punctum E motu isto in plano describere el-
lipsis circumferentiam, circa extremas diametros, axesvè KL , GP .
Quod erat demonstrandum.

Atque uti hæc quidem contingunt circa punctum E , prout sumi-
tur in BD intra puncta B & D ; five etiam in ea continuata ultra D :
idem continget quoque, si sumatur in BD producta ultra B , si modò
 BE ipsi AB non sumatur æqualis. Nam si in memoriam revocemus
id quod capite primo demonstravimus de puncto C , quoad primum
instrumentum five regulas mobiles AB , QBC ; nempe quòd, dum
fertur punctum D per rectam AD , punctum C motu isto describat
rectam lineam, ipsi AD perpendicularem: facillè intelligemus, si
singatur similiter ejusmodi punctum in BD intra puncta B & C , five
etiam in ea producta ultra C : idem tum esse ac si conciperemus pun-
ctum C ferri in recta AC ac ea fieri, quæ jam de puncto E demon-
stravimus. Eadem quippe tunc ibi erit relatio, eademque percipietur
semper constitutio regularum AB , BE C punctique E , sumpti
intra B & C , five etiam in ea producta ultra C ad rectam AC ; quæ
fuit hic regularum AB , BE D & puncti E , sumpti intra B & D , five
etiam in ipsa continuata ultra D , ad rectam AD : ac proinde alia non
indigebimus demonstratione. Adeò ut si punctum E à B utrinque
æqualiter fuerit distitum, æquales ac similes planè, sed inverso situ
ellipses describantur.

Sciendum denuo est, non solùm ex motu puncti D per rectam
 AD semi-ellipses describi, verùm etiam integras, si modò regulæ
 AB , BE D ad alteras partes rectæ AD incurventur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Quoniam superius ostensum est, FO, hoc est, NE, esse ad NI, ut GP, qui est axis rectus, ad LK, qui est axis transversus ellipsis; atque hoc ipsum in infinitum manifestum sit de omnibus aliis rectis ne, ni, quæ tam in ellipsi LGKP quam in circulo LkKl ordinatim adplicantur ad axem LK: i Ex metho- do indivisi- bilium Ca- valerii.

Item quoniam ipsius ne ad ni, totius ad totam, eadem est ratio quæ ablatæ nF ad ablatam nr: k erit etiam reliquæ Fe ad reliquam ri eadem ratio quæ totius ne ad totam ni, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Cumque hoc in infinitum sit evidens de omnibus aliis rectis Fe, ri in segmento ellipsis EeX & circuli IiZ: eodem modo concludendum erit, l Ex metho- do indivisi- bilium Ca- valerii.

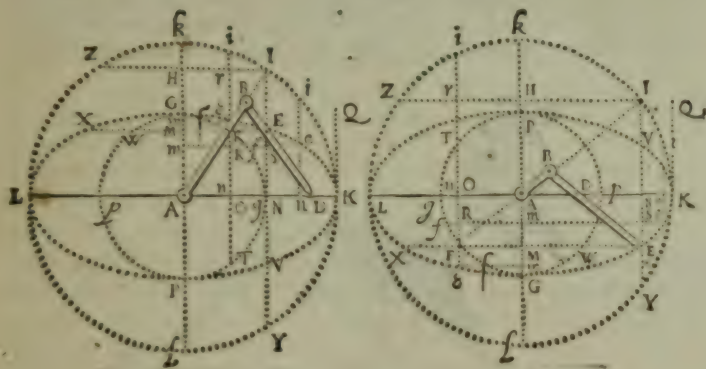
Sequitur quoque, propter similitudinem triangulorum AFO, AIN, esse AO ad AF, ut AN ad AI; n permutandoque AO ad AN, hoc est, MF ad ME, ut AF ad AI seu GP ad LK: ac proinde MF ad ME, ut axis rectus GP ad axem transversum LK. Quia verò in infinitum illud apparet quoque de omnibus aliis rectis mf, me, quæ tam in circulo pGgP quam in ellipsi LGKP sunt ordinatim applicata ad axem GP: o necesse est circum pGgP ad ellipsim LGKP, sicut etiam circuli segmentum FfW ad ellipsis segmentum EeX, esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

Porro cum ipsius mf ad me, totius ad totam, eadem sit ratio quæ ablatæ mR ad ablatam mS: p erit etiam reliquæ Rf ad reliquam Se eadem ratio, quæ totius mf ad totam me, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Et quoniam hoc quoque in infinitum apparet de omnibus aliis rectis Rf, Se in segmento circuli FfT & ellipsis EeV: q similiter inferendum est circuli segmentum FfT ad ellipsis segmentum EeV esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

Quia itaque demonstratum est, circum pGgP ad ellipsim LGKP, itemque circuli segmentum FfW ad ellipsis segmentum EeX esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK; ac in eadem ratione quoque esse ellipsim LGKP ad circum LkKl, sicut etiam ellipsis segmentum EeX ad circuli segmentum IiZ: liquet ellipsim LGKP esse medio loco proportionalem inter circum pGgP & circum LkKl; nec non ejus segmentum EeX inter circulorum segmenta FfW & IiZ.

Simi-

Similiter quoniam ostendimus, circuli segmentum FfT esse ad ellipsis segmentum EeV , ut axis rectus GP ad axem transversum LK ; ac in eadem ratione esse quoque ellipsis segmentum EeV ad circuli segmentum IiY :



liquet pariter ellipsis segmentum EeV medio loco esse proportionale inter circulorum segmenta FfT & IiY . Quod quidem nobis propositum erat hic demonstrare.

CAPUT III.

De ellipsis, quæ ex motu implicato in plano describuntur, circa quascunque diametros conjugatas.

REvocetur jam autem secundum instrumentum, de quo paulò ante loquuti sumus, hoc est, concipiatur rursus in plano quocunque regula mobilis AB circa punctum fixum A , atque huic annexum triangulum dBc in puncto B , quod habeat latera dB, Bc æqualia longitudini regulæ AB ; ita tamen ut circa B in eodem plano converti queat. Quandoquidem autem cognosco ex præmissis, dum punctum d fertur in recta linea AD , punctum c motu isto in hoc plano rectam lineam describere AC , quæ ad AD angulos facit obliquos, quorum acutus CAD est subduplus anguli dBc , qui in triangulo dBc sub æqualibus lateribus dB, Bc continetur; considero præterea punctum in aliquod e in latere dc . Dico jam id ipsum motu illo in eodem plano

Rr

de-

ad cH ; parallelæ autem existant CD , cG : erunt puncta E , H , A in una linea recta. Liqueat igitur punctum H , ubi invicem secant perpendicularis cG & recta ee , esse quoque punctum intersectionis ipsarum EAK , ee . Cum autem recta ee à cG in H bifariam semper dividatur, sequitur similiter ipsam à KAE bifariam semper in H divisum iri: ac proinde EAK diametrum esse; ee verò quæ ad ipsam ordinatim adplicatur. Quocirca erit quoque ut CE ad cH , ita AE ad AH . Quia verò ut CE ad cH , ita etiam est CD ad cG : e erit CD ad cG , ut AE ad AH ; d & per conversionem rationis ut CD ad CM , ita AE ad HE .

Eodem modo, cum sit CD ad cG , ut AE ad AH ; e erit, per compositionem rationis contrariam, ut CD ad MN , ita AE ad KH . Sed cum rationes, compositæ ex eisdem rationibus, inter se sint quoque eædem: erit ratio composita ex ratione CD ad CM & ex ratione CD ad MN eadem rationi, quæ componitur ex ratione AE ad HE & ex ratione AE ad KH . Ratio autem composita ex ratione CD ad CM & CD ad MN , f est ratio quadrati CD ad rectangulum CMN . Ratio verò composita ex ratione AE ad HE & ex ratione AE ad KH , g est ratio quadrati AE ad rectangulum EHK . h Erit igitur ut quadratum CD ad rectangulum CMN , ita quadratum AE ad rectangulum EHK .

Quoniam verò est ut CD ad cG seu DM , ita ee ad cH : i erit etiam ut quadratum CD ad quadratum DM , ita quadratum ee ad quadratum cH ; k & per conversionem rationis ut quadratum CD ad quadratum CD multatum quadrato DM , l quod idem est atque rectangulum CMN , ita quadratum ee ad quadratum ee diminutum quadrato cH , m id quod est quadratum He . Siquidem igitur ratio quadrati AE ad rectangulum EHK est, sicut quadrati CD ad rectangulum CMN ; & quoque ratio quadrati ee ad quadratum He , sicut quadrati CD ad rectangulum CMN : n erunt quoque inter se eædem, eritque ut quadratum ee ad quadratum He , ita quadratum AE ad rectangulum EHK ; o permutandoque ut quadratum ee seu AI ad quadratum AE , ita quadratum He ad rectangulum EHK . Sunt autem KQ , LI , & KE ex constructione proportionales. p Erit idcirco KQ ad KE , ut quadratum LI ad quadratum KE , seu quadratum AI ad quadratum AE . Quia itaque constat quadratum He ad rectangulum EHK esse, ut rectum figuræ latus KQ ad latus figuræ transversum KE : q liquet punctum e esse in ellipsis circumferentia, cuius

R r 2

c p 11 Quin-
ti Elem.

d p Corol.

19 Quinti
Elem.e Vide Cla-
vium ad 18Quinti E-
lem.f p 23 Sexti
Elem.g p 23 Sexti
Elem.h p 11 Quin-
ti Elem.i p 22 Sexti
Elem.

k p Corol.

19 Quinti
Elem.l p 5 Secundi
Elem.m p 47 Pri-
mi Elem.n p 11 Quin-
ti Elem.o p 16 Quin-
ti Elem.

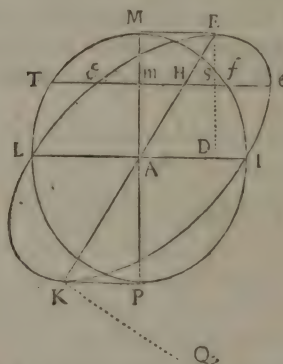
p p Corol.

20 Sexti E-
lem.q Per con-
versam 21Primi Ceni-
corum A-
pollonii.
dia-

diametri conjugatę sunt KE, LI; latus autem rectum KQ, pertinet ad diametrum KE. Quia autę hoc in infinitum ita contingit circa omnes alias rectas He, ordinatim ad diametrum KE adplicas, in quavis alia instrumenti constitutione (cum illę omnes hic nullam adferant differentiam, quo minus demonstratio ad illas possit adplicari): sequitur punctum e motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam, circa diametros KE, LI. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Quandoquidem precedenti capite quadam attigimus de iis, quę contingunt circa superficiem ellipsis & ejusdem segmentorum; hoc tamen ibi factum fuit juxta solam considerationem axium, nec locum habuit nisi tantum in segmentis rectis. Verum ut contemplatio illa generalis sit juxta quas-cunque diametros, & in segmentis quoque scalenis pateat; consequenter ostendemus, cui ellipsi, juxta axes consideratę, alia sit equalis: quemadmodum etiam, quibus segmentis rectis ipsa ellipsis segmenta scalena aequantur.



a per 4 Caput hujus.

Sit ergo ellipsis LEIK, cujus diameter LI; altera autem huic conjugata sit KE, ad quam ordinatim adplicata intelligatur e; segmentum verò scalenum esto eEe. Si itaque ex punctis E, K alternatim ducantur rectę EM, KP diametro LI parallele; tum per centrum A recta PAM perpendicularis ad LI, secans EN, KP in M & P, a ac denique circa axes conjugatos LI, PM ellipsis describatur LMIP: dico ellipsim LEIK

ellipsi LMIP aequalem esse. Ceterum si producat recta e, donec secet hujus ellipsis circumferentiam in f & T: dico similiter segmentum illius eEe segmento hujus TM esse aequale.

Est namque in ellipsi LEIK ^b ut rectum latus KQ ad transversum KE, sive quadratum LI ad quadratum KE, ^c sive etiam quadratum AI ad quadratum AE, & ita He quadratum ad KHE rectangulum. Quoniam verò ^d parallela sunt ME, e, & KP: e erit AE ad HE, ut ED seu AM ad ES seu Mm. Et sumptis antecedentium duplis, ut KE ad HE, ita PM ad Mm;

b p 21 Primi Conicorum Apollonii.
c p 15 Quinti Elem.
d Ex constructione.
e p 4 Sexti Elem.

Mm; ^f dividendoque KH ad HE, ut Pm ad m M. ^g Vt autem KH ad ^h Ep 17 Quin-
 HE, ita est rectangulum KHE ad HE quadratum; & ut Pm ad m M, ita ^{ti Elem.}
 est Pm M rectangulum ad m M quadratum. ^h Erunt igitur ut rectangulum ^g p 1 Sexti
 KHE ad quadratum HE, ita rectangulum Pm M ad m M quadratum; h p 11 Quin-
 & permutando rectangulum KHE ad rectangulum Pm M, ut quadr. ^{ti Elem.}
 tum HE ad quadratum m M, ^h sive ut quadratum AE ad AM quadratum. ⁱ p 16 Quin-
 Cum autem ostensum sit, & quadratum HE ad rectangulum KHE esse, ut ^{ti Elem.}
 quadratum AI ad quadratum AE: ^l erit quoque ex aequo, ut quadratum ^k p 4 & 22
 HE ad rectangulum Pm M, ita quadratum AI ad quadratum AM. Quia ^{ti Elem.}
 vero in ellipsi LMIP similiter, ut supra, & quadratum m f ad rectangulum ^{ti Elem.}
 Pm M est, ut quadratum AI ad quadratum AM: ^m erit quoque quadra- ^{ng} p 9 Quin-
 tum HE ad rectangulum Pm M, ut m f quadratum ad rectangulum Pm M. ^{ti Elem.}
 E quibus sequitur, quadratum HE quadrato m f aequale esse. Aequales igitur ^{ng} p 9 Quin-
 tur quoque erunt recta HE, m f, unde & earum dupla e e, T f. Eadem est ^{ti Elem.}
 demonstratio de omnibus aliis ordinatim adplicatis ad diametros KE, PM,
 in infinitum assumptis in utraque figura. Vnde patet, o ellipsim LEIK ^o Ex metho-
 ellipsi LMIP aequalem esse, sicuti etiam segmentum ejus e E e segmento hu- ^{do indivisi-}
 jus T M f. quod idem quoque de reliquis segmentis e K e, T P t est intelli- ^{bilium Ca-}
 gendum. Quare constat propositum. ^{valerii.}

Ex his liquet, cuius segmento ellipsis dato, exhiberi posse circuli segmen-
 tum ipsi aequale. Si enim segmentum illud fuerit scalenum, ut segmentum
 e E e; ostendimus hic aliud T M f ipsi aequale, quod sit rectum. Porro quam
 ratio inter hoc & circuli segmentum existat, ex praemissis quoque manifestum
 est. Patet ergo segmento cuius ellipsis dato, circuli segmen-um inveniri aequale.

Sequuntur porro alia ad ellipses spectantia, quae ex motu
 implicato, tam circa extremas, quam alias quascunque dia-
 metros conjugatas, beneficio ejusdem instrumenti, in plano
 describuntur.

PRiusquam finem impono contemplationi praedicti instrumenti,
 etiam mihi in mentem venit considerandum, quid contingat circa
 punctum E, cum sumitur in latere B C trianguli BCD, sive in ipso in
 utramvis partem producto.

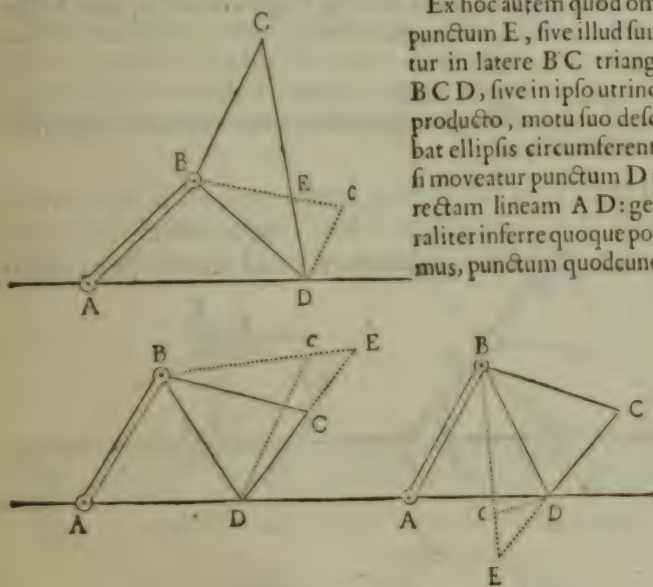
Assumatur igitur punctum aliquod in BC (ut E,) intra puncta B &
 C, sive etiam in eadem utrinque ultra ipsa indefinite producta, modo
 BE ipsi AB non sumatur aequalis, si illud sumere velimus ultra B. Di-
 co rursus, si feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu

Rr 3

isto

batur, secans HF in E: eritque punctum E vertex ellipsis. Quare si ducatur recta ab E ad A, eaque continuetur donec MA æquetur AE: erit MAE ellipsis diameter. Denique ad determinandam alteram huic conjugatam, sumatur in AD recta Ab, similiter ipsi DE in instrumento æqualis; atque, ut ante, supra hanc triangulum constituatur A b b, æquale triangulo DEB in instrumento; centroque b intervallo b b arcus describatur, secans vel tangens AD in e. Post hæc æquatâ IA ipsi Ae: erit Ie altera ellipsis diameter, priori ME conjugata. Quæ quidem ex adplicatione instrumenti perspicua sunt.

Ex hoc autem quod omne punctum E, sive illud sumitur in latere BC trianguli BCD, sive in ipso utrinque producto, motu suo describat ellipsis circumferentiâ, si moveatur punctum D per rectam lineam AD: generaliter inferre quoque possumus, punctum quodcunque

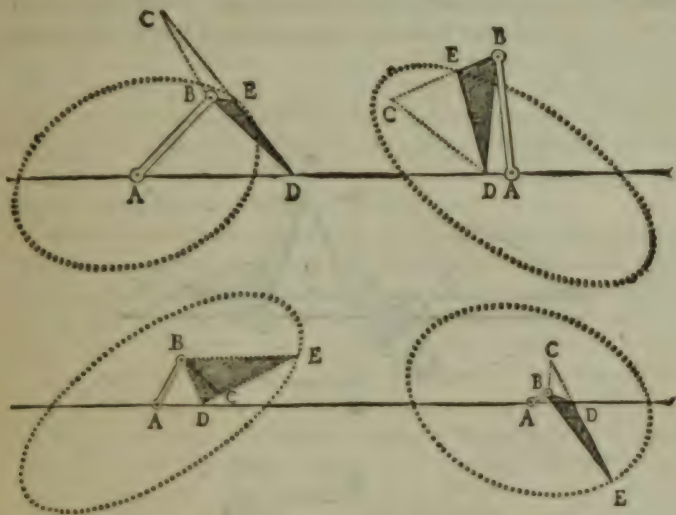


E, sumptum in latere DC, aut in ipso utrinque indefinitè producto, descripturum esse ellipsis circumferentiâ.

Si enim sumatur ejusmodi punctum in latere DC, aut in ipso utrinque indefinitè producto ultra C vel D, ducaturque recta BE: erit hæc vel minor, vel major quàm DB seu BC; minor quidem, si punctum E sumptum fuerit in DC intra puncta D, C; major verò, si illud in latere DC utrinque indefinitè producto ultra puncta C, D sum-

ma-

gulum BED variè posse esse adfectum, & in utramvis partem rectæ BD constitutum; modò tantùm caveatur ne latus ejus BE ipsi lateri BD seu regulæ AB sit æquale: se-



quitur punctum E cujuscunque trianguli BED, quod ad BD adplicatur, (cujus latus BE ipsi lateri BD seu regulæ AD non est æquale) idem præstaturum esse.

CAPUT IV.

De modo describendi ellipses in plano, circa datos axes seu extremas diametros.

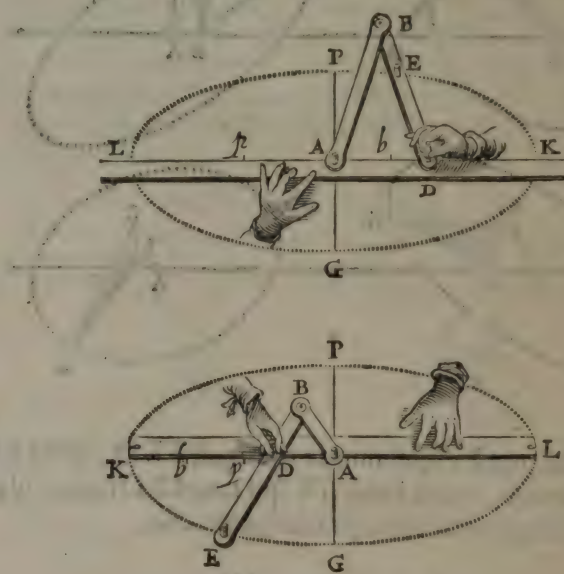
Postquam præmissis capitibus ea pertractavimus, quæ ut fundamenta spectare possunt, quibus organica ellipsis descriptiones superstrui valent, superest ut iisdem vestigiis insistentes ad eorum usum nos accingamus, atque ostendamus quo pacto ea expediantur.

S s

tur

tur quæ hac in parte vulgò proponi solent. Docebimus ergo primò, quibus modis circa datos axes, seu extremas diametros, ellipses ipsæ in plano designentur.

Dentur itaque in plano quocunque, LK axis transversus, rectus autem huic conjugatus GP , sese bifariam & normaliter in centro A secantes: oportet circa ipsos in eodem plano, ellipsis circumferentiam describere.



Ponatur Ap æqualis GA seu AP , ita ut pK æquetur vel aggregato vel differentia ipsarum KA , AP (perinde enim est); ipsa quoque bifariam secetur in b . Deinde fiant duæ regulæ AB , BD ex orichalco, ligno, aliavè materia solida, longitudine æquales ipsi pB seu bK ; hæc tamen lege, ut regula BD tam longa existat, ut in ipsa notari possit punctum E à B versus D , sic ut BE ipsi Ab sit æqualis. quocirca si Ab longitudine superet regulam BD , eatenus hæc ultra D prolonganda erit,

erit, donec ipsi sit æqualis. Hæ porro regulæ sic aptari debent, ut AB sit perforanda unâ suâ extremitate in A, ita ut injici queat paxillo, in puncto A defixo, ac circa ipsum rotari: altera verò extremitas B annexenda regulæ BED extremitati B, ita tamen ut circa B libere circumagi possit. Regula autem BDE in puncto D perforanda quoque erit, ut stylus aliquis acuminatus inferi queat, qui cuspide latus per rectam AD, secum ducat regulas AB, BDE. Denique regula BDE perforanda item erit in puncto E, ut recipiat alium insuper stylum, qui describat circumferentiam ellipsis in plano. Notandum autem est, ad exactam operis exegesis, tria puncta B, E & D in eadem recta linea existerere debere, ac à centris istarum perforationum debita intervalla punctorum ab invicem observari.

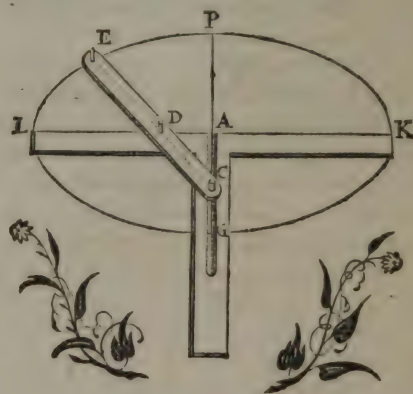
His itaque sic fabricatis, si ipsi LK regulam adjungamus, eamque sinistrâ immotam teneamus, interea dum stylum puncto D immisum dextrâ ferimus per rectam LK, ab utraque parte centri juxta dictam regulam: describet stylus E supra planum semi-circumferentiam quæ sita ellipsis. Ideoque si convertantur regulæ AB, BDE in alteram partem ipsius LK, eodem modo alter semissis designabitur. Quæ quidem ex iis, quæ secundo capite ostendimus, perspicua sunt.

Quamvis autem omnium conicarum sectionum delineationes ad Gnomonicam, Catoptricam & Dioptricam æquè deserviant, ac usum habent singularem: sit tamen ut ellipsis descriptio in quibusdam latius pateat, ac usum uberiores habeat. Quemadmodum in orthographicis sphaeræ delineationibus, in ædificiorum fornicationibus, cœlationibus pluteorum, ac aliis compluribus. Hinc quoque oritur, ut illam describendi plures modi extent quàm reliquarum quidem conic sectionum: ita ut consentaneum judicaverimus omnes eos, qui organici sunt ac quorum beneficio ellipses uno ductu describuntur, quantumque ipsi mihi constant hic recensere. Occurrit autem primò hic modus.

Esto rursus ellipsis describenda circa extremas diametros, seu axes LK, PG. Ad hoc autem præparetur regula EC, ex orichalco vel ligno, ut velis, quæ longitudine æqualis sit ipsi LA seu AK; in eaque notetur punctum D, ita ut ED æqualis sit PA seu AG. Ipsa autem perforetur in punctis E, D & C, sic ut styli inferi queant. quocirca sciendum est, ad hoc regulam EC revera quidem longitudine paululum excedere debere rectam LA seu AK, alias enim fieri non posset ut in E & C perforaretur. Præterea continuatur scipio LCK, lini-

324 DE ORGAN. CONIC. SECT.

liter ex orichalco, ligno, aliave dura materia, quæ in longitudinem CA pertusa sit fissurâ ejus latitudinis, cujus est crassities styli cylindrici in puncto C regulæ inserti. His ita paratis, si latus scipionis ipsi LK adjungamus, ita ut fissura respondeat ipsi GA; tum verò regula EC stylo D contra latus LK feratur, interea dum stylus C liberè currit per fissuram CA: describet stylus E in plano semissem circumferentiæ quæsitæ ellipseos. quocirca si eodem modo operemur ad reliquam partem, tota circumferentia descripta erit. Quia autem scipio

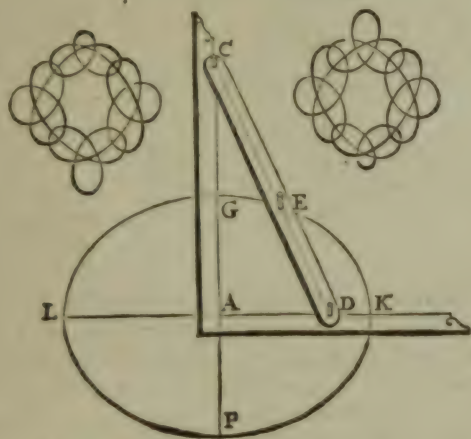


LEK duplicem ita normam repræsentat, manifestum est scipione destitutos, idem nos obtinere quoque beneficio alicujus normæ & regulæ CE, describendo singulis vicibus circumferentiæ ellipseos quartam partem.

Nullam hîc adjungo demonstrationem, quoniam ab aliis adducta est, ac illa etiam ex secundo capite à quovis facile deduci potest. qui enim caput illud rectè considerat, advertet mecum alium porrò modum ex eo manantem huic haud multò dissimilem, qui sic se habet.

Sit idem rursus præstandum quod supra, fiatque regula CD ejus longitudinis ut in ipsa notari possint tria puncta C, E, D, ita se habentia; ut distantia puncti C ad punctum E æqualis sit semi-axi LA seu AK; distantia verò punctorum E, D à se invicem æqualis semi-

mi-axi GA seu AP. Quo facto, perforetur regula in dictis punctis ut styli inferi queant ipsaque moveri possit, ita ut collocata semper reperiatur inter duo crura cuiusvis normæ ad angulum GAK applicatæ, ac ut styli in punctis C & D inserti contingant perpetuò inter ipsa crura. Hoc enim motu describet stylus E uno ductu circumferentiæ ellipsoe quartam partem GEK. Notandum hic oc-



currit præterea ut ritè omnia succedant; in superiori quidem descriptione sufficere, latus scipionis LA seu AK & filuram AG eam habere longitudinem, quæ est distantia punctorum D, C in regula; in hac autem, ut crus utrumque normæ ad minimum ejus sit longitudinis, cuius est regula CD.

Quia autem plura ab aliis afferuntur ad descriptionem ellipsis, ut modi distincti, quæ tamen parum differunt inter se, & à prædicto modo nihil habent diversum, cum ex eodem fonte deriventur: consulto eos omittendos esse duxi.

Cæterum, cum alius insuper modus usitatus sit, describendi ellipsim in plano circa axes, qui sit beneficio alicujus restis vel fili: visum quoque fuit eum huic nostro subungere, ne opus sit ut aliunde

petatur quidquid ad accuratam hujus lineæ descriptionem desiderari possit.



Sit itaque describenda ellipsis circumferentia beneficio fili, circa prædictos axes LK, PG, quorum major quidem est LK, minor verò PG. Describatur ex P vel G, ut centro, intervallo LA seu AK, dimidio majoris axis, arcus circuli secans ipsum axem majorem in punctis H, I; & in H & I defixis duobus paxillis, jun-

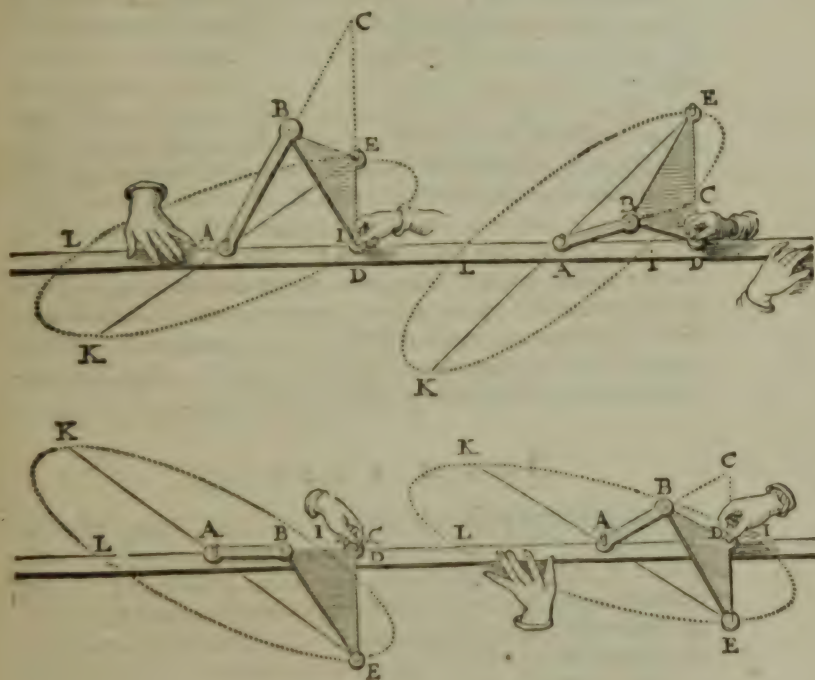
gantur extremitates alicujus fili, quod paxillis circumponatur, similiter ut hic HEI: immisso enim stylo, ac ipso filum in triangulum æquali semper vi extendendo ac circa paxillos circumducendo, describet is in plano lineam curvam LEP KG, quæ circumferentia erit ellipsis. quemadmodum patet ex 32 Propositione libri 3ⁱⁱ Conicorum Apollonii. Quocirca si velimus ut ellipsis circumferentia transeat per puncta L, P, K, & G, curare debemus ut filum extensum pertingat præcisè ad aliquod horum punctorum. Denique sciendum est, loca punctorum H, I, ubi paxilli defixi fuere ad descriptionem ellipsis, ab effectu Focorum nomine appellari; quorum quidem punctorum consideratio frequens est in Catoptrica & Dioptrica: ut perspicuum est ex iis, quæ sequuntur caput septimum Dioptricæ Viri illustris, Renati des Cartes.

CA-

CAPUT V.

*De modo describendi ellipses in plano, circa datas quas-
cunque diametros conjugatas.*

Ostensis quo pacto ellipsis in plano describi possit circa extre-
mas diametros, congruum videtur & hic ex præcedentibus



similiter ostendere, quibus modis circa ipsa datas quascunque dia-
metros conjugatas in plano designetur.

Sint itaque datæ diametri conjugatæ LI, KE, bifariam sese & de-
cussa-

cussatim in centro A secantes. Oportet circa ipsas in eodem plano ellipsis circumferentiam describere.

Demissâ ex E supra L I perpendiculari ED, ponatur EC æqualis LA seu AI, ita ut CD æquetur vel aggregato vel differentiæ ipsarum ED, AI, ducaturque recta AC. Divisâ autem AC bifariam in B, agantur BE, BD; fiatque regula AB ex orichalco aliavè materia dura, sibi annexum habens in puncto B triangulum BED ex lamina orichalcea aliavè solida materia paratum, ita tamen ut illud ipsum circa B in plano circumvolvi queat.

Regula porro AB perforetur extremitate suâ in A, sic ut paxillo in puncto A defixo injici possit ac circa id ipsum rotari: quemadmodum etiam agendum est circa puncta E & D laminæ, ut nempe in ipsis styli inferi queant: debet enim in D stylus acuminatus inferi, qui cuspide latus per rectam AD, secum ducat regulam AB, triangulumque BED; in E autem is, qui describat circumferentiam ellipsis. Quare sciendum est, ut ritè omnia succedant, relinquendum esse spatium aliquod circum dicta puncta E, D, veluti centra, ut commodè in ipsis inferi valeant. Postquam hæc igitur ita paraverimus, stylum D dextrâ duco per rectam AD, tenens interea regulam immotam sinistrâ ipsi AD adjunctam. Atque dum sic fertur punctum D per rectam AD (quam ab utraque parte puncti A indefinite protensam intelligo), ac regula AB rotatur circa punctum A: describet stylus E in plano circumferentiam ellipsis quæsitæ. Quod manifestum est ex iis, quæ capite tertio ostensa à nobis sunt.

IDEM ALITER.

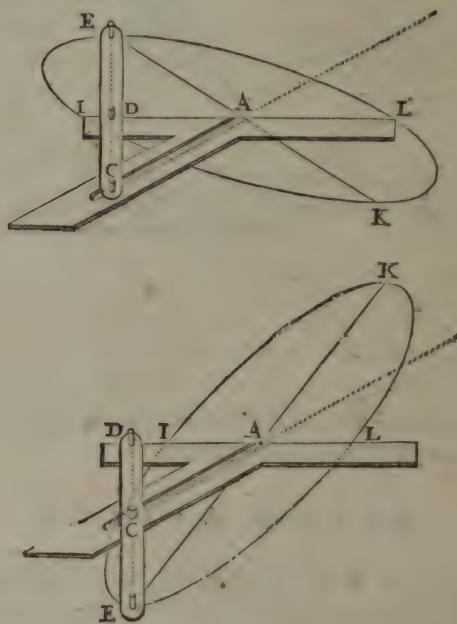
Idem quæ supra positis, demissaque ex E supra L I perpendiculari ED, ipsa sursum producat ad C, donec CD æqualis sit compositæ ex ED, AI, jungaturque AC. Fiat autem jam regula CD, ejus quidem longitudinis, ut in ipsa notari possint tria puncta C, E, & D, sic se habentia, ut distantia puncti C ad punctum E æquetur semidiametro LA seu AI; distantia verò punctorum E, D ab invicem perpendiculari deductæ ED. Quo facto, perforetur hæc regula in punctis C, E, & D, ut styli inferi queant; adhibitâque ipsi angulo CAI lesbiâ regulâ (quod apud lignarios frequens est instrumentum in capiendis angulis), moveatur regula CD inter ejusdem crura, ita ut styli in punctis C & D inserti internè contingant perpetuò illa crura.

A diagram of a mechanical linkage mechanism. It features a horizontal bar with a pivot point labeled 'A'. A vertical bar is pivoted at point 'C' and has a point 'E' on it. A curved link connects point 'A' to point 'D' on the horizontal bar. Another curved link connects point 'C' to point 'D'. A horizontal line segment is labeled 'I' at its left end. A vertical line segment is labeled 'K' at its bottom end. A complex, multi-looped path is shown in the upper left corner, resembling a stylized knot or a series of overlapping loops.

A D H U C A L I T E R.

Posita enim EG æquali AI , ut differentia sit CD , agatur recta per puncta C, A . Tum verò assumptâ rursus regulâ EDC , in qua notata sint tria puncta $E, C, \& D$; ita quidem, ut distantia punctorum E, D ab invicem æqualis sit perpendiculari demissa ED ; distantia autem punctorum E, C æqualis semidiametro AI seu AL , ita ut CD sit ipsarum AI, ED differentia: adhibearur præterea scipio ICL , qui in longitudinem CA pertusus sit fissurâ CA , quæ quidem cum IL angulos faciat obliquos, æquales angulis IAC, CAL . Hoc

igitur adplicato ipsis rectis IL & CA, perforetur regula ECD in dictis punctis, ut styli inferi queant; ita quidem ut is, qui in C est inferendus, paris sit crassitiei atq; est latitudo fissuræ CA: ut dum regula ECD stylo D contra latus scipionis IL fertur, interea dum stylus C liberè currit per fissuram, ipsa regula CED non vacillet, ac stylus E exactè ellipsis circumferentiam describere efficiat. Atque hæc qui-



dem ratione semissis circumferentiæ designabitur: quocirca ut integra describatur, convertendus erit modò scipio in reliquam partem ipsius LI, atque adplicandus, ut dictum est. Cujus quidem rei demonstrationem non adducò, cum illa ex superioribus perspicua sit, atque à quolibet facillè inveniri possit.

CA-

CAPUT VI.

De hyperbolis, quæ ex motu implicato in plano, tam circa extremas, quam alias quasunque diametros conjugatas, describuntur.

Seent invicem rectæ EK, LI bifariam in puncto A, agantur verò per puncta L, I parallelæ ipsi EK, donec rectis per puncta E, K ductis æquidistanter ipsi LI, occurrant in D, F, H, & M, parallelogrammumque constituent D F H M; ducti autem in eodem diagoni DH, F M utrinque in infinitum producantur. Divisa però AD bifariam in B, jungatur BE: construaturque angulus rectilineus $d b e$, æqualis angulo DBE in 1^{ma} & 2^{da} figura, aut angulo ABE in 3^{ta} aut 4^{ta} figura; cujus una linearum $b d$ (quæ dictum angulum constituunt) æqualis sit ipsi BD; alia autem $b e$ indefinitè versus e sit producta, quæ in puncto d insuper sibi annexam habeat regulam $d E$ utrinque indefinitè quoque extensam, & quæ circa illud liberè in plano converti queat.

Dico si dictum angulum moveri concipiamus supra planum in recta AD, ita ut $b d$ semper applicata maneat ad AD; regulam autem $d E$ perpetuò transire per punctum E, atque secare $b e$ in e : punctum quidem e motu isto describere lineam hyperbolen, cujus centrum est A, transversa diameter KE, recta autem huic conjugata LI, atque asymptoti rectæ DAH, MAF.

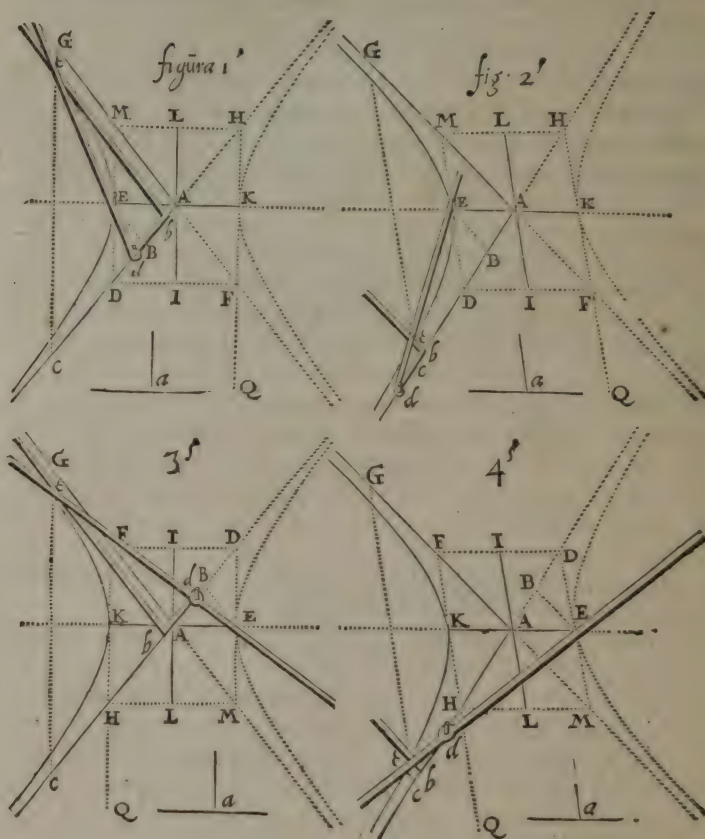
Ad hoc autem demonstrandum, ducatur per e recta $e e$ G parallela ipsi DM, secans rectas DH, FM in e & G.

Quoniam igitur est $b e$ ad A b , ut $e e$ ad e G: b erit etiam componendo A e ad A b , ut e G ad e G; e permutandoque A e ad e G, ut A b ad e G. Ut autem A b ad e G, d ita est assumptâ communi altitudine $e b$ rectangulum A b , $e e$ ad rectangulum $e e$, e G: at verò ut A e ad e G, e ita quoque est BD ad DE, seu assumptâ communi altitudine DE) rectangulum sub BD, DE ad DE quadratum. Erit igitur e ut rectangulum A b , $e e$ ad rectangulum $e e$, e G, ita rectangulum BD, DE ad DE quadratum. b Æquale autem est rectangulum A b , $e e$ re-
ctangulo BD, DE: b est enim B d , hoc est, A b , ad $b d$, hoc est, DB, ut DE ad $e e$. b Unde & rectangulum $e e$, e G quadrato DE æquale erit. Liqueat itaque punctum e esse in hyperbola, cujus asymptoti sint rectæ DAH, MAF, diameter transversa EK, recta autem huic conjugata LI, & centrum A. Quia verò hoc in infinitum contingit circa

T t 2

pun-

punctū ϵ , secundū ea quæ proposuimus: sequitur interfectione continuā rectarū $b\epsilon$, & d punctum ϵ motu isto in plano lineam hyperbolen describere, circa diametros EK , LI . Quod ostendendum erat.



Manifestum præterea est, si transferamus regulam dE ipsamque transire concipiamus per punctum K , postquam conversus sit angulus $db\epsilon$ in alteram partem rectæ AD , aliam similem lineam hyperbolen in plano, huic oppositam, eadem viâ describi.

SCHO-

SCHOLIUM.

Sicuti sub genere ellipsium circulus quoque comprehendi solet, atque pro certa ejus specie assumi; quippe in quo latus transversum aequale est lateri recto: ita quoque in genere hyperbolarum fieri potest, ut certa ibi species determinetur, omnium simplicissima, ad quam cetera omnes sint referenda, hoc est, in qua latus transversum & rectum inter se aequantur.

Quemadmodum igitur in Scholio Capitis secundi usu venit, ut ibidem consideravimus, quam relationem ellipsis habet cum circulo, quod spectat ad eorum superficiem: ita quoque hic facturi sumus, comparando videlicet figuram contentam sub recta linea & portione lineae hyperbolae cujuscunque cum alia figura, contenta similiter sub recta linea & portione lineae hyperbolae; cujus nempe latus rectum & transversum inter se aequalia sunt: quia illud a nemine haecenus (quod sciam) animadversum fuit.

Sit itaque Ee figura contenta sub recta linea ee & portione lineae hyperbolae cujuscunque, cujus quidem axis transversus sit EK , rectus autem LI . Sit item alia figura iEy contenta sub recta linea iy & portione lineae hyperbolae iEy , cujus rectum latus & transversum inter se aequalia existant, ac utrumque aequale lateri transverso EK figurae Ee .

Dico, similiter fieri ut in ellipsi, figuram Ee ad figuram iEy eam habere rationem, quam habet axis rectus LI ad axem transversum EK .

Quoniam enim ad axem EK ordinatim adplicantur recta ne, ni ; ^a erit ap 21 Primae in figura Ee , ut rectum latus ad transversum, ita quadratum ne ad rectangulum KnE . Quia autem secundum axem LI mediam proportionem habet inter latera figurae Ee : ^b erit, h 2 Corol. 20 rectum latus ad transversum, ut quadratum LI ad quadratum EK . ^c Quamobrem erit, ut quadratum ne ad re-

ctangulum KnE , ita quadratum LI ad quadratum EK . ^d At vero cum ^d Ex hypothesi. latera figurae iEy inter se aequalia existant, & utrumque eorum aequale lateri transverso EK figurae Ee : sequitur quadratum ni rectangulo KnE ^e p 7 Quintae Elem. aequale esse. Ac idcirco esse quadratum ne ad rectangulum KnE seu ^e ad ^f p 22 Sextae Elem. quadratum ni , ut quadratum LI ad quadratum EK . ^f ac proinde quoque

Tt 3

ne

*Ex metho-
do indivisi-
bilium Ca-
valerii.*

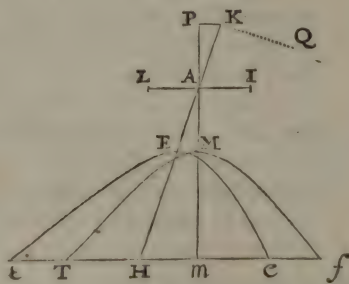
n e ad ni, ut LI ad EK. Quoniam autem hoc in infinitum apparet de omni-
bus aliis rectis ne, ni, ordinatim adplicatis ad axem EK in utraque figura:
8 relinquitur figuram e Ee ad figuram i Ey esse, ut axis rectus LI ad axem
transversum EK. Quod erat propositum.

Porro hæc non tantum locum habent juxta solam considerationem axium,
sicuti ea hic fuerunt proposita; verum etiam secundum quascunque diame-
tros, quemadmodum ex demonstratione colligi potest. Veruntamen quia in
his eundem ferè ordinem quem in ellipsis placuit nobis servare; ibidem au-
tem ostenderimus cui figura rectæ, sub recta linea & portione circumferentia
ellipsos comprehensa, æquaretur figura quævis scalena, in idem sub recta linea
& portione circumferentia ellipsos comprehensa: ideo & hic rectè facturos
nos existimavimus, si similiter ostendamus cui figura rectæ, quæ comprehen-
ditur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, æqualis sit qualibet figura
scalena, pariter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ comprehensa.

Sit ergo figura e E scalena, contenta sub recta e e & portione lineæ hy-
perbolæ e Ee, cujus latus transversum sit LI, rectum autem KQ; sive cujus
transversa diameter sit EK, recta autem huic conjugata LI.

Si itaque ex punctis E, K alternatim ducantur rectæ EM, KP diametro
LI parallelæ; ac de inde per centrum A recta PAM perpendicularis ad e e,
p 7 Caput
huius.

secans EM, KP in M & P, rectam autem e e in m; * atque denuo circa PM
quidem ut transversum axem, rectum verò LI, describatur linea hyperbolæ
TMf, quæ secetur à recta e e, vel ab ipsa in hanc vel illam partem produ-
cta in T & f: dico figuram e Ee figuræ TMf æqualem esse.



h p 21 Primi
Conicorum
Apollonii.
i p Corol. 20
Sexti Elem.
k p 15 Quin-
ti Elem.
l Ex con-
structione.
m p 2 Sexti
Elem.
n p 18 Quin-
ti Elem.
o p 1 Sexti
Elem.

lela sunt KP, ME & mH: m erit AE ad EH, ut AM ad Mm. Et sum-
ptis antecedentium duplis, ut KE ad HE, ita PM ad Mm; n componendo-
que KH ad HE, ut Pm ad mM. o Vt autem KH ad HE, ita est re-
ctan-

Quoniam enim ordinatim
ad diametrum EK adpli-
cata est recta He in figura
e Ee: h erit ut rectum la-
tus KQ ad transversum
KE, i sive quadratum LI
ad quadratum KE, k sive
etiam quadratum AI ad
quadratum AE, & ita He
quadratum ad KHE re-
ctangulum.

Quoniam item l paral-

Rectangulum KHE ad HE quadratum; & ut Pm ad m M, ita est Pm M
 rectangulum ad m M quadratum. P Erit igitur ut rectangulum KHE ad pp 11 *Quin-*
 quadratum HE, ita rectangulum Pm M ad m M quadratum; 9 & *ti Elem.*
 permutando rectangulum KHE ad rectangulum Pm M, ut quadratum Pm M *Quin-*
 HE ad quadratum m M, sive ut quadratum AE ad quadratum AM. *ti Elem.*
 Cum autem ostensum sit, & quadratum He ad rectangulum KHE esse,
 ut quadratum AI ad quadratum AE: erit quoque ex aequo, ut quadratum *Quin-*
 He ad rectangulum Pm M, ita quadratum AI ad quadratum AM. Quia *ti Elem.*
 vero in figura TMf similiter, ut supra, quadratum mf ad rectangulum
 Pm M est, ut quadratum AI ad quadratum AM: erit quoque quadra- *Quin-*
 tum He ad rectangulum Pm M, ut mf quadratum ad rectangulum *ti Elem.*
 Pm M. E quibus sequitur & quadratum He quadrato mf, aequale esse. *Quin-*
 Equales igitur quoque erunt recta He, mf. unde & earum dupla e e, *ti Elem.*
 Tf. Eadem est demonstratio de omnibus aliis rectis He, mf, ordinatim
 applicatis in infinitum ad diametros KE, PM in utraque figura. *Qua- u Ex m-*
 re constat figuram scalenam e Ee figuram recta TMf aequalem esse. Quod *thodo indi-*
 erat propositum. *visibilem*
Cavalieri.

Ex his que jam ostensa sunt liquet, figura cuilibet data, que contine-
 tur sub recta linea & portione lineae hyperbole, exhiberi posse aliam figu-
 ram eidem aequalem, contentam similiter sub recta linea & portione lineae
 hyperbole, cujus latus transversum & rectum inter se equalia existunt. Si
 enim ejusmodi figura fuerit scalena, ut e Ee, ostendimus hic aliam TMf
 ipsi aequalem, quae quidem est recta. porro quam rationem hac habeat ad
 figuram sub recta linea & hyperbola comprehensam, cujus latus transversum
 & rectum inter se aequantur, ex superioribus quoque constat. Manifestum
 igitur est, cuivis figura data, quae continetur sub recta linea & portione
 lineae hyperbole cujuscunque, exhiberi posse aliam ipsi aequalem, contentam
 similiter sub recta linea & portione lineae hyperbole, cujus latus transversum
 & rectum inter se sunt equalia.

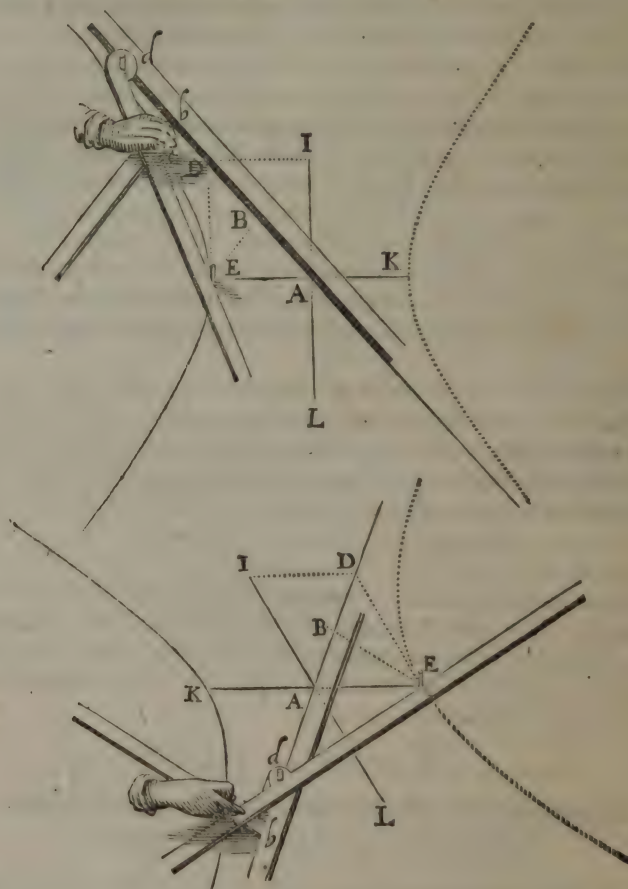
CAPUT VII.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis axibus,
 vel quibuscunque diametris conjugatis.

Siquidem praecedenti capite exposuimus, quo pacto intelligendum
 sit motu implicato in plano aliquo hyperbolas describi: reli-
 quum est ut ostendamus, quomodo ipsae in plano, datis axibus, vel
 quibuscunque diametris conjugatis, describantur.

Den-

Dentur itaque in plano quocunque, EK axis transversus sive diameter transversa, IL autem rectus axis seu recta diameter priori EK conjugata, bifariam sese in centro A secantes.



Oportet in eodem plano lineam hyperbolen describere, cujus axes, diametriverè conjugatæ sint, quos diximus.

Duâ

Ductâ igitur ex puncto I rectâ ID parallelâ ipsi KE, secante ductâ ex E parallelâ ipsi LI in D, agatur rectâ AD, eâque utrinque indefinitè protendatur. Porro sectâ AD bifariam in B, connectatur rectâ BE. Fiatque ex orichalco, ligno, aliâve materiâ solidâ norma, angulivè obliquus rectilineus db , æqualis angulo DBE aut ABE; cuius unum quidem crus bd æquetur ipsi BD; alterum autem b indefinitè versus e sit extensum, qui puncto d sibi præterea annexam habeat regulam dE utrinque indefinitè quoque extensam, & quæ circumcirca illud liberè circumvolvi queat. His ita constructis, si feratur angulus db per rectâ AD, ita ut crus ejus bd applicatum perpetuò teneatur contra regulam, ipsi AD adjunctam; interea dum regula dE rotatur circa d , quam assidue per punctum E transire cogimus: describent crus b regulæque dE , continuâ illâ intersectione, in plano lineam curvam, hyperbolen dictam; cuius quidem axis, diametervè transversa sit KE; rectâ verò huic conjugata LI. Notandum autem occurrit, si aptè & accuratè omnia exsequi velimus; perforandam quidem esse regulam dE in d , ita ut punctum d margini ejusdem exactè respondeat, ac ipsa paxillo, circa quem rotari possit, in extremitate d cruris bd dicti anguli db extracto, injici queat. Similiter in E supra planum figendum esse paxillum, cui regula dE (quam transire semper oportet per E) suâ margine, in qua punctum d situm est, incumbat. Denique stylo acuminato uti erit necesse ad designandam puncti e intersectionem.

Atque ut quidem ratione adductâ, datis axibus, diametrivè conjugatis, lineam hyperbolen describi constat: ita similiter, si transferamus regulam dE ac ipsam transire faciamus per punctum K, postquam conversus fuerit angulus db in alteram partem rectæ AD, alia quoque similis linea hyperbole huic opposita, eisdem axes, diametrolvè habens, designabitur.

IDEM ALITER, DATIS AXIBUS.

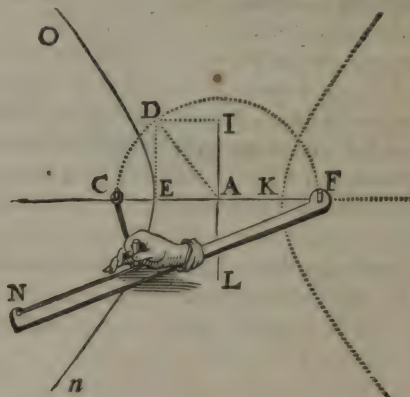
Quia alius porro modus occurrit, describendi hyperbolas in plano, datis axibus, beneficio alicujus rectis vel sili, qui originem ducit ex 3^â prop^â libri 3ⁱⁱ Conicorum Apollonii: placuit paucis cum hîc exponere. Is autem sic se habet.

Propônatur itaque rursus linea hyperbole describenda, cujus axis transversus sit EK, rectus autem ipsi conjugatus LI, qui sese bifariam & ad angulos rectos secant in A.

Vv

D. G.

Ductâ, ut ante, ex I rectâ ID æquidistante ipsi KE, donec secetur à rectâ ex E ductâ parallelâ cum LI in D, agatur recta AD; centro-
que A intervallo AD semicirculus describatur CDF, secans hinc in-
de EK productam in C & F. Porro defixis in punctis C & F duobus



paxillis, annexoque
extremitati N longæ
regulæ NF extremo
alicujus fili N & C, ipsâ
NF paulò breviori,
perforetur altera ejus
extremitas, ac ita pa-
xillo F injiciatur; fi-
lum verò N & C altero
extremo paxillo C
nectatur. His ita per-
actis, si immisso stylo
ducatur filum N & C
juxta regulâ NF, ini-
tio facto in n extremo
fili, stylusque deduca-

tur ad E, ita ut pars fili N & semper veluti agglutinata teneatur re-
gulæ: describet is in plano lineam curvam n & E, quæ portio erit lineæ
hyperbolæ. Quocirca si velimus, ut hoc ipso modo hyperbole in
plano designetur, cujus quidem axis transversus sit EK, rectus autem
LI, ut propositum est: curandum erit, ut longitudo regulæ NF longi-
tudinem fili N & C exactè superet quantitate axis: sive etiam, ut dum
stylus ita deducitur, qui curvam lineam designat, ipse accuratè per-
tingat ad punctum E. Cæterum si transferatur regula ad partem re-
liquam rectæ CF versùs O, eodem modo alia portio OE designabi-
tur. Quòd si autem regula ex F ad C, & filum ex C ad F transferan-
tur, alia præterea similis linea hyperbole, huic opposita eorundem-
que axium, describetur.

Tandem sciendum est, punctis C & F, descriptioni hyperboles in-
servientibus, focorum nomen ab autoribus impositum fuisse, sive
etiam ipsa puncta urentia dici, ab effectu quem habent specula & vi-
tra ad hanc figuram expolita. Vide ea quæ post caput septimum tra-
ctat vir Nobilissimus & Clarissimus Renatus Des-Cartes in sua Dio-
ptrica.

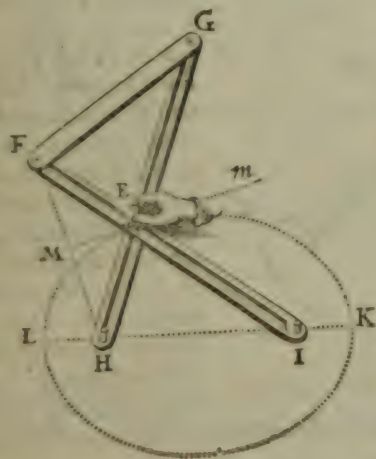
C A-

CAPUT VIII.

*De modo describendi ellipses in plano, datis focus,
& utroque vertice.*

INter modos ellipseos describendæ varios non minùs expeditus est is, qui procedit ex datis focus & utroque vertice: quamobrem rationi consentaneum fore existimavi, si post modos jam ostensos, quibus ellipses in plano designantur, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, tradam quoque quo pacto ipsæ in plano, datis focus & utroque vertice, describantur. Processus autem talis est.

Dentur in plano aliquo foci H & I, vertex alter L, alter autem K, ita ut axis transversus sit LK: oportet in eodem plano ellipsis circumferentiam describere, cujus foci & vertex uterque sint, quos diximus.



Præparentur ex ori-
chalco, ligno, aliave so-
lida materia regulæ tres
HG, GF, & FI; quarum
quidem HG & FI sin-
gulæ æquales sint axi
LK; ipsa autem FG æ-
qualis distantia HI fo-
corum ab invicem: reg-
ulæ verò HG, FI in
longitudinem pertusæ
sint fissurâ, quæ quidem
ejus sit latitudinis, cu-
jus est crassities styli
cylindrici inserendi, quo
circumferentia ellipsis
sit designanda. Cate-
rùm, perforentur quo-
que regulæ HG, FI in

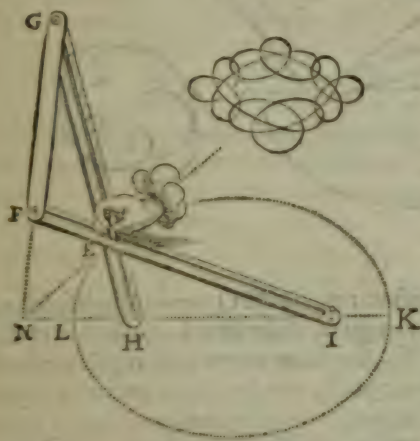
extremitatibus suis H, I, ita ut paxillis in H & I defixis injici queant;
earundem verò extremitates G, F extremitatibus regulæ FG anne-
ctantur, eamque positionem habeant, quam in apposita figura vi-
dere

V v 2

tem angulus MEF angulo MEI æqualis, quod sint secundum verticem. Æqualis igitur quoque erit angulus MEH angulo MEI , atque adeo recta ME ellipsin contingens in E , per conversam 48 Prop. libri 3ⁱⁱ Conicorum Apollonii. Quod erat propositum.

S C H O L I U M.

Colligitur ex methodo allata ratio facillima ducendi rectam, qua ellipsin in quovis dato puncto circumferentia contingat. Sit enim, exempli gratia, in puncto E ducenda recta ellipsin contingens. Agatur ex alterutro foco H vel I , puta I , per E recta IEF æqualis axi LK , junganturque focus alter H & extremitas hujus recte F , recta HF : si namque bisariam secta hac recta in M , puncta M , E , recta linea connectantur, continget hac ellipsin in E .



Vel etiam in hunc modum.

Educantur ex utroque foco H , I per E rectæ HEG , IEF , quarum unaquæque axi LK æqualis sit, jungaturque GF . Si igitur GF æquidistans fuerit ipsi HI , quod quidem accidet cum punctum E extremitatem referet minoris axis: recta, qua per E ipsi HI ducitur parallela, ellipsin in E continget. Si verò FG , HI non fuerint parallela,

producantur amba donec concurrant in N , recta enim qua ab N ad E perducitur, similiter ellipsin in E continget. Ut erat propositum.

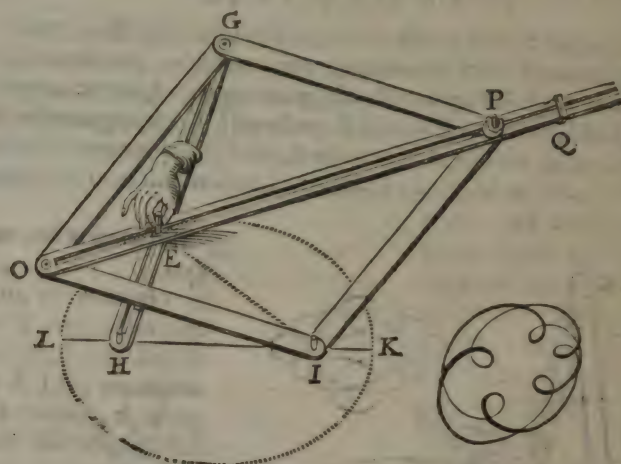
I D E M A L I T E R.

Iisdem quæ supra positis, assumantur præter regulam HG alie quatuor regulæ æquales GP , PI , IO , & OG longitudinis cujuslibet, modo tamen ea minor non sit quam LI seu HK ; ipsæque extremitatibus sibi invicem nectantur, ita ut rhombum, quadratumve $GPIO$

Vv 3

re-

repræsentent. Ubi autem ipsæ in G connexæ sunt, connectantur & simul cum extremitate G regulæ HG; ubi verò in I sibi invicem sunt annectendæ, iisdem locis perforentur, ut paxillo in I defixo injici queant, hæcque ratione connexæ habeantur; porro ubi in O connexæ



sunt, ipsis alia insuper annectatur regula OPQ versùs P indefinita, quæ in longitudinè pertusa sit longo canali seu fissurâ, ejusdem latitudinis cujus est fissura regulæ HG. Siquidem autem dicta regula medio suo transire perpetuò requiritur per P, non è re fuerit perforare regulas G P, I P in P, ita ut in ipsas paxillus inferi queat, quo simul in P connexæ teneantur, paris quidem crassitie atque latitudo fissurarum, constans subtus ex lamella, superiùs verò in cochleam extractus; ita ut, postquam regulæ G P, I P, & O P eidem injectæ fuerint, atque his alia lamella foramine pertusa superimponatur, dictæ regulæ cochleâ inter lamellas contineantur. Denique annulo quadrangulo regulam O P circumdare oportebit extra P, qui arcu eam circumplectens ulterius quoque si opus sit amoveri possit, nec sinat ut fissura in aliam evadat latitudinem. His ita constructis, ut ad descriptionem ellipsoos accedamus, sumatur stylus aliquis cylindricus, ejus quidem crassi-

crassitie cuius est latitudo utriusque fissuræ, isque in fissuram utramque immittatur, utpote in E quò secant invicem regulæ HG, OP, deferaturque ab L versus K, prout à jam dictis regulis tenetur: quo opere designabitur quidem in plano semissis circumferentiæ ellipsis quæsitæ. Similiter autem alter semissis absolvetur. Ratio hujus negotii perfacilis est. Ducatur enim recta IE.

Cum igitur triangulorum GPO, OPI duo latera OG, GP duobus lateribus OI, IP utrumque utrique æqualia sint, basis verò OP utriq; triangulo communis: ^{a p 8 Primi Elem.} erunt quoque æ anguli GPO, OPI, sub æqualibus rectis lineis contenti, æquales. Porro cum duo triangula GPE, EPI duo latera GP, PE duobus lateribus IP, PE utrumque utrique æqualia habeant, est namque EP utrique communis; habeant verò & angulum GPE angulo EPI sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem (æ ut jam est ostensum): ^{b p 4 Primi Elem.} habebunt quoque basin GE basi EI æqualem, β angulumque GEP angulo PEI, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Aequalis itaque est HG ipsis HE, EI simul sumptis; est autem HG ex constructione æqualis axi LK: æquales ergo quoque erunt HE, EI ipsi axi LK, atque adeò punctum E in ellipsis circumferentiâ cadet, cujus foci H, I, & axis major est LK, perconversam 52^{dam} Prop. libri 3^{ti} Conicorum Apollonii. Quia verò hoc similiter constat de omni puncto E in qua libet alia instrumenti constitutione, relinquatur hæc viâ stylum E circumferentiam quæsitæ ellipseos describere. Quod præstare opus erat.

Habet autem hæc methodus hoc sibi peculiare, ut inter describendum regula OP assidue designet quoque lineam, quæ ellipsin in quovis circumferentiæ puncto E contingat. Quod quidem sic liquet.

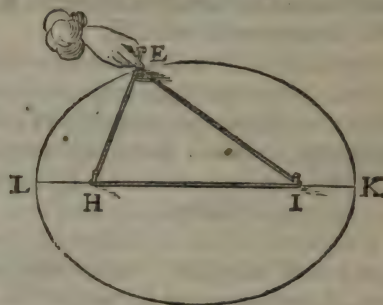
Quoniam enim anguli GEP, PEI æquales sunt, (ut modò ostendimus,) ^{c p 15 Primi Elem.} æ angulus verò GEP angulo OEH æqualis, cum sint ad verticem: erit etiam angulus PEI angulo OEH æqualis, atque ita recta OP ellipsin LEK contingens in E, per conversam 48^{vam} Prop^{ne} libri 3^{ti} Conicorum Apollonii. Ut proponebatur.

ALITER, VULGARI MODO.

Iisdem positis, ostendendum est ut propositum vulgari modo perficiatur.

Defixis itaque paxillis in H & I, filum capiatur quod duplicatum nexis

nexis extremitatibus longitudinem LI vel HK adæquet, illudque paxillis circumponatur: fiet enim, si immisso stylo filum extendatur



in triangulum, æquali semper vi, atque ita stylus circa paxillos circumducatur, ut is circumferentiam LEK quælitæ ellipseos in plano describat.

CAPUT IX.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis focus & vertice.

TAmetsi promptè variis modis hyperbolæ quoque in plano describuntur, infimo tamen loco non habendus est is, quo ex datis focus & vertice ipsæ in plano delineantur. Similiter igitur sicut in ellipsi factum fuit, ubi, postquam docueramus quibus modis, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, ipsæ in plano describerentur, ostendimus quâ viâ ex datis focus & utroque vertice decircinandæ essent: ordo postulat ut & idem circa hyperbolas instituamus, præsertim cum præsentis modi iis, quos circa eandem de ellipsi Propositione dedimus, consentiant. Ut ex sequentibus patebit.

Dentur igitur in plano quocunque foci C, F, & vertex E. Oporteatque in eodem plano lineam hyperbolen describere, cujus C & F sint foci, vertex autem E.

Ponatur KF æqualis CE, ita ut axis transversus sit EK; præparentur-

turque ex orichalco, ligno, aliavé dura materia regulæ tres CD, DG, & GF; quarum quidem CD, GF unaquæque axi EK; reliqua verò DG intervallo focorum æqualis sit. Intelligi tamen volo, ut regulæ CD, GF ultra C & G indefinitè sint extensæ ac longæ, itemque per-



tusæ fissurâ ejus latitudinis, quæ est crassities styli cylindrici inferendi, quo hyperbolæ lineæ delineanda erit. Præterea perforari debent hæ regulæ in C & F, ut paxillis in C & F defixis injici queant, in D & G autem ipsæ connectendæ sunt cum regula DG, quemadmodum per appositam figuram conspiciere licet. Quo facto, si immittatur stylus in utramque fissuram, nempe in punctum communis intersectionis regularum CD, GF, isque deferatur secum ferens regulas CD, GF rotantes circa puncta C, F, prout ab E versùs fertur: de-

Xx

scri-

scribet in plano lineam curvam E , quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quod quidem similiter ita se habet ad alteram partem rectæ CF . Si verò prædictæ regulæ CD , GF ad reliquam partem ultra D & F indefinitè quoque intelligantur extensæ, non minùs alia linea hyperbole huic opposita, eisdem focos, axemque habens, describetur.

Demonstrandum itaque est ratione ostensâ stylum & lineam quæsitam hyperbolen describere, hoc est, cujus foci sunt puncta C , F , vertex autem punctum E .

Jungatur enim CG .

Quoniam igitur triangula CDG , CFG duo latera CD , DG duobus lateribus GE , FC utrumque utrique æqualia habent, basin verò CG communem: ^a habebunt quoque angulum DCG angulo CGF , sub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. ^b Quia autem anguli DCG , GCE & duobus rectis sunt æquales, nec non anguli CGF , CGE ; anguli autem DCG , CGF inter se æquales sint ostensæ: sequitur quoque angulos GCE , CGE inter se æquales esse. Cum igitur trianguli CGE anguli GCE , CGE æquales inter se existant, ^c erunt similiter latera subtenfa GE , CE inter se æqualia. Major itaque erit E F quàm E C , rectâ GF ; atque est quidem GF ex constructione axi E K æqualis: quocirca punctum E erit in linea curva, hyperbole dicta, cujus foci sunt puncta C & F , vertex autem punctum E , ut liquet ex conversa 51^{ma} Prop^{ne} 3ⁱⁱ libri Conicorum Apollonii. Siquidem verò rectæ CD , GF versùs & indefinitè se mutuo secare possunt, atque eadem semper ratio constat puncti intersectionis: manifestum est ejusmodi motu quæsitæ lineæ hyperboles portionem in plano describi. Quod erat faciendum.

Simile in hunc modum inferre licet de alia linea hyperbole, huic opposita, verticem habente in K .

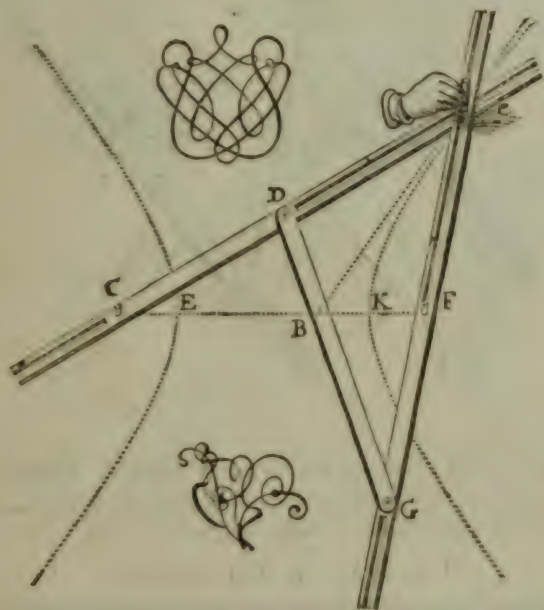
Inferatur præterea, si bisariam secetur recta CG in H , rectam connectentem puncta H , E , hyperbolen in E contingere.

Æqualia enim sunt latera HC , CE trianguli HCE , lateribus HG , GE trianguli HGE , & basis HE utrique triangulo communis est: ^d quamobrem & anguli HCE , HGE sub æqualibus rectis lineis contenti inter se æquales sunt; adeoque recta HE hyperbolen contingens in puncto E , per conversam 48^{va} Prop^{ne} 3ⁱⁱ libri Conicorum Apollonii, ut proponebatur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Perspicium est, ex adducta methodo facile rectam lineam duci posse, que curvam hyperboles tangat in dato quolibet puncto. Si enim in e , verbi gratia, ducenda sit tangens curvam hyperboles e , agantur ab e ad C & F recta EC , EF ; auferaturque ex majori F recta eG ipsi minori C equalis, ut differentia sit GF , connectaturque CG . Quo facto, si bifariam secetur CG in H , jungaturque eH , continget hac curvam hyperboles e in e sicut requirebatur.



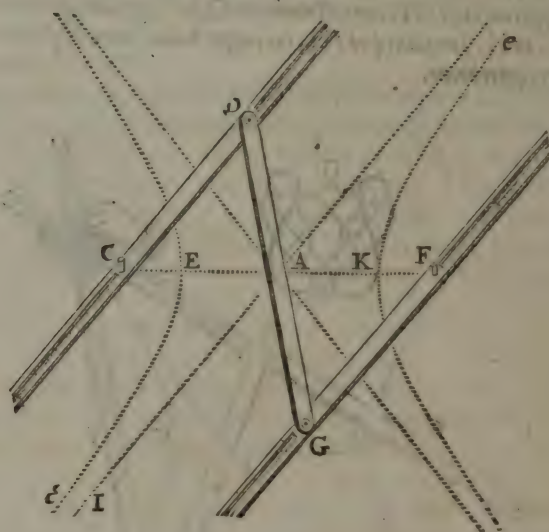
Quod etiam in hunc modum fieri potest.

Agantur à puncto e ad puncta C , F recta eC , eF ; & ab eC quidem auferatur CD equalis axi EK ; & F verò tantundem producat ad G , ut nimirum GF axi EK equalis sit, ducaturque DG , secans CF in B : similiter enim ut ante, recta qua à B ad e perducitur, hyperbolem in e continget.

X x 2

No-

Notandum denique in hac methode cum regula CD , GF sunt parallela nec ullam intersectionem admittunt, qualem diximus: tum rectam IA , qua per centrum A alteri ipsarum CD , GF aquidistans ducitur, esse alteram ex asymptotis, seu qua cum curvis dictarum hyperbolarum propius qui-

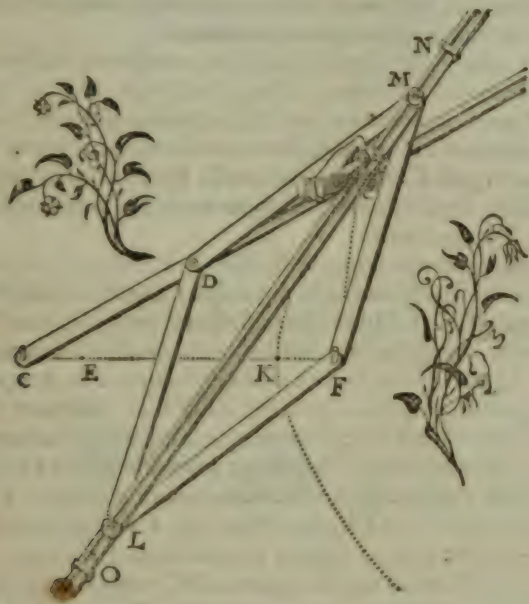


dem semper accedit, nunquam tamen cum ipsis concurrat. Quod itidem de altera asymptoto intelligi debet, postquam punctum C regula CD in F , punctum vero F regula GF in C translatus fuerit.

IDEM ALITER.

Idem quæ supra positis, assumantur præter regulam CD aliæ quatuor æquales DM , MF , FL , & LD , longitudinis cujuslibet majoris quàm KF , (requiritur autem cum hyperbola ex numero sit earum linearum, quæ in infinitum augentur, nec unquam fines suos committat; ut illa minor non existat quàm semissis axis recti: aliàs enim semper non nisi ejus portio quædam describetur); ipsæ quæ cum extremitatibus sibi invicem nectantur in formam rhombi, quadrativè $DMFL$.

DMFL. Ubi autem in D connexæ sunt, annectantur & simul regulæ CD in puncto D; ubi verò in F sibi invicem annectendæ sunt, iisdem locis perforentur, ut paxillo in F defixo injici possint, atque hac ratione simul nexæ habeantur. Porro quandoquidem per L & M regulam aliquam medio suo assidue transire oportet, utrinque indefinite extensam: gemina in eum finem sumatur regula utrinque indefinite extensa, perforenturque prædictæ regulæ in extremitatibus suis



L, M, ita ut paxillis injici queant, ejusdem crassitie ac fissuræ regulæ CD. Conducent autem hosce paxillos subtus fieri ex lamella, superiusque in cochleam extructos esse; ut non solum hac ratione connexioni quatuor dictarum regularum inserviant, verum etiam ut si præter his impositam regulam geminam alia adhuc lamella foramine pertusa illis superimponatur, dictæ regulæ omnes inter lamellas cochleæ contineantur. Quæ quidem ex accurata figurarum contempla-

X x 3

tio-

tione perspicuiora evadunt, quàm ut multis verbis explicentur. Cæterum oportebit annulis duobus quadrangulis O, N regulam L M circumdare, qui arctè eam amplectentes propius aut remotius, ut opus exiget, amoveri valeant: quibus regula gemina ita dictos paxillos continere cogatur, ut velut hiulcata sit ac in longitudinem fissuram præ se ferat latitudinis paris atque regulæ CD. Fiet enim semper, ut, si per medium fissuræ hujus regulæ utrinque indefinitè extensæ recta linea ducatur, ipsa perpetuò transeat per puncta L, M, sicuti requirebatur. Postquam hæc igitur ita fabricata fuerint, designabitur quidem linea hyperbole in hunc modum.

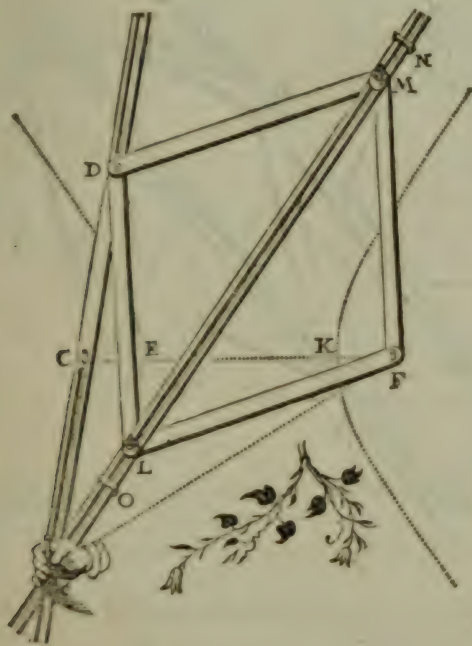
Sumatur stylus aliquis cylindricus acuminatus ejusdem crassitie, quæ utriusque fissurarum, isque in utramque fissuram immittatur, videlicet in e communem intersectionem regularum CD, LM; ipseque deferatur à K versùs e , sicut etiam in alteram partem rectæ CF, rotante regulâ CD circa paxillum C. Prout enim stylus ejusmodi à jam dictis regulis tenetur, describet motu illo in plano quæsitam lineam hyperbolæ K.

Similiter autem si regulæ DM, MF, FL, & LD majores assumptæ fuerint semisse axis recti, regulæque CD ultra C indefinitè extensa: regulæ CD, LM mutuâ intersectione versùs C aliam lineam hyperbolæ huic oppositam, eosdem axes, focosque habentem, describent. Quod quidem in hunc modum demonstratur. Jungatur Fe.

Quoniam itaque triangula DLM, FLM duo latera LD, DM duobus lateribus FL, FM utrumque utrique æqualia habent, basin verò LM communem: ^d habebunt quoque angulum DLM angulo FLM, sub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. Cum igitur triangulorum DLe, FL e duo latera DL, L e duobus lateribus FL, Le utrumque utrique æqualia sint (est enim Le utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum DLe angulo FL e , sub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam ostensum est: ^e habebunt quoque basin De basi eF æqualem, angulumque DeL angulo LeF, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Major itaque est Ce quàm eF, ipsâ CD; est autem CD æqualis axi EK, ex constructione. Liquet ergo ex conversa 5^{ma} Prop^a libri 3ⁱⁱ Conicorum Apollonii, punctum e esse in linea curva, hyperbole dicta; cujus foci sunt puncta C & F; vertex autem punctum K. Quia verò rectæ CD, LM ita in infinitum se mutuò secare possunt, atque eadem semper ratio constat de puncto intersectionis e : manifestum est, ejusmodi motu portio-

tionem lineæ hyperbolæ in plano describi. Sicut faciendum proponebatur. Similis est ratio de alia hyperbola huic opposita, verticem habente in E.

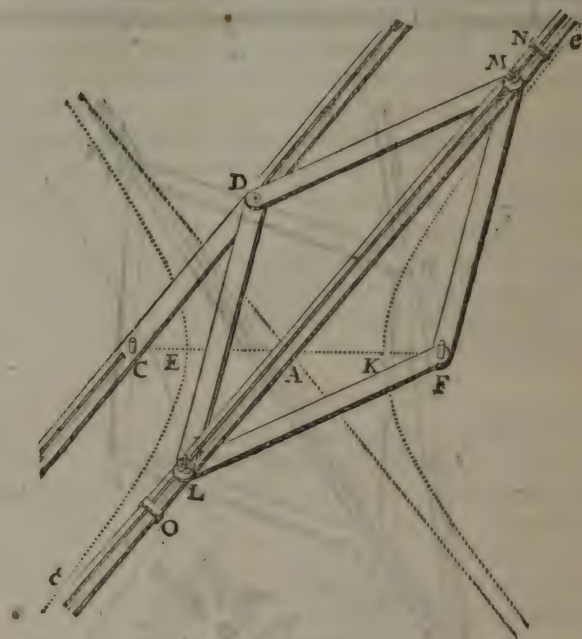
Speciale autem hic modus illud præ se fert advertendum, ut inter describendum regula LM continuò designet lineam rectam, quæ hy-



perbolen in quocunque curvæ puncto contingat. Hoc enim liquet è conversa 48^{va} Prop^{ne} libri 3ⁱⁱⁱ Conicorum Apollonii, propter æqualitatem angulorum C & L, L & F, quam modò demonstravimus.

Notandum denique in hac methodo, cum regulæ CD, LM sunt parallelæ, ac nullam intersectionem admittunt, qualem diximus: regulam LM eo casu alteram ex asymptotis referre, id est, rectam lineam

lineam per medium ejus fissuræ ductam, propius quidem hinc inde
cum curvis dictarum hyperbolarum semper accedere, nunquam ta-



men cum ipsis concurrere. Id quod similiter de altera quoque asymptoto intelligendum est.

A L I T E R.

Quod autem propositum est licebit insuper aliâ ratione cum illustri viro Renato des Cartes in hunc modum exequi. Defixis in C & F duobus paxillis, capiatur filum C e N; illudque altero extremo, paxillo C connecte; altero verò extremo, extremitati N regulæ NF, ipsâ CF longioris; quæ prædictum filum, postquam ita nexum fuerit, longitudine superet, quantitate axis EK. Deinde perfore,

perforetur altera extremitas hujus regulæ, ut paxillo F injici queat, ac circa illum in plano rotari. Fiet enim, ut, immisso stylo eoque delato ab *n* extremo fili ad E, interea dum pars fili *N* velut agglutinata teneretur regulæ *NF*, rotanti circa F, quæ sita lineæ hyperbolæ portio *nE* in plano describatur, hoc est, cujus foci sint *C* & *F*, vertex autem *E*. Translatâ verò regulâ ad alteram partem lineæ *CF*, eodem



modo reliqua hyperbolæ portio *EO* designabitur. Quod si autem regula ex *F* in *C*, & filum ex *C* in *F* transferantur, alia insuper hyperbolæ portio huic opposita describetur, habens eodem focos, & verticem *K*. Quæ quidem, tum per conversâ *51* *man* *Prop* *nem* *3* *ui* *libri* *Conicorum* *Apollonii*, tum quod inter rectas *C* *e*, & *F* eadem semper differentia, quæ inter *C* *e*, & *N* & *F* *e*, & *N* seu *FN* existit, manifesta sunt.

Denique si indefinitè lineam hanc ulteriùs versus *n* & *O* describere lubet, oportebit tantum regulam *FN* longiorem assumere, sicuti etiam filum *C* *N* tantundem augere: extendetur quippe hæc linea eò longiùs, quò major augmentatio hæc fuerit.

CAPUT X.

De modo describendi ellipses in plano, datis latere recto, & transverso.

Quoniam in ellipsi secunda diameter media proportionalis est inter latera figuræ, esto itaque ut in figura capitis tertii pag 314. latus rectum datum *KQ*, transversum verò *KE*; siue sit *KE* diameter ellipsis, *KQ* autem lineæ juxta quam possunt, quæ ordinatim ad diametrum

Y y

metrum KE adplicatur. Detur præterea angulus α , quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque ellipsin in plano describere.

Secundâ igitur bifariam diametro KE in A, inveniatur inter KQ & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ea angulum faciat æqualem dato α : erit ipsa secunda diameter, priori KE conjugata. Quo factô, circa diametros KE, LI ellipsis describatur, quemadmodum capite quinto tradidimus, factumque erit quod quæritur. Ideoque si angulus, quem ordinatæ constituere debent ad diametrum, fuerit rectus; referent rectæ LI, KE axes seu extremas diametros, quo casu ad descriptionem ellipsis caput quartum sequendum erit.

CAPUT XI.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis latere recto, & transverso.

Siquidem & in hyperbolâ secunda diameter media proportionalis sedit inter latera figuræ, sit ergo ut in figura capitis sexti pag. 332. latus rectum datum KQ, transversum verò KE; sive sit KE diameter hyperbolæ, & KQ linea juxta quam possunt, quæ ad diametrum KE ordinatim adplicantur. Detur porrò angulus α , quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque hyperbolen in plano describere.

Divisâ itaque bifariam diametro KE in A, inveniatur inter KQ & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ipsa angulum efficiat æqualem angulo dato α : erit ipsa secunda diameter, priori KE conjugata. Deinde datis diametris KE, LI, describatur hyperbole Kε, quemadmodum capite septimo traditum est, factumque erit, quod imperabatur.

Eodem modo describetur quoque hyperbola Eε priori Kε opposita, ut ex eodem capite est manifestum.

CAPUT XII.

De modo describendi hyperbolas in plano, per datum punctum, circa datas positione asymptotos.

Cæterum cum frequentissimè occurrat hyperbole describenda in plano, circa datas positione asymptotos, quæ transeat per datum

tum punctum : visum quoque fuit modum subindicare, quo illud Organicè expediri possit.

Repetitâ itaque figurâ capitis sexti pag. 332, in eâque datis positione rectis lineis AD , AM , & puncto intra ipsas E , oporteat per E , circa asymptotos AD , AM , hyperbolen in plano describere.

Ducatur ex E alteri ipsarum AD , AM , puta AM , recta æquidistans EB , secans alteram AD in B ; deinde assumptâ BD æquali AB , agatur DE , eâque producatur donec secet AM in M ; junctâ autem EA , producatur hæc ipsa ad K , ut AK sit æqualis AE : & per punctum A ducatur ipsi DM æquidistans ac æqualis IL , quæ à KE bifariam secetur in A . His ita existentibus, si assumptis rectis KE , IL , seu axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis, per E , tanquam verticem, hyperbole describatur, quemadmodum capite 7^{mo} ostensum fuit: factum erit quod imperabatur.

Sed jam tempus est, ut nonnulla quoque de parabola in medium afferamus, & de modis eam Organicè in plano describendi. Præmittimus itaque in demonstrationem eorum quæ sequuntur, sequens

$L \ E \ M \ A \ A.$

SIT parabole, cujus axis quidem AC , vertex verò A , & à quopiam in sectione puncto D applicetur ad AC recta ordinatim DC . Abscindatur autem ex axe ab A vertice linea AB , æqualis quartæ parti lateris recti, jungaturque BD . Dico hanc æqualem fore lineæ EC , quæ tum ex EA lateris recti quartâ parte, tum ex AC componitur.

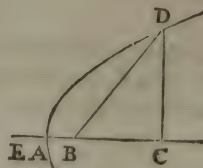
^a Quoniam enim quadrata AC , AB simul sumpta æqualia sunt rectangulo bis sub CA , AB comprehenso, una cum quadrato BC : erit quadratum BC æquale quadratis AC , AB , dempto usdem rectangulo bis sub CA , AB . Cum autem AB ex hypothesi sit quartâ pars lateris recti, ^b erit quoque rectangulum sub CA , AB rectanguli quod bis continetur sub CA & latere recto parabola quartâ pars; hoc est, rectangulum bis sub CA , AB æquale erit semissi rectanguli, comprehensi sub CA & latere recto. Æquale igitur erit quadratum BC

Yy 2

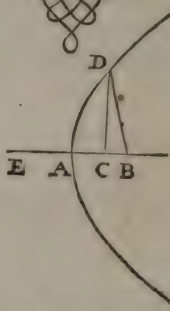
qua-

ep 47 Primi
Elem.

dp 11 Primi
Conicorum
Apollonii.



ep 4 Secun-
di Elem.



quadratis AC, AB , minus semisse
rectanguli sub CA & latere recto.
Quocirca si utrobique commune adda-
tur quadratum CD , erit quadra-
tum BD aequale quadratis AC, AB ,
minus semisse rectanguli sub CA &
latere recto. At cum d quadratum
 CD aequale sit rectangulo sub CA
& latere recto, quadrata AC, AB ,
 CD , multata semisse rectanguli sub
 CA & latere recto, aequivalent
quadratis AC, AB & semissi re-
ctanguli sub CA & latere recto, hoc
est, ei quod bis sub CA, AE contine-
tur. E quibus sequitur quadratum
 BD aequale esse quadratis CA, AB
seu AE , una cum rectangulo sub
 CA, AE bis. Manifestum autem
est, quadrata CA, AE , una cum
rectangulo sub CA, AE bis, simul
aquare quadrato totius EC . Quocir-
ca aequalia erunt quadrata BD, EC ,
unde & recta BD, EC . Quod erat
propositum.

C A P U T XIII.

De modo describendi parabolas in plano, datis
axe, vertice, & latere recto.

IN plano quocunque detur AC axis, vertexque punctum A , sit
autem AB lateris recti quarta pars. Oporteatque in eodem plano
lineam parabolam describere, cujus quidem axis sit recta AC , vertex
punctum A , latus verò rectum linea recta ipsius AB quadrupla.

Producatur AC versus A , donec AE ipsi AB sit æqualis; & ex E
erigatur ad E perpendicularis EG , eaque indefinitè utrinque pro-
tendatur. Deinde assumantur quatuor regulæ æquales BF, FG, GH ,
& HB , longitudinis cujuslibet; ita tamen ut illa non sit minor quàm
 AB .

AB, ipsæque extremitatibus sibi invicem annectantur, sic ut rhombum, quadratumve referant BFGH. Ubi autem in G connexæ sunt, connectantur & simul puncto G normæ GDI, qualis appositâ figurâ exhibetur, hoc est, quæ per medium secundum longitudinem GI pertusa sit longâ canali seu fissurâ, desinente propè G, distantiam circiter rectæ AE, ipsæque versus I indefinitè extensa intelligatur. Ubi verò in B sibi invicem sunt annectendæ, iisdem locis perforentur, ut paxillo in B defixo injici queant, atque hâc ratione connexæ existant.



Porrò cū per F & H regula medio suo affiduè transire requiratur annectatur illa puncto F, ubi regulæ BF, FG sibi mutuò sunt annexæ, quæ in longitudinem sit pertusa quemadmodum norma, hoc est, pari fissurâ; perforenturque regulæ BH, HG in H, sic ut in illas paxillus inferi queat ejusdem crassitudinis atque latitudinis alterutrius fissuræ, constans subius ex lamella, superius verò in cochleam extractus; ita ut hâc ratione regulæ BH, HG in H sint connexæ, & regula FH, intus dictum paxillum comprehendens, medio suo per F & H semper transire cogatur. Ut autem regulæ BH, HG, & FH in paxillum injectæ

Yy 3

sic

fic eodem statu conjunctæ perseverent, ipsis alia lamella foramine pertusâ imponatur, atque matre perstringatur. Denique adhibeantur duo annuli quadranguli I & K, regulam FH normamque GD circumdantes, ut eas arcu circumplectentes ubique eandem fissuræ latitudinem conservent, & qui huc vel illuc divelli quoque possint, prout usus exiget. His ita peractis, linea parabolæ in hunc modum describetur.

Adjunctâ ipsi EG regulâ, assumatur stylus aliquis cylindricus ejusdem crassitiei cum latitudine utriusque fissuræ, isque in utramque fissuram immittatur, ut in D, ubi se secant regula FH & norma GI: dum enim norma deferatur ab E versùs G, & continuo contra dictam regulam premitur, movebitur tota machina, describetque hoc motu stylus D lineam curvam AD, quæ portio erit lineæ parabolæ quæsitæ.

Translato verò G in paxillum B, & B in punctum normæ G, eadem prorsus ratione ab altera parte axis portio AL designabitur.

Denique, si lineam hanc ulteriùs versùs L & D indefinite delineare velimus, assumendæ sunt tantùm quatuor aliæ regulæ longiores BF, FG, GH, & BH. Extendetur namque hæc linea indefinite longius, prout augmentatio dictarum regularum continuo major ac major assumpta fuerit. Nunquam enim integra ipsa describi poterit, cum ea hujus lineæ quoque sit natura, ut, licet semper magis magisque ad eandem partem inclinet, in infinitum tamen protensa extremitates suas nunquam committat.

Demonstrandum itaque restat lineam descriptam parabolam existere. Quod quidem lemmate præmissò manifestum fiet, si jungamus BD, atque demittamus DC perpendiculariter ad AC. Erunt enim triangulorum BFH, HFG duo latera HB, BF duobus lateribus HG, GF utrumque utrique æqualia, basi que FH utrique triangulo communis: ^a quocirca & angulus BFH angulo HFG, sub æqualibus rectis lineis contentus, æqualis erit. Igitur cum duo triangula DBF, DFG duo latera BF, FD duobus lateribus GF, FD utrumque utrique æqualia habeant (est enim FD latus utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum BFD angulo DFG, sub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam est ostensum: ^b habebunt quoque basin BD basi DG æqualem, angulumque BDF angulo FDG, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Quoniam autem CE ipsi DG est æqualis, erunt quoque BD, CE inter se æquales. Patet ergo

^c pun-

a p 8 Primi
Elem.

b p 4 Primi
Elem.

• punctum D esse in curva linea parabolæ dictæ, cujus axis est AC, • *Lemma. antecedens.*
 vertex A, & latus rectum linea recta ipsius AB quadrupla. Cum au-
 tem adducto modo FH, GD se mutuo in infinitum secare possint, &
 eadem semper ratio de puncto intersectionis D constet: sequitur ejus-
 modi motu descriptam curvam LAD, esse lineam parabolâ quæ sitam.
 Præterire autem non oportet, quod hic observatu dignum occur-
 rit, regulam nempe FDK inter describendum medio suo tangere



continuo lineam parabolam in puncto D. Ostensum enim est, an-
 gulos BDF, FDG esse æquales. Quocirca cum ^d angulus FDG an- *dp 15 Primi*
 gulo IDK sit æqualis, quod secundum verticem consistant: erit quo- *Elem.*
 que angulus BDF angulo IDK æqualis, atque ita linea FDK para-
 bolam contingens in D. Ut patet ex 41 Prop^{ne} libri 9ⁿⁱ Perspecti-
 væ Vitellionis.

Cæterum sciendum, B punctum Focum ab Opticis appellari so-
 litum, eò quòd, si speculum concavum ad hanc figuram expositum
 Soli opponatur, radii speculo incidentes axi paralleli, omnes ad hoc
 unicum punctum B reflectantur; atque ita à superficie talium specu-
 lorum ignem in B accendi.

SCHO-

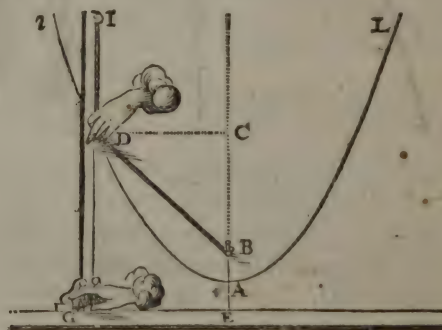
S C H O L I V M.

Liquet porro ex allatis, nullâ operâ rectam lineam duci posse, quæ curvam parabolæ in dato quolibet puncto contingat. Si enim in D , exempli gratiâ, ejusmodi tangens ducenda foret, agatur per D recta DG axi AC parallela, jungaturque BD . Quo facto, si bisariam secetur angulus BDG rectâ DF , continget hæc parabolam in D , ut requiritur.

CAPUT XIV.

*De modo describendi parabolæ in plano, dato
foco, & vertice.*

NON ignorabit quisquam (ut opinor) præcedentem modum, quo datis axe, vertice, & latere recto, parabola in plano designatur, etiam & hic locum obtinere, ubi focus & vertex datus est: cum ad constructionem focus reverâ ibidem esset inveniendus, qui hic jam datur. Quocirca non è re me facturum existimo, si ad quæsitum perficiendum alium insuper modum afferam, qui beneficio sit alicujus filii. Et talis est.



Detur in plano quocunque focus punctum B , vertex autem punctum A . Oporteatque in eodem plano lineam parabolæ describere, ut diximus.

Junctâ

Junctâ AB, ipsâque eatenus ultra A productâ ad E, erigatur ex E ad eam perpendicularis EG. Deinde defixo paxillo in B, capiatur filum IDB; illudquæ cum una extremitate annectæ paxillo B; cum altera verò extremitati I normæ IG, quæ quidem filo sic nexu longitudine sit æqualis. Oportet autem eam ipsâ EB majorem assumi. Ut itaque propositum exsequamur, adjungatur ipsi GE regula utrobique indefinitè extensa; feraturque norma IG contra regulam à G versùs E. Fiet enim, ut, dum norma ita movetur, ac stylus immixtus, qui tenet assidue partem fili ID velut agglutinatam normæ & ab extremo fili ad A deducitur, idem stylus quæsitæ lineæ parabolæ portionem IDA in plano describat: hoc est, cujus focus sit datum punctum B, vertex autem A. Cæterum pari ratione à parte reliquâ portio AL designabitur. Cujus quidem rei demonstratio ex præmisso lemmate perspicua est.

Nam cum æquales sint regula IG & filum IDB; ideo si ab his æqualibus communis auferatur ID: erunt quoque reliquæ GD, DB æquales. Est autem GD ipsi EC æqualis. Erit igitur & DB ipsi EC æqualis, adeoque punctum D in parabola, cujus focus B, & vertex A. Ut ex conversâ lemmatis antecedentis colligere licet,

Quoniam verò circa ostensum modum eadem ubique ratio est puncti D: sequitur ejusmodi motu lineam descriptam IDAL esse parabolam, qualem in plano describere oportebat.

Denique si placuerit hanc lineam ulteriùs extendere versùs I & L, oportet tantùm æqualiter augere normam & filum: quandoquidem illa indefinitè longiùs extenditur, prout hæc augmentatio semper major ac major assumitur.

S C H O L I U M.

Siquidem hætenus ostendimus varios modos Conicæ Sectionis Organicæ in plano describendi: simulque etiam quo pacto in singulis rectæ lineæ duci possint, quæ easdem in datis punctis contingant: ac porro etiam relationem, quam inter se habent superficies ellipsis ac cujuslibet ejus segmenti & superficies circuli ejusque segmenti; ut & eam, quam inter se habent figura contenta sub rectâ lineâ & portione lineæ hyperbolæ cujusunque & alia similiter sub rectâ lineâ & portione lineæ hyperbolæ contenta, cujus latus rectum & transversum sunt æqualia (quæ meo judicio illa sunt, quæ de earum superficie a nobis tantummodo cognosci possunt): Restat ut coronidus loco hic

Zz

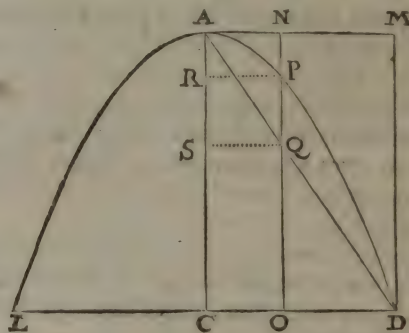
ultra

ultra subjungamus relationem, quam inter se habent figura rectilinea & alia, sub recta linea & portione linea parabola cujuscunque comprehensa. Que quidem sola inter Conicas Sectiones hactenus ad quadrati formam reduci potuit, & ab Archimede primum fuit ostensa. Aliam verò à nobis inventam sic accipe.

Præmittimus autem sequentia Theoremata demonstrata, quoniam iis ad institutum omnino indigebimus.

I.

Si in figura, contenta sub recta linea LD & portione lineæ parabolæ LAD, diameter sit AC, & basis LCD ipsi AC ordinatim adplicata, jungaturque AD; compleatur



autem parallelogrammum CM, in quoductâ NO ipsi AC vel DM utcunque parallelâ, occurrente ipsis AM, CD in N & O, atque secante AD in Q, lineam verò parabolæ in P: dico esse ON ad QN, sicut QN ad NP.

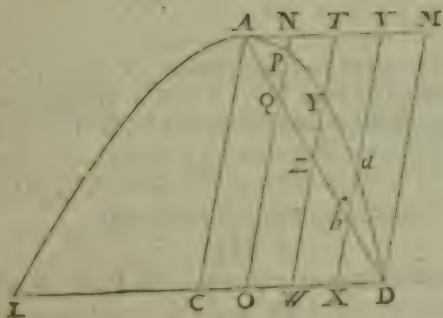
Hoc enim perspicuum est, cum AC sit ad AS, ut CD ad SQ seu RP; AC autem ad AR, ut quadratum CD ad quadratum RP, per 20^{am} Prop^{riam} libri 1^{mi} Conicorum Apollonii. Vnde liquet AC, AS, & AR esse proportionales, & esse quidem AC seu NO ad AS sive NQ, ut AS sive NQ ad AR seu NP. Ut proponebatur.

II. Iif

II.

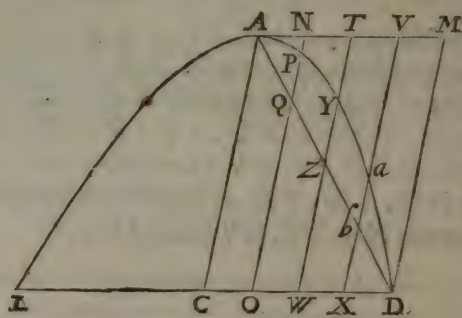
Iisdem positis, si dividatur AM in partes quocunque æquales, atque ex punctis divisionum $N, T, \& V$ ad latus oppositum CD rectæ ducantur $NO, TW, \& VX$ parallelæ ipsi AC vel DM , quæ rectam AD secant in $Q, Z, \& b$, lineam verò parabolæ in $P, Y, \& a$: Dico $NO, TW, VX, \& MD$ simul sumptas esse ad $NP, TY, Va, \& MD$ simul sumptas, ut quadrata ipsarum $NO, TW, VX, \& MD$ simul sumpta ad quadrata linearum $NQ, TZ, Vb, \& MD$ simul sumpta: itemque $NO, TW, VX, \& MD$ simul sumptas esse ad $NP, TY, \& Va$ simul sumptas, ut quadrata ipsarum $NO, TW, VX, \& MD$ simul sumpta ad quadrata linearum $NQ, TZ, \& Vb$ simul sumpta.

Est enim ex antecedenti Theoremate ON ad NQ , ut NQ ad NP . Quocirca erit quoque, ut quadratum ON ad quadratum NQ , ita ON ad NP . Eodem modo cum sit WT ad TZ , ut TZ ad TY : erit etiam quadratum WT ad quadratum TZ , ut WT ad TY . Itemque quia XV est ad



Vb , sicut Vb ad Va : erit similiter quadratum XV ad quadratum Vb , ut XV ad Va . Omnia igitur quadrata ON, WT, XV erunt ad omnia quadrata NQ, TZ, Vb , ut omnes lineæ ON, WT, XV ad omnes lineas NQ, TZ, Vb .

NP, TY, V a. Denique cum & DM ad MD sit, ut DM ad MD; erit
 itidem quadratum DM ad quadratum MD, ut DM ad MD. Vnde omnia
 quadrata ON, WT, XV, & DM erunt ad omnia quadrata NQ, TZ,
 Vb, & MD, sicut omnes lineæ ON, WT, XV, & DM ad omnes lineas
 NP, TY, V a, & MD. Quod primò erat propositum.



Tam verò cum ostensum sit quadrata simul ON, WT, & XV esse ad
 quadrata simul NQ, TZ, & Vb, ut lineæ simul ON, WT, & XV ad
 lineas simul NP, TY, & V a; & tres lineæ ON, TW, & XV sibi invi-
 cem sint æquales: erit, sumptis antecedentium subtriplicis, ut quadratum
 unius harum linearum ad quadrata linearum NQ, TZ, & Vb, ita una
 earundem linearum ad lineas NP, TY, & V a. Et sumptis antecedentium
 quadruplis, ut quadrata quatuor linearum ON, WT, XV, & DM (est
 enim & DM unicuique reliquarum trium equalis) ad quadrata linearum
 NQ, TZ, & Vb, ita quatuor lineæ ON, WT, XV, & DM ad lineas
 NP, TY, & V a. Quod secundo erat propositum.

III.

Isdem positis: agantur per puncta P, Y, & a lineæ pa-
 rallelæ ipsi AM vel LD, quæ secent lineas his punctis
 utrinque proximas in c, d, e, f, g, & h. Dico parallelo-
 grammum CM esse quidem parallelogrammis c N, e T,
 g V, & XM minus quàm triplum, parallelogrammis verò
 PT, YV, & a M majus quàm triplum.

CMM

Cum enim linea MD, Vb, TZ, & NQ se invicem aqualiter excedant, excessus verò sit aqualis minime NQ, & alia totidem existant MD, VX, TW, & NO, quæ magnitudine maxima MD sint æquales: erunt, per 10. Prop. tractatus Archimedi de Lineis Spiralibus, quadrata MD, VX, TW, & NO harum aqualium linearum una cum quadrato maxime MD ac simul rectangulo, comprehenso sub minima NQ & linea aquali inæqualibus simul sumptis, tripla quadratorum earundem inæqualium linearum MD, Vb, TZ, & NQ. Vnde sequitur quadrata linearum MD, VX, TW, & NO minora esse quàm tripla quadratorum à lineis MD, Vb, TZ, & NQ. Quia autem ex proximo antecedenti Theoremate constat, quadrata MD, VX, TW, & NO ad quadrata MD, Vb, TZ, & NQ eam habere rationem, quàm habent lineæ MD, VX, TW, & NO ad lineas MD, Va, TY, & NP: sequitur item lineas MD, VX, TW, & NO linearum MD, Va, TY, & NP minores esse quàm triplas. Manifestum autem est, lineas MD, VX, TW, & NO ad lineas MD, Va, TY, & NP eandem habere rationem, quàm parallelogramma XM, WV, OT, CN, hoc est, quàm parallelogrammum CM, ad parallelogramma XM, gV, eT, & eN. Quare constat parallelogrammum CM minus esse quàm triplum parallelogrammorum XM, gV, eT, & eN.

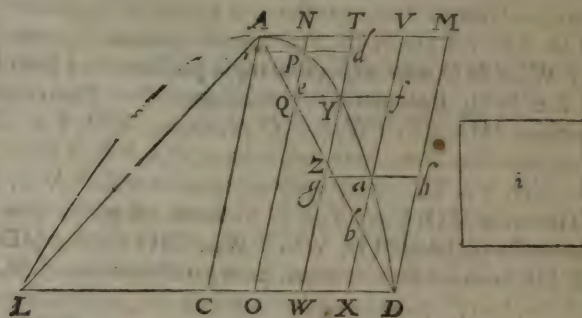
Dico verò idem parallelogrammum parallelogrammorum aM, YV, & PT majus esse triplum.

Quoniam enim ex demonstratione citatæ Propositionis Archimedi perspicuum quoque est, quadrata linearum MD, VX, TW, & NO simul sumpta majora esse triplum quadratorum à lineis Vb, TZ, & NQ, simul sumptorum; & per proximum præcedens Theorema, quadrata linearum MD, VX, TW, & NO sint ad quadrata linearum Vb, TZ, & NQ, sicut lineæ MD, VX, TW, & NO ad lineas Va, TY, & NP: sequitur quoque lineas MD, VX, TW, & NO lineæ Va, TY, & NP majores esse quàm triplas. Est autem manifestum, lineas MD, VX, TW, & NO ad lineas Va, TY, & NP eandem habere rationem, quàm parallelogramma XM, WV, OT, CN, hoc est, quàm parallelogrammum CM, ad parallelogramma aM, YV, PT. Constat itaque parallelogrammum CM parallelogrammorum aM, YV, & PT majus esse quàm triplum. Quare constat propositum.

IV.

Iisdem positis: sit spatium τ parallelogrammi CM tertia pars. Dico jam spatium, comprehensum à rectis AM, MD, & portione lineæ parabolæ AD, spatio τ æquale esse.

Si enim spatium illud spatium i non fuerit aequale, erit majus ed aut minus. Estoque primum majus, si fieri possit, & excessus, quo spatium hoc superat spatium i , sibi ipsi toties aggregetur, donec compositum ex ipso excedat tandem parallelogrammum CM . Potest itaque & summi spatium quoddam mi-



nus illo excessu, quod sit pars parallelogrammi CM . Sit ergo CN parallelogrammum dicto excessu minus, & pars parallelogrammi CM . Erit quoque inde linea AN pars lineae AM . Dividatur itaque AM in partes ipsi AN aequales, & reliqua fiant ut in superioribus dictum est.

Igitur cum parallelogrammum CN sit minus excessu, quo spatium APY a DM superat spatium i : sequitur spatium i & parallelogrammum CN simul sumpta spatium APY a DM esse minora: ac proinde minora quam parallelogramma eN , eT , gV , & XM , quae ipso spatium APY a DM sunt majora. Parallelogrammo autem CN aequalia sunt parallelogramma eN , eT , gV , & XM , per quae parabola incedit. Quare si utrobique demantur parallelogramma eN , eT , gV , & XM : relinquetur quoque spatium i minus parallelogrammis reliquis PT , YV , & aM . Cumque parallelogrammum CM spatium i sit triplum, erit parallelogrammum CM minus quam triplum parallelogrammorum PT , YV , & aM . At hoc est impossibile, ostensum enim est ipsis majus quam triplum existere. Non erit igitur spatium APY a DM majus spatium i .

Dico item neque minus esse posse.

Sit enim minus, si fieri potest. Rursusque excessus quo spatium i superat APY .

APY a DM sibi ipsi toties addatur, donec superet tandem parallelogrammum CM. Potest itaque sumi spatium aliquod, quod sit minus illo excessu, quodque sit pars pari allelogrammi CM, reliquis ut prius dispositis.

Quoniam igitur parallelogrammum CN minus est excessu, quo spatium δ superat spatium APY a DM: erunt spatium APY a DM & parallelogrammum CN simul sumpta minora spatio i. Est autem ipsum i spatium minus parallelogrammi e N, e T, g V, & XM. Parallelogrammum enim CM spatii i est triplum, minus autem quàm triplum parallelogrammorum predictorum, uti ostensum est. Igitur spatium APY a DM & parallelogrammum CN simul sunt minora parallelogrammi e N, e T, g V, & XM. Quocirca spatium APY a DM utriusque ablato: erit quoque reliquum parallelogrammum CN reliquis spatiis AcP, PeY, Yga, & aYD minus. Quod fieri non potest. Patet enim parallelogrammum CN parallelogrammi e N, e d, gf, & Xb esse aequale, quæ simul dictis spatiis sunt maiora. Non erit igitur quoque spatium APY a DM spatii i minus. Ostensum autem est, & neque eo majus esse posse. Spatium itaque APY a DM spatii i necessario erit aequale. Quod erat propositum.

V.

Hoc autem demonstrato, manifestum est spatium quodcunque, comprehensum sub recta linea & portione lineæ parabolæ, esse sesquiterterium trianguli, eandem basin & altitudinem cum ipso spatio habentis.

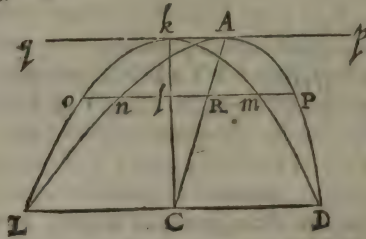
Perspicuum enim hoc est, si ducamus rectam LA.

Patet namque triangulum LAD parallelogrammo CM aequale esse. Ideoque qualiam partium triangulum LAD continet tres, talium spatium APY a D Merit una, & spatium APY a DC duæ, spatium verò LAPY a D quatuor. Sesquiterterium itaque existit spatium LAPY a D (comprehensum sub recta linea LD & portione lineæ parabola LAPY a D) trianguli LAD, eandem cum ipso basin, eandemque altitudinem habentis. Quod ostendere propositum erat.

Denique licet hæc ubique vera sint ac locum habeant tam in huiusmodi figuris scalenis quam in rectis; attamen quia similiter Quadrationem hanc concludere de ceteris atque in ellipsi & hyperbola factum fuit: placuit hic porro subicere, quibus figuris rectis, sub recta linea & portione lineæ parabolæ comprehensis, æquenter huiusmodi figura scalena, sub recta partiet linea & portione lineæ parabolæ comprehensa.

Sic

Sit itaque talis figura scalena LAD , contenta sub recta linea LD & portione lineae parabola LAD , cujus diameter sit CA , latus verò rectum Ap : & ex A ducatur Ak parallela LD ; tum verò ex C ad LD erigatur perpendicularis Ck , secans Ak in k ; atque circa puncta L, k, D linea parabola in plano describatur. Dico figuram scalenam LAD figura recta LkD esse aequalem.



Vt autem per puncta LkD in plano portio lineae parabola describatur, adplicetur quadratum recta LC vel CD ad longitudinem kC , sit quae latitudo ortiva recta kq ; sive quod idem est, inveniatur ipsi kC, CD tertia proportionalis kq . Referet enim ea juxta II. Prop. libri I^{mi} Conicorum Apol-

lonii latus rectum parabola, cujus axis est kC , vertex k , & ordinatim adplicata CD . Vnde porro facile est, per caput ultimum hujus tractatus, ejusmodi lineae portionem describere.

Ducatur jam ipsi LD recta utcumque aequidistans PR lo; secans quidem parabolam LAD in P & n , ac diametrum ejus CA in R ; parabolam verò LkD in m & o , ac axem ejus Ck in l .

His ita constitutis, dico rectas nP, om inter se aequales esse.

a p 11 Primi Quoniam enim ob rectam CD , in utraque figura ordinatam; in parabola quidem LAD ^a rectangulum sub CA & latere recto Ap quadrato ipsius CD est aequale; in parabola verò LkD ^b rectangulum sub Ck & latere recto kq eidem etiam quadrato CD est aequale: sequitur rectangulum sub CA, Ap rectangulo sub Ck, kq esse aequale. ^c Vnde erit ut CA ad Ck , ita kq ad Ap . Vt autem CA ad Ck , ^d ita quoque est (ob parallelas RL, Ak) recta CR ad Cl , ^e & reliqua RA ad reliquam lk . ^f Erit itaque ut RA ad lk , ita kq ad Ap . ^g Aequale igitur est rectangulum RAp rectangulo lkq . Est autem in parabola LAD ^h rectangulum RAp aequale quadrato Rp ; in parabola verò LkD rectangulum lkq aequale quadrato lm . Aequalia ergo quoque erunt quadrata RP, lm , ac proinde & ipsa recta RP, lm , unde & earum dupla nP, om . ⁱ Eadem est ratio de omnibus aliis rectis, quae ordinatim in infinitum ad diametros CA, Ck in utraque figura adplicantur.

h p 11 Primi Quia itaque ejusmodi aequalitas in infinitum apparet in utraque figura, relinquitur ipsas inter se aequales esse. Quod ostendere propositum erat.

Conicorum **Apollonii.**

F I N I S.

FRAN-

369
FRANCISCI à SCHOOTEN

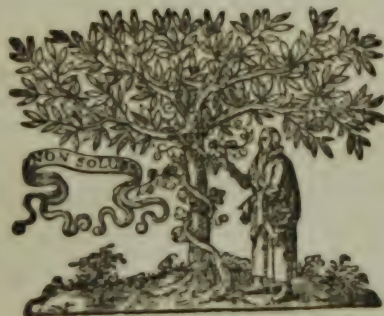
LEYDENSI

In Academia Lugduno-Batava Mathematicos Professoris,

EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM,
LIBER V.

CONTINENS

Sectiones triginta miscellaneas.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiae Typographi.
MDCLXX.



Clarissimo, Consultissimoque

V I R O,

D^{no} IOHANNI WALBEECK,

JC^{to} eximio, atque in curia Hollandiæ
causarum patrono disertissimo.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

S. D.



UM singulari benevolentia atque humanitate, Vir Doctissime, semper me exceperis ac prosequutus sis, & amicitiam, quæ mihi à teneris tecum intercessit, plurimis beneficiorum argumentis sæpius obsignare studueris: nil magis mihi in votis fuit, quàm ut iisdem publicâ grati animi testificatione responderem. Permitte igitur, quæso, ut tractatum hunc, qui elegantiorum ac selectiorum quarundam propositionum quasi spicilegium est, tuo nomini inscribam, atq; in perpetuæ amicitie tesseram tibi offeram dedicemque. Quem utique non ingratum tibi fore confido, gnarus scilicet, quo loco apud te sint Mathematicæ scientiæ; qui illas etiamnum haud minori voluptate recolere, quàm antehac summa cum alacritate

A a a 2

tra-

tractare consuevisti, variaque earum munera non exigua cum laude obiisti. Etenim nosti, Vir Consultissime, quantum ipsæ ad ingenii cultum faciant, & quantopere mentes, nimium luxuriantes, frænent, ne quid fucatum aut præter rei veritatem admittant; adeo ut ultra earum dignitatem, quam maximâ cum utilitate conjunctam habent, etiam plurimum subsidii conferant ad reliqua studia facilius capessenda, quæ uberiorem quæstum ampliusque honorum titulos pollicentur, ideoque à vulgo magis probantur. Unde fit, ut minimè dubitem, quin ingenii tui acumen & singularem prudentiam, quam in te suspicio, ac in rerum causis discutiendis omnes quotidie in foro experiuntur, non minùs tibi ex harum artium cultura, quàm ex exteris tuis studiis ritè pertractatis, comparaveris. Hinc, quotiescunque te causas magno cum applausu perorantem audiui, toties quoque non infeliciter te juris peritiam cum accurata Mathematicum cognitione conjunxisse judicavi; unde & tuam in dicendo dexteritatem, & eruditionem in justa legum interpretatione sæpissimè sum admiratus. Neque me seducit hîc singularis meus erga te amor: testes enim mihi sunt complures civitates, quæ mentis tuæ præstantiâ allectæ, limatissimumque tuum judicium sæpiùs expertæ, causarum suarum patronum te disertissimum simulac eruditissimum jure merito elegere. Quamobrem si exactissimo tuo calculo probari hæc intelligam, nullibi melius operam hanc meam collocari potuisse arbitrabor. Accipe igitur, Vir Amicissime, exercitationes hæc, quas tanquam *προμνημον* præcedentibus addo, & nunc sub nominis tui auspiciis in lucem edo. Quòd, si verò eo animo, quo à me offeruntur, eas exceperis, laboris suscepti præmium sat amplum reportasse me existimabo. Vale, ac me amare perge.

SE-

SECTIONES MISCELLANÆ.

SECTIO I.

*Ratio inveniendi electiones omnes, quæ fieri possunt,
datâ multitudine rerum.*



Ratio inveniendi electiones omnes, quæ circa propositam rerum multitudinem fieri possunt, haud multum aliena est à modo inveniendi dati cuiusque numeri aut quantitatis partes omnes aliquotas & divisores, quem alibi exposuimus.

Etenim si, verbî gratiâ, quatuor fuerint res diversæ, designatæ per $a, b, c,$ & d , ut inveniatur electiones omnes, quæ fieri possunt, prout ipsæ aliter atque aliter sumuntur, multiplico a per b , & fit ab . Tum $a, b,$ & ab per c , fiuntq; $ac, bc,$ & abc . Ac deinde $a, b, ab, c, ac, bc,$ & abc per d , fiuntque $ad, bd, abd, cd, acd, bcd,$ & $abcd$. Omnino ut hicinfra videre licet.

Et invenitur electio, si summa omnium sub ipsa comprehendatur, fieri posse 15 modis diversis,

Utpote, sumendo, 1^{mo}. a

a
—
$b. ab$
—
$c. ac. bc. abc$
—
$d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.$

2. b
3. a & b simul
4. c
5. a & c simul
6. b & c simul
7. $a, b,$ & c simul.
8. d
9. a & d simul
10. b & d simul
11. $a, b,$ & d simul
12. c & d simul
13. $a, c,$ & d simul
14. $b, c,$ & d simul
15. $a, b, c,$ & d omnes simul.

Hinc si per a designetur unum malum, per b unum primum, per c unum prunum, & per d unum cerasum, & ipsa aliter atque aliter, ut supra, elegantur, electio eorum fieri poterit 15 diversis modis, ut sequitur.

Aaa 3

Ni-

Nimirum, sumendo 1^{mo}. malum

2. pirum.
3. malum, & pirum
4. prunum
5. malum, & prunum
6. pirum, & prunum
7. malum, pirum, & prunum
8. cerasum
9. malum, & cerasum
10. pirum, & cerasum
11. malum, pirum, & cerasum
12. prunum, & cerasum
13. malum, prunum, & cerasum
14. pirum, prunum, & cerasum
15. malum, pirum, prunum, & cerasum.

Ubi porrò notandum, quòd, cum supra inventarum electionum sequens regula duplo semper plures electiones contineat quàm proximè præcedens, ad solam earum summam inveniendam, sufficiat addere quatuor terminos proportionales 1, 2, 4, & 8: erit enim 15, eorum summa, numerus electionum quæsitus.

Sic si 5 fuerint res diversæ, utputa: *a, b, c, d, & e*, quæraturnque quot modis diversis earundem electio fieri possit, addendi tantum sunt 5 proportionales 1, 2, 4, 8, & 16: eritque summa 31, quæsitæ electionum summa. Quæ quidem, ut supra, inventæ, sic exhibentur.

*a.**b. ab.**c. ac. bc. abc.**d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.**e. ae. be. abe. ce. ace. bce. abce. de. ade. bde. abde. cde. acde. bcde. abcde.*

Præterea advertendum hîc est, rebus omnibus diversis existentibus, in unaquaque sequentium regularum semper unam ampliùs inveniri electionem quàm in antecedentibus omnibus regulis simul. Sic *b* & *ab* unâ plures sunt numero quàm *a*. Et *c, ac, bc, & abc* unâ plures quàm *a, b, & ab* simul. Itemque *d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, & abcd* unâ plures quàm *a, b, ab, c, ac, bc, & abc*. Atque ita ulterius.

Id quod ostendit, in Progressione Geometrica rationis duplæ ab uni-

unitate, terminos omnes antecedentes simul additos semper esse unitate minores termino subsequente. Adeoque si ultimo termino addatur duntaxat numerus, qui eo unitate minor sit, habebitur summa omnium terminorum. Quam etiam obtinere licet, ponendo binarium toties, quot sunt termini seu res diversæ, atque à numero continuè ab eo facto auferendo unitatem.

Ex quibus denique inferre ac notare licet, rerum diversarum multitudine deinceps unitate excrecente, differentias, quibus electionum numeri consequenter se mutuò excipiunt, numeros semper esse progressionis duplæ ab unitate: Itemque sequentium electionum numerum semper unitate maiorem esse duplo proximè præcedentis. Sicut hic infra apparet.

Res datæ. Multitudo
electionum

a .	1	2	Differentiæ electionum.
ab .	3	4	
abc .	7	8	
abcd .	15	16	
abcde .	31	32	
abcdef .	63	64	
abcdefg .	127	128	
abcdefgh .	255	256	
abcdefghi .	511	512	
abcdefghik .	1023		

Et sic in infinitum.

Cum autem hæc, quæ de electionibus earumque numero dicta sunt, ad partes quoque aliquotas & divisores dati numeri aut quantitatis referri possint, (quoniam ratio illas investigandi à modo inveniendi electiones, ut supra monuimus, parùm differt): Idcirco, ad id ostendendum, propositum sit quantitatis $abcd$, productæ multiplicatione ipsarum a, b, c , & d , invenire partes omnes aliquotas & divisores.

Hinc inventis, ut supra, harum a, b, c, d electionibus omnibus, videlicet $a, b, ab, c, ac, bc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd$, & $abcd$, si in locum ultimæ $abcd$, quæ semper est data seu tota quantitas, non autem ejus pars aliquota, assumatur unitas, referent $a, b, ab, c, ac, bc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd$, & 1 partes omnes aliquotas ipsius $abcd$. Adeò ut semper tot sint partes, quot electiones. Quantum verò ad divisores, cum unaquæque quantitas se ipsam quoque per unitatem divi-

dat: manifestum est divisorum numerum unitate semper excedere electionum sive partium multitudinem, ita ut ipsius *abcd* divisores sint 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*.

Quocirca si solummodò partium vel divisorum numerum invenire animus sit, illas autem ipsas exhibere supervacaneum fuerit, oportet tantum terminos progressionis 1. 2. 4. 8, ut supra, addere, & fit summa 15. Hæc enim cum tam electionum quam partium multitudinem designet, designabit 16 divisorum numerum.

Idem de numeris est intelligendum. Ut ad inveniendam tam divisorum quam partium multitudinem numeri 210, quoniam 210 provenit multiplicatione quatuor primorum numerorum 2, 3, 5, & 7; sive 210 dividendo per 2, ac tum qui fit per 3, ac quotiens rursus per 5, ac denuo hic ultimus per 7, sic pervenitur ad unitatem: manifestum est, si quatuor hi numeri tanquam res diversæ accipiantur, multitudinem electionum, quæ ab ipsis semper aliter atque aliter fieri possunt, fore 15. Ac proinde 210 habere 15 partes aliquotas, & 16 divisores, quos ex adjuncta operatione facile colliges.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 3 \cdot 6 \\
 \hline
 5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30 \\
 \hline
 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42 \cdot 35 \cdot 70 \cdot 105 \cdot 210.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{I} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 228 | 188 | 58 | 7 | 1 \\
 2 | 3 | 8 | 7 |
 \end{array}
 \end{array}$$

Atque ita de aliis.

Porrò cum in omnibus hisce electionibus rerum, illæ quæ per *a*, *b*, *c*, *d*, & *c*. designantur, continuò semel tantum ita simplices occurrant, reliquæ autem electiones ex iis semper sint compositæ: patet, si à numero electionum auferatur numerus rerum, reliquum indicare quot modis ipsæ aliter atque aliter possint conjungi.

Sic *a*, *b*, *c*, & *d* modis omnibus, quos excogitare licet, conjunguntur 11^{cies}, hoc est, 11 modis differentibus. Sic & ipsarum *a*, *b*, *c*, *d*, & *e* numerus conjunctionum, omnifariam sumptarum, erit 26. Haud fecus invenietur 7 Planetas conjungi posse 120 modis diversis. Et sic de aliis.

Jam verò sicut ex *a*, *b*, *c*, & *d*, cum ipsæ designant quatuor res diversas, inferuntur 15 electiones variæ, ita si eandem rem designent, hoc est, *a*, *b*, *c*, & *d* omnes inter se æquales sive ejusdem valoris intelligantur

ligantur, poterunt tantum ex iis quatuor colligi electiones. Si enim tunc, ut convenit, eodem nomine insigniantur, hoc est, per $a, a, a,$ & a designentur: electiones erunt $a, aa, aaa,$ & $aaaa$.

Unde liquet si ipse $aaaa$ seu a^4 partes aliquotae inveniendae sint, atque eum in finem loco ultimae electionis $aaaa$ sumatur unitas: erunt ipsius a^4 partes aliquotae $a, aa, a^3,$ & 1 ; & divisores $1, a, aa, a^3,$ & a^4 .

Sic & si quinque fuerint res aequales, singulae per a designatae, reperientur quoque 5 earundem electiones, quae sunt $a, aa, aaa, aaaa,$ & $aaaaa$. Ita ut inde concludere liceat quantitatem a^5 , propter quinque ejus dimensiones, quinque similiter habere partes aliquotas, quae sunt $a, aa, a^3, a^4,$ & 1 ; & 6 divisores, nimirum, $1, a, aa, a^3, a^4,$ & a^5 . Idem de similibus aliis intellige.

Ceterum data multitudine rerum, quarum aliqua tantum inter se aequales sint, ut si, verbi gratia, ipsae sint quatuor numero, quarum duae sibi invicem aequales existant, earumque designentur per $a, a, b,$ & c : ad inveniendas omnifarias illarum electiones, multiplico, ut supra, a per a , & fit aa . Tum a & aa per b , fiuntque ab & aab . Ac deinde $a, aa, b, ab,$ & aab per c , fiuntque $ac, aac, bc, abc,$ & $aabc$. Et manifestum est, quae sitam electionum multitudinem, comprehendendo sub ea semper omnium summam, fore 11. Ac proinde, si a supponatur designare gallinam, b perdicem, & c anserem: electiones fieri poterunt, ut sequitur.

Videlicet, sumendo 1 ^{mo} .	1 gallinam
2.	2 gallinas
3.	1 perdicem
4.	1 gallinam & 1 perdicem
5.	2 gallinas & 1 perdicem
6.	1 anserem
7.	1 gallinam & 1 anserem
8.	2 gallinas & 1 anserem
9.	1 perdicem & 1 anserem
10.	1 gallinam, 1 perdicem, & 1 anserem
11.	2 gallinas, 1 perdicem, & 1 anserem.
	B b b Ubi,

Ubi, ut supra, liquet, post duas ipsius *aa* electiones, propter *b* ab iis diversam, in sequenti regula unam amplius inveniri electionem, utputa tres *b*, *ab*, & *aab*. Ac deinde in hanc rursus sequenti, propter *c* à præcedentibus iterum diversam, unam amplius quàm duarum simul præcedentium, videlicet sex *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Ita ut in toto sint 11 electiones, addendo nempe numeros 2, 3, & 6. Quod idem in aliis similibus electionibus colligendis observare licebit.

Idem de partibus aliquotis est intelligendum. Si enim quantitatis a^2bc partes aliquotæ quærantur, & in locum *aabc* sumatur tantum unitas: erunt & ipsius *aabc* undecim partes: nimirum *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & 1; & 12 divisores, qui sunt 1, *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*.

Similiter si fuerint quinque res, designatæ per *a*, *a*, *a*, *b*, & *b*, ut inveniantur electiones omnes, juxta quas aliter atque aliter sunt fumendæ, multiplico, ut ante, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *aa* rursus per *a*, fit *aaa*. Deinde *a*, *aa*, & *aaa* per *b*, fiuntque *ab*, *aab*, & *aaab*. Ac denique *b*, *ab*, *aab*, & *aaab* per *b*, fiuntque *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Omni- no ut hîc infra conspiciere licet. Eruntque electiones quæsitæ *a*, *aa*, *aaa*, *b*, *ab*, *aab*, *aaab*, *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*.

$$\begin{array}{r}
 a \\
 \hline
 a. aa \\
 \hline
 a. aaa \\
 \hline
 b. ab. aab. aaab. \\
 \hline
 b. bb. abb. aabb. aaabb.
 \end{array}$$

Ubi rursus post 3 ipsius *aaa* electiones in sequenti regula, propter *b* ab iis diversam, reperiuntur quatuor *b*, *ab*, *aab*, & *aaab*, hoc est, una amplius quàm trium ipsius *aaa*, sive trium præcedentium regularum; at verò propter *b* cum præcedenti eandem idem quoque electionum numerus qui hujus præcedentis, nimirum quatuor *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Adcò ut antecedens cujusque regulæ litera, quæ ab antecedenti proximè præcedentis non differt, eundem quoque semper electionum atque illius regulæ numerum inferat; at verò cum ab illa diversa est, tum unâ semper plures electiones suppeditet, quàm antecedentium simul regularum. Id quod in genere tam ad electionum quàm

quàm partium aliquotarum & divisorum numerum inveniendum compendiosissimum est remedium. Sive enim ipsarum a, a, a, b, b & b electionum numerum, sive quantitatis a, b^2 , ex iis compositæ, partium aliquotarum & divisorum multitudinem invenire velimus: oportebit tantum, propter 3 ipsius a dimensiones sive a ter positam, notare 3 electiones aut partes; ac deinde propter b bis positam, (quæ semel posita unam præcedentibus tribus superaddit quatuor-que tradit) notare 8 electiones aut partes. ita ut in toto sint 11 electiones aut partes; at verò 12 divisores.

Sic & si 6 res designatæ fuerint per a, a, a, b, b, c , & numerus electionum, quæ ab ipsis fieri possunt, sit investigandus; sive etiam quantitas $a^3 b^2 c$ data sit, cujus tam partium quàm divisorum multitudo quærat: noto, propter a^3 seu a ter positam, 3 electiones aut partes. Deinde propter b^2 seu b bis positam (quæ semel posita unam præcedentibus tribus super addit & quatuor tradit) noto 8 electiones aut partes. Ac denique propter c , quæ unam rursus præcedentibus 3 & 8 simul super addit, noto 12 electiones aut partes. Unde colligendo in unam summam 3, 8, & 12, quæsitus electionum aut partium numerus fit 23, & divisorum 24.

Haud secus si data fuerint $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$, & d , aut quantitas $a^4 b^3 c^2 d$, ex iisdem composita, ad inveniendum tam electionum illarum quàm hujus partium numerum, noto propter a^4 seu a quinquies positam, 5 electiones aut partes. Deinde propter b^3 seu b quater positam (quæ semel posita unam præcedentibus 5 super addit & 6 tradit) noto 24 electiones aut partes. Porro propter c^2 seu c ter positam (quæ semel posita unam rursus præcedentibus 5 & 24 simul super addit & 30 tradit) noto 90 electiones aut partes. Ac denique propter d seu d bis positam (quæ semel posita rursus unam præcedentibus 5, 24, & 90 simul super addit & 120 tradit) noto 240 electiones aut partes. Unde addendo simul 5, 24, 90, & 240, concludo 359 quæsitam esse electionum aut partium multitudinem; at verò divisorum numerum esse 360.

Simili modo invenire licet dati numeri partium & divisorum multitudinem. Ut ad inveniendum quot partes & divisores habeat 15876000:

$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$
$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$
2	2	2	2	2	3	3

$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$
$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \\ \text{I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \text{ I} \end{array}$
3	3	3	5	5	7	7

Quæro primùm ex quibus primis numeris 15876000 producat, dividendo eum in finem 15876000 per primos numeros 2, 3, 5, &c. donec perveniatur ad unitatem. Perinde ut hîc supra factum vides. Hinc cum reperiam ipsum multiplicatione produci 14 primorum numerorum 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. 3. 5. 5. 5. 7. 7, eundemque notari posse, hoc modo: $2^5, 3^4, 5^3, 7^2$, ita ut cum $a^5 b^4 c^3 d^2$ præcedentis exempli omnino consentiat sive utriusque eadem ratio sit, patet, ipsius pariter fore 359 partes aliquotas, & 360 divisores. Atque ita de aliis.

SECTIO II.

Ratio inveniendi multitudinem rerum, earumque inter se habitudinem, quæ datis vicibus eligi possunt.

AD inveniendam multitudinem rerum, earumque inter se habitudinem, quæ datis vicibus eligi possunt, sciendum est, illam non semper omnino determinatam esse sed sæpe numero variam inveniri, prout datæ vices sese obtulerint. Quibus autem casibus id contingat, ac quo pacto illa investiganda sit, sequentia exempla edocebunt.

1^{um} Ex-emplum. Etenim ad inveniendum, quot res sumendæ sint, ac quænam inter eas habitudo existat, quæ 15 diversis modis eligi possint: addo ad 15 unitatem seu 1, & fit 16. Hic igitur numerus si reperiatur aliquis eorum, qui ab unitate in ratione dupla ascendunt, hoc est, ut ipse continuò per 2 dividi possit, donec ad unitatem perveniatur: indicabit divisionum numerus, seu is qui ostendit quotus post unitatem hic 16 ejusdem Progressionis terminus obtingat, quot res diversæ accipi debeant, quæ 15 modis aliter atque aliter eligi possint. Ac proinde cum 16 dictæ progressionis quartus terminus existat sive quatuor ejus-

eiusmodi divisiones fieri queant: idcirco & quatuor diversas res assumi debere, ut puta a, b, c , & d , quæ 15 diversis modis eligantur. Quemadmodum ex præcedenti sectione facile est colligere.

Jam verò ut hinc porro constet, num & plures paucioresve res assumi queant, quæ similiter 15 diversis modis eligantur: quæro utrum 16 per alios adhuc numeros dividi possit. Unde cum præter 2 etiam per 4, 8, & per se ipsum divisibilis sit, concludo ultra inventam multitudinem alias insuper rerum multitudines reperiri, quæ idem præstent.

Ad quas obtinendas ut & ad earum habitudinem indagandam, divido 16 per 4, & fit 4. Jam autem, dividendo ut supra 4 per 2, fit 2, ac rursus 2 per 2, fit 1. Hinc si à divisoribus 4, 2, & 2 unitas auferatur, & reliqua 3, 1, & 1 simul addantur: ostendet summa 5, quinque item res, quarum tres inter se æquales sint, assumi posse, ut puta a, a, a, b , & c , quæ rursus 15 diversis modis eligi valeant.

Eodem modo, cum 16 diviso per 4, fiat 4, ac deinde 4 per 4, fiat 1; atque à divisoribus 4 & 4 unitate sublatâ reliqua 3 & 3 simul addita faciant 6: poterunt similiter 6 res assumi, quarum tres unæ inter se æquales sunt, sicut & tres aliæ, ut puta a, a, a, b, b , & c , quæ 15 iterum diversis modis eligentur.

Sic & quia dividendo 16 per 8, fit 2, & 2 per 2, fit 1: Hinc à divisoribus 8 & 2 sublatâ unitate, si reliqua 7 & 1 simul addantur, indicabit 8 summa, posse quoque octo res, quarum 7 inter se æquales sint, assumi, ut puta a, a, a, a, a, a, a , & b , quas denuo 15 diversis eligere licet modis.

Denique cum 16 per 16 dividendo fiat 1, & à 16 auferendo 1 relinquatur 15, fit ut sumendo res 15 inter se æquales, earum quoque electiones omnes 15 numero existant.

Hinc cum 16 aliis quàm hisce 5 modis dividi non eveniat, colligere licet, quæsitam rerum multitudinem quintuplicem esse; earundemque habitudines, seu quales ipsæ res assumendæ sint, ex jam dictis constare. Quæ omnia, dum ex præcedenti sectione manant, diligenter inquirenti, perspecta evadent.

Deinde ad inveniendam multitudinem rerum, quæ, verbi gratiâ, ^{2dum Ex-} 23 diversis modis eligi queant, ut & ad indagandum quales illæ assumenda sint, addo ad 23 unitatem seu 1, & fit 24. Jam cum hic numerus non aliquis eorum existat, qui ab unitate in ratione dupla ascendant, sive ipse continuò per 2 usque ad unitatem divisibilis sit: argu-

mentum est, multitudinem inveniendam non ex rebus, quæ omnes diversæ aut inæquales sint, constare posse. Quocirca ut habitudo earum innotescat, simulque palam fiat num multitudo illa varia inveniri possit: quæro utrum 24 per diversos numeros dividi queat,

1.	2.
$24 \begin{array}{l} 8 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$	$24 \begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$
3.	4.
$24 \begin{array}{l} 4 \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$	$24 \begin{array}{l} 4 \\ 6 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$
5.	6.
$24 \begin{array}{l} 3 \\ 8 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$	$24 \begin{array}{l} 2 \\ 12 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$
7.	
$24 \begin{array}{l} 1 \\ 24 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$	

priusquam ad unitatem perveniatur, hoc est, utrum ex diversis producat numeris. Unde cum 24 septuplicem admittere divisionem deprehendam, seu eum 7 diversis modis, hîc oblati, ab aliis gigni: concludo quæsitam rerum multitudinem septuplicem quoque inventum iri. Ad quas obtinendas, dum à divisoribus figillatim auferendo unitatem, reliqua componunt 7 hosce numeros 5, 6, 7, 8, 9, 12, & 23, qui singuli quæsitam rerum multitudinem demonstrant: patet, res quæsitæ (23 diversis electionibus obnoxias) 7 sequentibus modis esse sumendas, nimirum, prout designantur

per a, a, b, c, d .
 vel per a, a, a, b, b, c .
 vel per a, a, a, a, a, b, c .
 vel per a, a, a, a, a, b, b .
 vel per a, a, a, a, a, a, b .
 vel per a, a, a, a, a, a, a, b .
 vel per $a, a, a, a, a, a, a, a, b$.

3^{ium} EX-
emplum.

Cæterum ut inveniatur multitudo rerum, quæ 42 diversas electiones subeant, simulque indagetur quales illæ accipiendæ sint: addo, ut supra, ad 42 unitatem seu 1, & fit 43. Jam cum hic numerus primus existat, seu per nullum nisi per se ipsum & unitatem dividi possit, con-

concludo multitudinem quæsitam fore unicam: utpote sumendo 42 res (prout datus numerus indicat), quæ omnes inter se æquales sint. Atque ita de aliis.

S E C T I O III.

Ratio inveniendi quantitates, datam habentes partium aliquotarum aut divisorum multitudinem.

AD inveniendas quantitates, quæ datam habeant partium aliquotarum multitudinem: oportet per præcedentem sectionem invenire quot qualesque quantitates cæu res assumi debeant, quæ toties diversimodè eligi possint, quoties indicat data partium multitudo. Est enim quantitas ex iis genita, illa quæ quæritur.

Unde ad inveniendas quantitates, datam divisorum multitudinem habentes, nil aliud faciendum est, quàm ab eadem multitudine unitatem auferendo quærere quantitatem, sicut jam dictum est, quæ tot partes habeat, quot reliquum continet unitates. Sed hæc exemplis clariora fient.

Ut ad inveniendam quantitatem, quæ 15 habeat partes aliquotas: ^{1^{um}} Ex-
quæro per præcedentem sectionem quot quantitates accipiendæ ^{emplum.}
sint, qualisque inter ipsas habitudo existat, quæ 15 diversis modis eligi queant. Jam cum multitudo earundem varia reperiatur, illæque quintupliciter sumendæ occurrant, nimirum prout designantur per a, b, c, d , vel per a, a, a, b, c , vel per a, a, a, b, b , vel per a, a, a, a, a , vel per a, a, a, a, b , vel per $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a$: idcirco ex hisce componendo quantitates $abcd$, a^3bc , a^3b^2 , a^7b , a^{15} , designabit quælibet ipsarum quantitatem, 15 partes aliquotas habentem, qualis requirebatur.

Hinc ad inveniendam quantitatem, 16 divisores habentem, quoniam quantitas quindecim partes habens sedecim habet divisores (liquidem divisorum numerus semper unitate partium aut electionum numerum, sicut 1^{ma} sectione dictum fuit, excedit): fit ut inde quælibet inventarum $abcd$, a^3bc , a^3b^2 , a^7b , a^{15} , sedecim quoque divisores admittat.

Haud secus, si invenire velimus quantitatem, 23 partes aliquotas ^{2^{um}} Ex-
habentem; quæro per præced. sect. quot qualesque quantitates cæu ^{emplum.}
res

res assumi debeant, quæ 23 diversis modis eligi possint. Unde cum ipsarum multitudo septuplex reperiatur, atque earum inter se habitudinem designari per a, a, b, c, d , vel per a, a, a, b, b, c , vel per a, a, a, a, b, c , vel per a, a, a, a, a, b, b , vel per a, a, a, a, a, a, b , vel per a, a, a, a, a, a, a , fit ut ex iis componendo quantitates a^2bcd , a^3bc , a^4bc , a^5b^2 , a^6b^3 , a^7b^4 , a^8b^5 , quælibet harum habeat 23 partes, & 24 divisores.

3^{um} Ex-
emplum.

Sic & ad inveniendam quantitatem, habentem 42 partes aliquotas: quæro per præc. sect. quot quantitates assumendæ sint, qualisque ipsarum habitudo existat, quæ 42 diversis modis eligi valeant. Cum autem jam illarum multitudo non nisi unica reperiatur, atque ad hoc 42 quantitates sumendas esse, quæ omnes inter se æquales sint: idcirco quantitas ex iisdem conflata designabitur per a^{42} . Unde sequitur, ad designandam quantitatem, 43 divisores habentem, scribendum pariter fore a^{42} . Atque ita de aliis. Quorum omnium veritas ex 1^{ma} sectione perspicua est.

Exercitationis causâ atque majoris illustrationis ergo eorum, quæ ostensa sunt, subjungimus hîc quantitates, datâ partium multitudinem habentes ab 1 usque ad 100, modis omnibus quibus designari possunt.

Quantitates datæ mul-
titudinis partium
aliquotarum.

Multitudines par-
tium aliquota-
rum datæ.

a	habet	1
a^2	habet	2
ab, a^3	habent singulæ	3
a^4	&c.	4
a^2b, a^5		5
a^6		6
a^3b, abc, a^7		7
a^2b^2, a^8		8
a^4b, a^9		9
a^{10}		10
$a^2bc, a^3b^2, a^5b, a^{11}$		11
a^{12}		12
a^6b, a^{13}		13
a^4b^2, a^{14}		14
$a^3bc, abcd, a^5b^3, a^7b, a^{15}$		15
a^{16}		16

a^2b^2c .

Quantitates datæ mul-
titudinis partium
aliquotarum.

Multitudines par-
tium aliquota-
rum datæ.

$a^2b^2c, a^1b^1, a^0b, a^1$	habent singula	17
a^1	habet	18
a^2bc, a^1b^1, a^0b, a^1	&c.	19
a^2b^2, a^2		20
a^1b, a^1		21
a^2		22
$a^1b^2c, a^2bcd, a^1bc, a^0b^1, a^1b^1, a^1b, a^1$		23
a^2b^4, a^2		24
a^1b, a^2		25
$a^2b^2c^2, a^2b^2, a^2$		26
a^2bc, a^2b^1, a^1b, a^2		27
a^2		28
$a^2b^2c, a^1b^1, a^2b^2, a^1b, a^2$		29
a^1		30
$a^1bcd, a^1b^1c, a^1bc, abcde, a^1b^1, a^1b, a^1$		31
a^2b^2, a^2		32
a^1b, a^1		33
a^2b^4, a^2		34
$a^2b^2cd, a^2b^1c, a^1b^2c^2, a^2bc, a^2b^1, a^1b^1, a^1b^2, a^1b, a^1$		35
a^1		36
a^1b, a^1		37
a^1b^2, a^1		38
$a^2bcd, a^2b^1c, a^2bc, a^1b^4, a^2b^1, a^1b, a^2$		39
a^2		40
$a^2b^2c, a^1b^1, a^1b^2, a^2b, a^1$		41
a^2		42
a^1bc, a^1b^1, a^2b, a^1		43
$a^2b^2c^2, a^1b^4, a^1b^2, a^2$		44
a^2b, a^2		45
a^2		46
$a^1b^2cd, a^1bcd, a^1b^1c, a^2bcde, a^1b^1c^2, a^2b^1c, a^1b^1c, a^1b^1, a^1b^1, a^1b^1, a^1b^1$		47
a^1b, a^1		48
a^2b^6, a^2		49
$a^2b^2c, a^1b^4, a^2b, a^2$		50
a^1b^2, a^2		51
$a^1b^2c, a^1b^1, a^2b, a^1$		52
a^2		53
$a^2b^2c^2d, a^1b^1c^2, a^2b^1c, a^2b^1, a^1b^2, a^2b, a^1$		54
a^1b^4, a^2		55
$a^2bcd, a^2b^1c, a^1b^6, a^1bc, a^1b^1, a^2b, a^1$		56
	Ccc	a^1b^2

Partes
aliquotas

Quantitates datæ mul-
titudinis partium
aliquotarum.

Multitudines par-
tium aliquota-
rum datæ.

$a^{18}b^2, a^{56}$	habent singulæ	56
$a^{28}b, a^{57}$	habent singulæ	57
a^{58}	&c.	58
$a^4b^2cd, a^1b^3c^2, a^7b^1c, a^9b^2c, a^9b^5, a^{11}b^4, a^{14}bc, a^{14}b^3, a^{19}b^2, a^{26}b,$		a^{59} 59
a^{60}		60
$a^{30}b, a^{61}$		61
$a^6b^2c^2, a^8b^6, a^{20}b^2, a^{62}$		62
$a^1b^3cd, a^3bcde, a^7bcd, a^7b^1c, a^3b^1c^3, abcdef, a^7b^7, a^{15}bc, a^{15}b^3, a^{11}b,$		a^{63} 63
$a^{12}b^4, a^{64}$		64
$a^{10}b^2c, a^{10}b^5, a^{21}b^2, a^{32}b, a^{65}$		65
a^{66}		66
$a^{16}bc, a^{14}b^3, a^{33}b, a^{67}$		67
$a^{22}b^2, a^{68}$		68
$a^6b^4c, a^9b^6, a^{13}b^4, a^{34}b, a^{69}$		69
a^{70}		70
$a^5b^2cd, a^3b^2c^2d, a^2b^2cde, a^5b^3c^2, a^8bcd, a^7b^2c^2, a^8b^1c, a^7b^5c, a^{11}b^2c,$		$a^{11}b^5, a^8b^7, a^{17}bc, a^{17}b^3, a^{23}b^2, a^{35}b, a^{71}$ 71
a^{72}		72
$a^{36}b, a^{73}$		73
$a^4b^1c^2, a^{14}b^3, a^{24}b^2, a^{74}$		74
$a^{18}bc, a^{18}b^3, a^{57}b, a^{75}$		75
$a^{10}b^6, a^{76}$		76
$a^{12}b^2c, a^{12}b^5, a^{25}b^2, a^{38}b, a^{77}$		77
a^{78}		78
$a^3b^1cd, a^4bcde, a^9bcd, a^4b^3c^3, a^7b^4c, a^9b^3c, a^9b^7, a^{15}b^4, a^{19}bc, a^{19}b^3,$		$a^{19}b, a^{79}$ 79
$a^2b^2c^2d^2, a^8b^2c^2, a^8b^8, a^{26}b^2, a^{80}$		80
$a^{40}b, a^{81}$		81
a^{82}		82
$a^6b^2cd, a^6b^1c^2, a^6b^5c, a^{13}b^2c, a^{11}b^5, a^{13}b^5, a^{20}bc, a^{20}b^3, a^{27}b^2, a^{31}b,$		a^{83} 83
$a^{16}b^4, a^{84}$		84
$a^{12}b, a^{85}$		85
$a^{28}b^2, a^{86}$		86
$a^{16}bcd, a^{16}b^1c, a^{16}b^7, a^{21}bc, a^{21}b^3, a^{43}b, a^{87}$		87
a^{88}		88
$a^1b^2cd, a^5b^1c^2, a^6b^1c, a^9b^2c^2, a^{14}b^1c, a^9b^8, a^{14}b^5, a^{17}b^4, a^{29}b^2,$		$a^{44}b, a^{89}$ 89
		$a^{12}b^6,$

Partes
aliquotas

niam similiter quantitates 16 divisores habentes sunt $abcd$, a^2bc , a^3b^2 , a^2b , & a^3 ; sumendoque $a \propto 2$, $b \propto 3$, $c \propto 5$, & $d \propto 7$, pro iis, ut supra, reperiuntur numeri 210, 120, 216, 384, & 32768, inter quos 120 est minimus: erit pariter 120 eorum, qui 16 divisores habent, omnium minimus.

2^{dum} Ex-
emplum.

Eodem modo, ut inveniatur minimus numerus, habens 23 partes aliquotas, & 24 divisores, quoniam a^2bcd , a^3b^2c , a^2bc , a^3b^2 , a^2b^2 , a^3b , & a^3 singulæ habent 23 partes & 24 divisores, ac tribuendo ipsis a , b , c , d minimos primos numeros 2, 3, 5, 7 pro a^2bcd invenitur 420, pro a^3b^2c 360, pro a^2bc 480, pro a^3b^2 864, pro a^2b^2 1152, pro a^3b 6144, & pro a^3 8388608: erit 360 eorum qui 23 partes habent & 24 divisores omnium minimus.

Notandum autem est in hoc & præcedenti exemplo, cum diversæ quantitates reperiuntur, eandem partium aut divisorum multitudinem admittentes, quod iis singulis tanquam diversis modis uti possimus ad infinitos numeros inveniendos, qui datam illam partium aut divisorum multitudinem habeant.

Ita si infinitos invenire velimus numeros, qui singuli habeant 15 partes & 16 divisores, uti possumus unaquaque quantitatibus $abcd$, a^2bc , a^3b^2 , a^2b , & a^3 , tribuendo tantum quantitatibus a , b , c , & d , ex quibus producantur, numeros primos, ut libet, eosque aliter atque aliter sumendo, vel etiam pro iis accipiendo semper alios atque alios primos. Sic enim tribuendo a 2, b 3, c 5, invenietur pro a^2bc 120. At tribuendo a 3, b 2, c 5, invenietur pro a^2bc 270. Et tribuendo a 5, b 2, c 3, invenietur pro a^2bc 750. Vel etiam assumendo $a \propto 7$, $b \propto 11$, $c \propto 13$, fiet $a^2bc \propto 49049$. Aut sumendo $a \propto 17$, $b \propto 19$, & $c \propto 23$, fiet $a^2bc \propto 2146981$. Atque ita porro in infinitum. Idem intellige de quolibet reliquarum quantitatibus $abcd$, a^3b^2 , a^2b , a^3 ; ut & de singulis a^2bcd , a^3b^2c , a^2bc , a^3b^2 , a^2b^2 , a^3b , & a^3 , ad infinitos numeros inveniendos, qui 23 habent partes, & 24 divisores.

Ad hæc notatu dignum, quod, licet indifferenter per quamlibet harum quantitatibus, æque multas partes aut divisores habentium, infiniti numeri reperiuntur ejusdem multitudinis, nihilominus tamen non semper per unamquamque ex illis absque discrimine minimus numerus inveniri possit, qui totidem partes aut divisores habeat. Nam tamen si, & ante, quolibet uti possumus quantitatibus $abcd$, a^2bc , a^3b^2 , a^2b , a^3 , & per eas singulas tanquam per diversos modos invenire infinitos numeros, habentes 15 partes & 16 divisores; tamen, cum
ad

ad minimos obtinendos (tribuendo quantitatibus a, b, c, d minimos primos 2, 3, 5, 7) ipsarum beneficio nulli reperiantur minores quàm 210, 120, 216, 384, 32768, patet quantitatem a^4bc esse illam solam, per quam omnium reperire licet minimum 120.

Sic & cum per a^4b^2c inveniatur 360, atque hic numerus omnibus illis, qui per $a^4bcd, a^4bc, a^4b^2, a^4b^2, a^4, a^4$ reperiri possunt, minor sit: erit quantitas a^4b^2c illa, quæ ad minimum numerum inveniendum, habentem 23 partes & 24 divisores, tantum inservit.

Adcò ut hinc constet, tunc demum datæ multitudinis partium aut divisorum minimum obtineri numerum, cum juxta omnes modos, qui extant, inventis minimis numeris eum inter hos esse minimum apparet.

Porro ut in præcedenti tabula quantitates, quæ minimis numeris datæ multitudinis partium aut divisorum inveniendis inserviunt, ab aliis facile dignoscantur: concessimus illis priorem cujusque regulæ locum, reliquis consequenter posteriores tribuentes, prout continuò majores minimos numeros suppeditant, indeque aliis posthabendæ videntur.

Denique ad inveniendum minimum numerum, habentem 42 partes, & 43 divisores, quoniam quantitas hanc habens partium & divisorum multitudinem unico tantum modo designari potest, utpote scribendo a^{42} : fit ut, si pro a minimus sumatur primus numerus 2, isque quadragesies & bis ponatur, ac deinde multiplicetur, productus numerus 439804651104 minimus sit quæsitus, cum præter eum nullus alius minimus existat. Atque ita de aliis.

His subungere visum fuit sequentem tabulam minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & divisorum ab 1 usque ad 100.

Ccc 3

Syl.

Syllabus 100 minimorum numerorum, datae multitudinis partium & divisorum, ab 1 usque ad 100.

Minimi numeri, datae multitudinis partium aliquotarum & divisorum.

Multitudines partium aliquotarum datae, iisdem respondententes.

Multitudines divisorum datae, iisdem respondententes.

	habet	1 part. aliquot. &	2 divisor. res.
2		2	3
4		3	4
6		4	5
16		5	6
12		6	7
64		7	8
24		8	9
36		9	10
48		10	11
1024		11	12
60		12	13
4096		13	14
192		14	15
144		15	16
120		16	17
65536		17	18
180		18	19
262144		19	20
240		20	21
576		21	22
3072		22	23
4194304		23	24
360		24	25
1296		25	26
12288		26	27
900		27	28
960		28	29
268435456		29	30
720		30	31
1073741824		31	32
840			9216

Minimi numeri, data mul-
titudinis partium aliquo-
rarum & divisorum.

Multitudines partium ali-
quotarum datae, iisdem
respondentes.

Multitudines diviso-
rum datae, iisdem
respondentes.

	habet	32 part.aliquot.& 33 diviso-	34 res.
9216		33	
196608		34	35
5184		35	36
1260		36	37
68719476736		37	38
786432		38	39
36864		39	40
1680		40	41
1099511627776		41	42
2880		42	43
4398046511104		43	44
15360		44	45
3600		45	46
12582912		46	47
70368744177664		47	48
2520		48	49
46656		49	50
6480		50	51
589824		51	52
61440		52	53
4503599627370496		53	54
6300		54	55
82944		55	56
6720		56	57
2359196		57	58
805306368		58	59
288230376151711744		59	60
5040		60	61
1152921504606846976		61	62
3221215472		62	63
14400		63	64
7560		64	65
331776		65	66
46080		66	67
73786976294838206464			983040

Minimi numeri, data mul-
titudinis partium aliquo-
tarum & divisorum.

Multitudines partium ali-
quotarum data, iisdem
respondentes.

Multitudines diviso-
rum data, iisdem
respondentes.

	habet	67 part. aliquot. & 68 diviso-	69 res.
983040		68	70
37748736		69	71
25920		70	72
1180591620717411303424		71	73
10080		72	74
4722366482869645213696		73	75
206158430208		74	76
32400		75	77
3932160		76	78
746496		77	79
184320		78	80
302231454903657293576544		79	81
15120		80	82
44100		81	83
3298534883328		82	84
4835703278458516698824704		83	85
20160		84	86
5308416		85	87
13194139533312		86	88
2415919104		87	89
107520		88	90
309485009821345068724781056		89	91
25100		90	92
2985984		91	93
62914560		92	94
9663676416		93	95
211106232532992		94	96
21233664		95	97
27720		96	98
79228162514264337593543950336		97	99
233280		98	100
230400		99	101
45360		100	
126765060022822940149670320-		100	
-5376			

SE-

SECTIO V.

*Syllabus numerorum primorum, qui continentur
in decem prioribus chiliadibus.*

CUM ad solutionem Quæstionum de partibus aliquotis & divisoribus primos numeros in promptu habere valde opportunum sit, atque his illarum praxis omnino facilis reddatur: haud inconvenienti fore duximus, si, in ipsis hîc, tanquam in abaco, exponendis, prout eos ab unitate usque ad 10.000 summâ accuratione investigavimus, Sectionem hanc insumeremus. Quod eò, magis consultum judicavimus, quò ipsorum usum latius per hæc disciplinas se diffundereprehendimus. Cum enim operatio quælibet, quæ per numeros instituenda est, per primos numeros tanquam per omnium minimos seu simplicissimos procedat, ipsiq; ulterius ad Quæstiones, quæ per numeros enodari debent, dissolvendas, præsertim deserviant: nullus (ut confido) futurus est, qui illorum usum hac in re non sit agnitus. Quippe constat, ad Quæstionem aliquam per numeros illustrandam, si ipsi ad id absque delectu assumantur, eandem interdum, licet quæstio aliàs per se facilis sit, tam vastis ac tædiosis numeris involvi, ut à Quæstionis inspectione tyrones è vestigio deterreantur. His adde, quòd hi numeri ad fractiones abbreviandas non parùm quoque subsidii conferant; & iidem in dividendis æquationibus, earumque investigandis radicibus, ut & in componendis Logarithmis, ac in omni fermè calculo usum suum præbeant.

Ddd

Nu-

Numeri primi
1. Chiliadis.

2	151	353	577	
3	157	16. 359	587	811
5	163	367	593	821
7	167	373	599	823
11	173	379		827
13	179	383	601	829
17	181	389	607	839
19	191	397	613	853
23	193	401	617	857
29	197	409	619	859
31	199	419	631	863
37	211	421	641	877
41	223	431	643	881
43	227	433	647	883
25. 47	229	439	653	887
53	233	443	659	907
59	239	449	661	911
61	241	457	673	919
67	251	461	677	929
71	16. 257	463	683	937
73	263	467	691	941
79	269	479	701	947
83	271	487	709	14. 953
89	277	491	719	967
97	281	499	727	971
101	283	503	733	977
103	293	509	739	983
107	307	521	743	991
109	311	523	14. 751	997
113	313	541	757	
127	317	547	761	
131	331	557	769	
137	337	14. 563	773	
139	347	569	787	
149	349	571	797	

Nu-

Numeri primi
2. Chiladis.

1009	1213	1433	15.	1619	12.	1867
1013	1217	1439		1621		1871
1019	1223	1447		1627		1873
1021	1229	1451		1637		1877
1031	1231	1453	17.	1637		1879
1033	1237	1459		1663		1889
1039	1249	1471		1667		1901
1049	1259	1481		1669		1907
1051	1277	1483		1693		1913
1061	1279	1487		1697		1931
1063	1283	1489		1699		1933
1069	1289	1493		1709		1949
1087	1291	1499		1711	13.	1951
1091	1297	1511		1723		1973
1093	1301	1523		1733		1979
1097	1303	1531		1741		1987
1103	1307	1543	12.	1747		1993
1109	1319	1549		1753		1997
1117	1323	1553		1759		1999
1123	1327	1559		1777		
1129	1361	1567		1783		
1131	1367	1571		1787		
1133	1373	1579		1789		
1163	1381	1583		1801		
1171	1399	1597		1811		
1181	1409	1601		1823		
1187	1413	1607		1831		
1193	1417	1609		1847		
1201	1429	1613		1861		

Ddd 2

Nu-

Numeri primi
3. Chiliadis.

	2003	2213	2393	2633	2803
	2011	2221	2399	2647	2803
	2017	2237	2411	2657	2819
	2027	2239	2417	2659	2833
	2029	2243	2423	2663	2837
	2039	2251	2437	2671	2843
	2053	2267	2441	2677	2851
14.	2063	2269	2447	2683	2857
	2069	2273	2459	2687	2861
	2081	2281	2467	2689	2879
	2083	2287	2473	2693	2887
	2087	2293	2477	2699	2897
	2089	2297	2503	2707	2903
	2099	2309	2511	2711	2909
	2111	2311	2531	2713	2917
	2113	2333	2539	2719	2927
	2129	2339	2543	2729	2939
	2131	2341	2549	2731	2953
10.	2137	2347	2551	2741	2957
	2141	2351	2557	2749	2963
	2143	2357	2579	2753	2969
	2153	2371	2591	2767	2971
	2161	2377	2593	2777	2999
	2179	2381	2609	2789	
	2203	2383	2617	2791	
	2207	2389	2621	2797	

Nu-

Numeri primi
4. Chalcidic.

3001	3211	3433	3623	3847
3011	3219	3449	3631	3851
3019	3251	3477	3637	3863
3023	11. 3253	11. 3461	13. 3643	3863
3037	3257	3463	3659	3877
3041	3259	3467	3671	3881
12. 3049	3271	3469	3673	3889
3061	3299	3491	3677	3907
3067		3499	3691	3911
3079	3301	3511	3697	3917
3083	3307	3517	3701	3919
3089	3313	3527	3709	3923
	3319	3529	3719	3929
3109	3323	3533	3727	11. 3931
3119	3329	3539	3733	3943
3121	3331	3541	3739	3947
3137	3343	14. 3547	12. 3761	3967
10. 3163	15. 3347	3557	3767	3989
3167	3359	3559	3769	
3169	3361	3571	3779	
3181	3371	3581	3793	
3187	3373	3583	3797	
3191	3389	3593	3803	
	3391	3607	3811	
3203		3613	3823	
3209	3407	3617	3833	
3217	3413			

Ddd 3

Nu-

Numeri primi
5. Chiliadis.

4001	4211	4421	4639	8.	4861
4003	4217	4423	4643		4871
4007	4219	11. 4441	4649	12.	4877
4013	4229	4447	4651		4889
4019	16. 4231	4451	4657		4903
4021	4241	4457	4663		4909
4027	4243	4463	4673		4919
15. 4049	4253	4481	4679		4931
4051	4259	4483	4691		4933
4057	4261	4493	4703		4937
4073	4271	4507	4721	15.	4943
4079	4273	4513	4723		4951
4091	4283	4517	4729		4957
4093	4289	4519	4733		4967
4099	4297	4523	4751	12.	4969
4111	4327	12. 4547	4759		4973
4127	9. 4337	4549	4783		4987
4129	4339	4561	4787		4993
4133	4349	4567	4789		4999
4139	4357	4583	4793		
9. 4153	4363	4591	4799		
4157	4373	4597	4801		
4159	4391	4603	4813		
4177	4397	4621	4817		
4201	4409	4637	4831		

Nu-

Numeri primi
6. Clivada.

5003	10.	5233	5449	5659	5861
5009		5237	5471	5669	5867
5011		5261	5477	5683	5869
5021		5273	5479	5689	5879
5023		5279	5483	5693	5881
12. 5039		5281			5897
5051		5297	5501	5701	
5059			5503	5711	5903
5077		5503	5507	5717	5913
5081		5509	5519	5737	5927
5087		5523	5521	5741	7. 5939
5099		5533	13. 5527	10. 5743	5953
5101	10.	5547	5531	5749	5981
5107		5551	5557	5779	5987
5113		5581	5563	5783	
5119		5587	5569	5791	
5147		5593	5573	5801	
11. 5153		5599	5581	5807	
5167			5591	5813	
5171		5407		5821	
5179		5413	5623	5827	
5189		5417	5639	5839	
5197		5419	5641	5843	
5199		5431	5647	5849	
5209	13.	5437	5651	16. 5851	
5227		5441	12. 5653	5857	
5231		5443	5657		

Nu-

Numeri primi
7. Chiliadis.

6007	6217	6397	6653	12.	6841
6011	6221	—	10. 6659		6857
6029	6229	6421	6661		6863
6037	6247	6427	6673		6869
6043	13. 6257	6449	6679		6871
12. 6047	6263	8. 6451	6689		6883
6053	6269	6469	6691		6899
6067	6271	6473	—		—
6073	6277	6481	6701		6907
6079	6287	6491	6703		6911
6089	6299	—	6709		6917
6091	—	6521	6719		6947
6101	6301	6529	6733		6949
6113	6311	6547	6737	12.	6959
6121	6317	6551	6761	13.	6961
6131	6323	6553	6763		6967
6133	6329	11. 6563	6779		6971
11. 6143	6337	6569	6781		6977
6143	6343	6571	6791		6983
6151	15. 6353	6577	6793		6991
6163	6359	6581	—		6997
6173	6361	6599	6803		—
6197	6367	—	6823		—
6199	6373	6607	6827		—
6203	6379	6619	6829		—
6211	6389	6637	6833		—

Nu-

Numeri primi
8. Chiliadis.

7001	7229	7481	7639	7841
7013	11. 7237	7487	7643	10. 7853
7019	7243	7489	12. 7649	7867
7027	7247	7499	7669	7873
9. 7039	7253	—	7673	7877
7043	7283	7507	7681	7879
7057	7297	7517	7687	7883
7069	7307	7523	7691	—
7079	7309	7529	7699	7901
7103	7321	7537	—	7907
7109	7331	7541	7703	7919
7121	9. 7333	7547	7717	7927
7127	7349	15. 7549	7723	10. 7933
10. 7129	7351	7559	7727	7937
7151	7369	7561	10. 7741	7949
7159	7393	7573	7753	7951
7177	7411	7577	7757	7963
7187	7417	7583	7759	7993
7193	7433	7589	7789	—
7207	7433	7591	7793	—
7211	7451	—	—	—
7213	7457	7603	7817	—
7219	11. 7459	7607	7823	—
	7477	7621	7829	—

Ecc

Nu-

Numeriptimi
9. Chiliadis.

8009	8221	8429	8647	8831
8011	8231	8. 8431	13. 8663	8837
8017	8233	8443	8669	13. 8839
8019	8237	8447	8677	8849
8053	8243	8461	8681	8861
11. 8059	14. 8263	8467	8689	8863
8069	8269	8501	8693	8867
8081	8273	8513	8699	8887
8087	8287	8521	8707	8893
8089	8291	8527	8713	8923
8093	8293	8537	8719	8929
8101	8297	8539	8731	8933
8111	8311	12. 8543	8737	8941
8117	8317	8563	11. 8741	2. 8951
8123	8329	8573	8747	8963
8147	8353	8581	8753	8969
10. 8161	9. 8363	8597	8761	8971
8167	8369	8599	8779	8999
8171	8377	8609	8783	
8179	8387	8623	8803	
8191	8389	8627	8807	
8209	8419	8629	8819	
8219	8423	8641	8821	

Nu-

Numeri primi
10. Chiladis.

9001	9103	9413	9619	9811
9007	9109	9419	9623	9871
9011	9121	9421	9629	9829
9013	9127	9431	9631	9833
9019	9139	9433	13. 9643	12. 9849
11. 9041	11. 9141	9437	9649	9851
9043	9157	15. 9439	9661	9857
9049	9177	9461	9677	9859
9059	9181	9463	9679	9871
9067	9183	9467	9689	9883
9091	9193	9473	9697	9887
9103	9311	9479	9719	9901
9109	9319	9491	9721	9907
9127	9323	9497	9733	9923
9133	9337	9511	9739	9929
9137	9341	9521	9743	9. 9931
12. 9151	11. 9343	9533	11. 9749	9941
9157	9349	9539	9767	9949
9161	9371	9547	9769	9967
9173	9377	9551	9781	9973
9181	9391	9587	9787	
9187	9497	9601	9791	
9199	9433	9613	9803	

Ecc 2

Nu-

SECTIO VI.

De Progressionibus, rectangula triangula constituentibus, quorum latera sint rationalia.

QUO pacto rectangula triangula inveniri possint, quorum latera per numeros rationales exprimantur, ostenditur inferius. Sectione 24. Id autem cum in componendis variis Quæstionibus sive Problematis Geometricis ad irrationalium calculum evitandum plurimum inserviat, aut ad ea in numeris proponenda, quibus illustrari & faciliè solvi possint, magnum usum habeat: non injucundum fuerit, si ex Stifelio exposuero duas Progressiones, quas in eundem finem addert in Commentariis suis ad 1^{um} caput Algebræ Christophori Rudolphi, Germanicè editæ. Quæ sunt hujusmodi:

$$1\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{7}, 4\frac{4}{9}, 5\frac{5}{11}, 6\frac{6}{13}, 7\frac{7}{15}, 8\frac{8}{17}, \&c.$$

$$1\frac{7}{8}, 2\frac{11}{12}, 3\frac{15}{16}, 4\frac{19}{20}, 5\frac{23}{24}, 6\frac{27}{28}, 7\frac{31}{32}, 8\frac{35}{36}, \&c.$$

In quarum utraq; tres animadvertere licet Progressiones Arithmeticas distinctas: nimirum integrorum, tum numeratorum, ac deinde etiam denominatorum. Sunt autem omnes divisionum quotientes duorum numerorum, quorum quadrata, cum adduntur, etiam quadratum efficiunt.

Hinc ad eos obtinendos, si integer multiplicetur per denominatorem & producto addatur numerator, fiet major quæsitus. Minor verò quæsitus semper est denominator.

Sic assumendo quotientem $2\frac{1}{12}$, quoniam 2 per 12 multiplicatus & producto 24 additus 11, fit 35: poterunt 35 & 12 assumi pro duobus lateribus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus item 3^{ium} latus seu hypotenusa sit rationalis. Etenim additis illorum quadratis 1225 & 144, cum inde, per 47 Prop. 1^{mi} libri Elem. Euclidis, pro quadrato hypotenuse reperiatur quadratus numerus 1369, cujus radix est 37: patet hypotenusam fore 37. Atque ita de aliis.

Porro quoniam duabus hisce Stifelii Progressionibus Simon Jabi Coburgensis in majori sua Arithmetica, Germanicè conscriptâ, pag. 240 sex alias superaddit, seque mille ejusmodi Progressiones exhibere posse scribit, non autem artem quâ inveniendæ sint tradens: haud afferre pigebit modum, quo infinitæ inveniri queant, qualem eum olim ab insigni Arithmetico D. Nicolao Huberti à Persijn didici. Ipsius autem modus talis est.

Al-

Assumptis duobus rationis alicujus terminis, ut ex iis inveniatur numerator, oportet, uno termino per alterum multiplicato, observare utrum productum sit par an impar. Si enim impar fuerit, designabit illud ipsum numeratorem; at verò pari existente, si ejusdem producti sumatur duplum.

Deinde ad inveniendum denominatorem, addantur dicti rationis termini, & summa, si impar est, per terminorum differentiam multiplicata, dabit denominatorem; at verò pari existente, si hujus producti sumatur semissis.

Porro ut 2^{da} obtineatur numerator, multiplicetur terminorum differentia per 2, si par fuerit; aut per 4, si impar sit, productoque ducto in majorem terminum, quod exurgit addatur numeratori prius invento, & fiet numerator 2^{da}.

Denique ad habendum 2^{dum} denominatorem, addatur quadratum differentie terminorum, si id par fuerit, aut ejusdem duplum, si impar, ad denominatorem prius inventum, fietque denominator 2^{da}.

Ex quibus inde facile est per supra dicta reliquos Progressionis terminos reperire in infinitum.

Ut si termini rationis sint 1. & 2. quoniam hi in se invicem ducti faciunt 2, numerum parem, ideo 4, ipsius duplum, erit numerator.

Deinde quia additis 1 & 2, summa 3 est impar numerus, hinc multiplicato 3 per 1, differentiam terminorum, fiet 3, denominator.

Porro quoniam 1, differentia terminorum, impar est, hinc si ipsa multiplicetur per 4, ac rursus productum 4 per 2, majorem terminum: erit 12, summa hujus producti & prioris numeratoris, numerator 2^{da}.

Denique quia 1, quadratum differentie terminorum impar est, ideo si duplum ejus 2 ad denominatorem inventum 3 addatur, fiet 5 denominator 2^{da}. Adeò ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{12}{5}$ singuli exhibeant duo trianguli latera, quæ sunt circa rectum angulum, cujusque trianguli hypotenusa item rationalis sit.

Quibus ita constitutis, cum numeratoribus per denominatores divisis oriantur $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{2}{5}$ qui priores sunt duo termini 1^{ma} ex duabus supra allatis Progressionibus Stifelii: patet, hanc eandem ex duplici rationis terminis 1 & 2 originem ducere, ac reliquos ejusdem Progressionis terminos ex iis nullo negotio inveniri, si modò integri, tum numeratores, ac deinde etiam denominatores singuli separatim Arithmeticam Progressionem constituere singantur.

Ecc 3

Ubi

Ubi notandum, quòd, sicut ex terminis rationis 1 ad 2, ope prioris partis hujus regulæ invenimus numeratorem & denominatorem primæ fractionis $\frac{4}{3}$, ac deinde ope posterioris partis numeratorem & denominatorem 2^{dæ} fractionis $\frac{12}{5}$, & ex binis hisce postea cæteras omnes, ut dictum est, ita ope solius primæ partis numeratorem ac denominatorem invenire liceat 2^{dæ}, utendo ad id terminis rationis 2 ad 3; at verò reliquarum omnium sequentium, utendo ad id terminis rationum 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

Idem de sequentibus est intelligendum.

Ut si termini rationis fuerint 1 & 3, invenietur inde per priorem regulæ partem fractio $\frac{3}{4}$, sumendoque terminos rationis 3 ad 5, invenietur inde fractio $\frac{15}{8}$, atque ita porro reliquæ $\frac{35}{12}$, $\frac{63}{16}$, $\frac{99}{20}$, $\frac{143}{24}$, $\frac{195}{32}$, $\frac{273}{40}$, assumendo terminos rationum 5 ad 7, 7 ad 9, 9 ad 11, 11 ad 13, 13 ad 15, 15 ad 17, 17 ad 19. Unde 2^{dæ} Stifelii resultat Progressio $\frac{3}{4}$, $\frac{17}{8}$, $\frac{21}{12}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{49}{20}$, $\frac{52}{24}$, $\frac{67}{28}$, $\frac{73}{32}$, $\frac{83}{36}$ &c.

Eodem modo invenitur, quòd termini Progreffionis $\frac{8}{11}$, $\frac{23}{33}$, $\frac{238}{69}$, $\frac{68}{87}$, $\frac{83}{104}$, &c. fiunt ab hisce rationum terminis 1—4, 4—7, 7—10, 10—13, 13—16, 16—19, &c.

Et Progreffionis $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{28}$, $\frac{29}{44}$, $\frac{41}{60}$, $\frac{47}{76}$, $\frac{61}{92}$, &c. fiunt ab his 1—5, 5—9, 9—13, 13—17, 17—21, 21—25, &c.

Et Progreffionis $\frac{12}{31}$, $\frac{47}{83}$, $\frac{82}{133}$, $\frac{117}{213}$, $\frac{152}{333}$, $\frac{187}{513}$, &c. fiunt ab his 1—6, 6—11, 11—16, 16—21, 21—26, 26—31, &c.

Et Progreffionis $\frac{7}{24}$, $\frac{31}{60}$, $\frac{55}{96}$, $\frac{79}{132}$, $\frac{103}{168}$, $\frac{127}{204}$, &c. fiunt ab his 1—7, 7—13, 13—19, 19—25, 25—31, 31—37, &c.

Atque ita de aliis.

Haud secus termini Progreffionis $\frac{20}{21}$, $\frac{23}{39}$, $\frac{35}{57}$, $\frac{48}{75}$, $\frac{51}{93}$, $\frac{14}{111}$, &c. fiunt ab his 2—5, 5—8, 8—11, 11—14, 14—17, 17—20, &c.

Et Progreffionis $\frac{12}{20}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{39}{52}$, $\frac{43}{68}$, $\frac{57}{84}$, $\frac{71}{100}$, &c. fiunt ab his 3—7, 7—11, 11—15, 15—19, 19—23, 23—27, &c.

Et Progreffionis $\frac{7}{63}$, $\frac{22}{111}$, $\frac{37}{165}$, $\frac{42}{213}$, $\frac{57}{267}$, $\frac{62}{315}$, &c. fiunt ab his 4—9, 9—14, 14—19, 19—24, 24—29, 29—34, &c.

Atque ita de aliis.

Cæterum sciendum, quâlibet harum fractionum exhiberi semper triangulum in minimis numeris, eandem cum ipsis rationem habentibus: ac proinde si hæc triangula omnia similiter posita concipiantur, ipsa continuò fore dissimilia seu alterius atque alterius semper speciei. Adeò ut quis hâc arte nullo negotio centum & plura triangula intra horam reperire valeat, quæ à se invicem sint diversa.

SE-

SECTIO VII.

*De modo inveniendi numeros, qui per dados divisi
certos post divisionem relinquunt.*

Quò Sectio hæc ritè intelligatur, explicabimus eam per sequen-
tes quæstiones.

1^{ma} Quæstio:

*Invenire numerum, qui per 2, 3, & 5 divisus in divisione relinquat 1; ac
si per 7 dividatur, ut nihil remaneat.*

Ad hoc supposita $2 \propto a$, $3 \propto b$, $5 \propto c$, & $7 \propto d$, cum nulla hic quo-
torum sit ratio habenda, patet, conditionibus requisitis satisfactum
iri, si pro quæsito numero statuamus dz , vel $av + 1$, vel $bx + 1$, vel
 $cy + 1$; adeò ut habeatur hæc æqualitas: $dz \propto av + 1 \propto bx + 1$
 $\propto cy + 1$, seu hæc $dz - 1 \propto av \propto bx \propto cy$.

E qua liquet, ad quæsitum numerum obtinendum, opus tantum
esse quærere numerum, qui dividi possit per 2, 3, & 5, & si unitate au-
geatur, dividi queat per 7.

Quoniam autem ad id sumendo primum 30, minimum commu-
nem dividuum numerorum 2, 3, & 5, eique addendo unitatem summa
31 absque reliquo per 7 dividi nequit: progrediendum erit ad du-
plum, triplum, quadruplum, aliudve multipulum ipsius 30. Hinc cum
sumendo 30 ter, & producto addendo 1, summa 91 per 7 dividi possit,
erit 91 numerus quæsitus.

Porro ne quis in his multiplis sumendis divisionem pluries ten-
tare opus habeat, illud operosum putans, poterit quæsitum nume-
rum è priori divisione nullo negotio elicere. Nam cum 7 in 30 con-
tineatur quater, & remaneat 2: fiet ut in 90, ejus triplo, conti-
neatur 12^{ies}, & 6 remaneat; adeoque 91 per 7 sine reliquo dividatur,
oriaturque 13.

Cæterum cum infiniti sint numeri, qui quæsito satisfaciant, pote-
rimus invento jam primo seu omnium minimo 90 ex eo facile reli-
quos sequentes invenire.

Etenim invento divisorum datorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi
dividuo 210, cum ipse ad 91 additus faciat numerum 301, qui iisdem
divisionum legibus est obnoxius cum invento 91: idcirco ipse erit
alter quæsitus. Huic autem si rursus addas 210, fiet 511, tertius quæ-
situs.

situs. Atque ita in infinitum, addendo semper 210 ad ultimum inventum.

Notandum autem, ut quæstio proposita solvi queat, oportere unumquemque datorum numerorum 2, 3, & 5 cum 7 esse primum. Aliàs enim fieri nequit, ut ipsius 7 reperiatur aliquis multiplus, qui multiplum alterius cum eo non primi unitate excedat.

2^{da} Quæstio.

Invenire numerum, qui divisus per 7 relinquat 2, per 11 divisus relinquat 1, & per 13 divisus relinquat 9.

Quoniam hæc Quæstio reducta, ut ante, ad æqualitatem, fit $7x + 2 \equiv 11y + 1 \equiv 13z + 9$, vel $7x + 1 \equiv 11y \equiv 13z + 8$, atque hæc ipsa, ad quæsitum numerum obtinendum, nos docet, sumendum esse numerum 11, aliumvé hujus multiplum, qui sit talis, ut ab eo ablatis 1 & 8 reliqui dividi possint per 7 & 13: patet, si ad id sumatur 99, non-cuplum ipsius 11, & ab eo auferantur 1 & 8, reliquorum alterum 98 dividi per 7, & alterum 91 per 13. adeoque numerum inveniendum, qui per $7x + 2$, vel $11y + 1$, vel $13z + 9$ designatur, fore 100. Is enim per 7 divisus, relinquat 2, per 11 divisus relinquat 1, & per 13 divisus relinquat 9, sicut requirebatur.

Porro ut infiniti ejusmodi numeri habeantur, opus tantum erit ad jam inventum 100 addere 1001, divisorum 7, 11, & 13 minimum communem dividuum, & fit 1101, alter quæsitus. Atque ita addendo continuo 1001 ad ultimò inventum invenientur semper alii ac alii in infinitum.

Cæterum cum ad hujusmodi quæstiones solvendas modum ingeniosissimum excogitarit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Persijn, placuit eum, qualem ab ipso accepi, paucis hîc subijcere.

Ut ad solvendam 1^{am} Quæstionem, invento primùm divisorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, eoque per unumquemque ex ipsis bis diviso: confidero quid in singulis secundis divisionibus relinquatur. Est autem reliquorum sequens habenda ratio:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 210 \overline{) 105} \end{array}$$

Quoniam in hac divisione relinquatur 1, erit 105 ut inferius pro multiplicatore sumendus.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 210 \overline{) 231} \end{array}$$

Similiter quia in hac divisione relinquatur 1, erit 70 eodem modo pro multiplicatore sumendus.

210

$\begin{array}{r} 2 \\ 275 \overline{) 4218} \\ 54 \end{array}$ Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset pariter 42 pro multiplicatore accipi.

Sed jam 42 toties sumi debet, ut, si per 5 dividatur, reliquum sit 1, id est, ter sumendus erit. Quod ut facili negotio exploretur, oportet tantum inquirere, quoties reliquum 2 sumendum sit, ita ut si per 5 dividatur reliquum sit 1. Et fit, ut ante, ter. Eodem modo fac in sequentibus. Hinc sumendo 42 ter fit 126, pro multiplicatore.

$\begin{array}{r} 2 \\ 275 \overline{) 304} \\ 77 \end{array}$ Haud secus si reliquum in hac divisione fuisset 1, debuisset itidem 30 pro multiplicatore assumi.

Nunc autem assumpto reliquo 2 toties, ita ut per 7 diviso relinquatur 1, id est, quater, multiplico 30 per 4, & fit 120, pro multiplicatore.

Jam quo pacto ex inventis hisce multiplicatoribus quæsitus numerus reperiatur, sequens operatio indicabit.

Diviso- Reli- Multipli- Produ-
res. qua. catores. cta.

2	.	1	—	105	105	
3	.	1	—	70	70	Divid. $\begin{array}{r} 9 \\ 301 \end{array}$
5	.	1	—	126	126	per min. com. div. $\begin{array}{r} 275 \end{array}$
7	.	0	—	120	0	1. Reliquum 91 ar- guit quæsitum numerum.
summa					301	

Similiter ad solvendam 2^{am} Quæstionem, Invento divisorum 7, 11, 13 minimo communi dividuo 1001, eoque bis per unumquemque ex ipsis diviso, reliquorum cujusque divisionis sequens habeatur ratio.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 1001 \overline{) 14310} \\ 77 \end{array}$$

Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 143 pro multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 3 toties, ita ut per 7 diviso relinquatur 1, id est, quinquies: multiplico 143 per 5, & fit 715, pro multiplicatore.

E f f

2758

$$\begin{array}{r} x \ 13 \\ x \phi \phi x \ 91 \ 8. \\ 11 \overline{) 11} \end{array}$$

Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 91 pro multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 3 toties, ita ut per 11 diviso relinquatur 1, id est, quater: multiplico 91 per 4, & fit 364 pro multiplicatore.

$$\begin{array}{r} 9 \ 12 \\ x \phi \phi x \ 77 \ 5. \\ 12 \overline{) 12} \end{array}$$

Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 77 pro multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 12 toties, ita ut per 13 diviso relinquatur 1, id est, duodecies: multiplico 77 per 12, & fit 924 pro multiplicatore.

Ex multiplicatoribus inventis quæsitum numerum sic elicies.

Diviso-Reli-Multipli-Produ-
res. qua. catores. eta.

$$\begin{array}{r|l} 7 \cdot 2 - 715 & 1430 \\ 11 \cdot 1 - 364 & 364 \\ 13 \cdot 9 - 924 & 8316 \\ \hline & \text{summa. } 10110 \end{array}$$

Divide $x \phi 1 x 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 10. \text{ Reliquum} \\ 364 \text{ per min.com. } 1001 \end{array} \right\}$ indicat quæsitum
div. numerum.

Atque ita de aliis.

De his tradidit quoque celebris Arithmeticus Simon Jacobi Coburgensis in Arithmetica sua majori, sed multiplicatores invenire non docet.

SECTIO VIII.

Praxis ponderandi.

CUM utilis pariter atque jucunda speculatio sit censenda, quæ ponderandi praxin concernit, docens paucis ponderibus complures libras expendere: visum fuit præsentem de illâ sectionem instituire.

Quoniam autem dupliciter id fieri posse compertum est, vel scilicet additione solâ, vel additione & subtractione simul: explicabo subinde quæ ad utrumque modum pertinent.

Ad

Ad priorē modum pertinet Progressionis duplæ consideratio sequens:

nimirum,

Si, ab unitate in ratione dupla acceptis quotlibet numeris, sumantur pondera tot librarum, quot Progressionis hujus termini indicant: poterunt eorum beneficio per solam additionem libræ omnes obtineri, quas aliquis ad ponderandum proposuerit:

Etenim, assumptis duobus primis 1 & 2, si 1 lb in lancem ponam pendet 1 libram; & si 2 lb in lancem ponam pendet 2 libras; ac deinde si 1 & 2 lb simul in lancem ponam pendet 3 libras. Quod si verò ad hæc duo pondera 1 & 2 librarum tertium accesserit pondus 4 librarum, atque hoc pondus 4 librarum lanci committatur, habebō 4 libras; quibus si 1 lb addatur, habebō 5 libras; tollendo autem hanc 1 lb ejusque loco 2 lb immittens, habebō unā cum prædictis 4 libris 6 libras; his si præterea apponatur 1 lb, fient 7 libræ. Sicque 1, 2, & 4 libris ponderare potero libras omnes ab 1 usque ad 7 lb.

Similiter beneficio quatuor ponderum 1, 2, 4, & 8 librarum poterō librare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15 libras; & ope 5 ponderum 1, 2, 4, 8, & 16 librarum libras omnes ab 1 lb usque ad 31 lb. Pari ratione licebit cum sex hisce 1, 2, 4, 8, 16, & 32 librarum expendere libras omnes ab 1 lb usque ad 63 lb; & ope horum septem 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum libras omnes ab 1 lb usque ad 127 libras. Atque sic ulterius in infinitum.

Porro ad investigandum, quo pacto, assumptis compluribus horum ponderum, ipsa simul jungi debeant, ut ordine libræ omnes mediantibus iis ponderentur: deligno 1, 2, 4, 8 &c. per *a, b, c, d, &c.* harumque quæto electiones omnes, sicut 1^{ma} sectione ostensum fuit, & invenio electiones sequentes:

1			
2			
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Indicantes ordine omnes libras, quæ datis quatuor ponderibus

Fff 2

1, 2, 4,

1, 2, 4, & 8 librarum appendi possunt, ut & quo pacto dicta pondera conjungi debeant.

Idem de aliis compluribus in infinitum intellige.

In posterioris modi explanationem lubet hoc loco in medium adducere, quæ à Stifelio afferuntur in commentariis suis ad 1^{am} caput Algebræ Christophori Rudolphi, ubi hæc de Progressione tripla scribit:

Progressio 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 &c. singularem quoque suam habet proprietatem. Si enim pondera accipiantur totidem librarum quot hujus Progressionis termini indicant: poterimus cum duobus primis, 1 & 3 librarum, ponderare 1, 2, 3, & 4 libras. Nam si 1 lb in lancem ponam, pendet unam libram; & si 3 lb ponam in alteram lancem, pendet hæc 3 lb non nisi 2 libras, propter 1 lb in priori lance positam: quam libram si tollam, ponderabo 3 lb; at verò si unà simul jungam, habeo 4 libras.

Eodem modo ope trium priorum librarum 1, 3, & 9 ponderari poterunt libra sequentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & 13. Sic & 1, 3, 9, 27 libra, facientes simul 40 libras, inservire poterunt ad quemvis librarum numerum ab 1 lb usque ad 40 lb ponderandum. Hand secus si quinque sumantur pondera, nimirum: 1, 3, 9, 27, & 81 librarum, poterunt eorum beneficio ponderari omnes libra ab 1 lb usque ad 121 libras. Et per sex 1, 3, 9, 27, 81, & 243 omnes libra ab 1 usque ad 364. Atque ita porro in infinitum.

Quoniam igitur ex his constat, utendo numeris progressionis triplæ, ope pauciorum ponderum plures ponderari libras, quàm si in eundem finem uteremur ponderibus progressionis duplæ; non è re fore existimo, si hîc deinceps, ut ante, quo pacto hæc pondera separatim utrique lanci imponenda sint, ad omnes ordine libras expendendas, ostendam: ad quod investigandum & evulgandum Clarissimus Vir- Juvenis D. Theodorus Cranen, L. A. M. ac Med. Doctor Mathematicumque peritissimus, me incitavit.

Ut autem pateat, quæ ratiocinatio nos ad terminorum hujus Progressionis inventionem deduxerit, sequentem propono quæstionem:

Invenire duos, tres, pluresve numeros, qui soli sumpti ut & modis omnibus additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrecentes.

Primò ad inveniendos duos hujusmodi numeros, pono pro uno 1,
& pro

& pro altero γ . Restat igitur ut soli sumpti, ut & additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrecentes. Unde, cum hinc fiant 1, $\gamma-1$, 2, & $\gamma+1$, relinquitur, ut per eos designentur numeri 1, 2, 3, & 4.

E quibus elicitur, sumendo 1 pro 1^{mo}, ad unam libram ponderandam, pro 2^{do} 2 accipiendum esse 3, hisque binis ad quatuor libras nec ultra ascendi posse.

Deinde ad inveniendos tres, pono pro 1^{mo} 1, pro 2^{do} γ , & pro 3^{io} γ . Et manifestum est, si à tertio seu majori γ abstulero duos primos 1 & 2, reliquum $\gamma-2$ indicare debere librarum numerum, omnium minimum, qui à tribus ponderibus ponderari potest, hoc est, ipsum designare debere 5 libras. Unde ad $\gamma-2$ addendo 1, designabit $\gamma-2$ sex libras. Cui rursus unitate additâ, fit $\gamma-2+1$ pro 7 libris. Huic vero si denuo addatur unitas, fiet $\gamma-2+2$, pro 8 libris designandis. Sed cum nullum pondus 2 librarum habeam, at verò ejus loco assumere possim 2, fit ut ad $\gamma-2$ addendo 2-1 summa $\gamma-1$ designet 8 libras. Ad quem si iterum unitatem addam, habebò γ ad 9 libras designandas.

Et liquet, si pro 1^{mo} quæsitum numerorum sumatur 1, & pro 2^{do} 2, 3, tunc pro 3^{io} accipiendum fore 9. Cui si ulterius addidero 1, tum $\gamma-1$, tum γ , tum $\gamma+1$: habebò $\gamma+1$, $\gamma+2-1$, $\gamma+2$, & $\gamma+2+1$, ad ordine sequentium librarum numeros 10, 11, 12, & 13, nec ultra, per inventa hæc tria pondera expendendos.

Porro ad inveniendos quatuor numeros, pono pro 1^{mo} 1, pro 2^{do} 2, pro 3^{io} γ , & pro quarto x . Et evidens est, si ab hoc quarto seu majori x sustulero tres priores 1, 2, & γ , reliquum $x-\gamma-2$ indicare librarum numerum, qui omnium minimus à quatuor ponderibus libretur; adeoque ipsum designare 14 libras. Unde quartus x facile innotescit. Etenim cum $\gamma+2+1$ & $x-\gamma-2$, indicantes 13 & 14 libras, simul additi in unam summam coalescant, quæ est x , designabit x 27 libras. Quibus igitur quatuor ponderibus, si omnia simul sumantur, usque ad 40 libr. ascendetur. Similiterque si quinque numeri quærantur, & pro quinto ponatur v , designabit $v-x-\gamma-2-1$ libras 47. Cui si addidero $x+\gamma+2+1$ 40, habebò v 87. Atque ita ulterius in infinitum.

His igitur ita se habentibus, superest ut explicemus, quo pacto ad praxin referenda sint.

Quantum itaque ad primum modum, quo libra quotlibet beneficio ponderum duplæ Progressionis ordine ponderari possunt, perinde



A } est lanx, in spondera.
 } qua collo-
 B } cari debent } merces.
 C. Sunt libræ mercium expendendæ.
 D. Sunt pondera lanci A imponendæ.
 E. Sunt pondera unâ cum mercibus
 lanci B imponenda.

Tabella prior.

C.	D
1.	①
2.	②
3.	①②
4.	④
5.	①④
6.	②④
7.	①②④
8.	⑧
9.	①⑧
10.	②⑧
11.	①②⑧
12.	④⑧
13.	①④⑧

Tabella posterior.

C.	D
1.	①
2.	③
3.	③
4.	③①
5.	②
6.	②
7.	②①
8.	②
9.	②
10.	②①
11.	②③
12.	②①
13.	②③①

E

①
③①
③
③
①
①
②
②④⑧

Tabella prior.

Tabella posterior.

C. D	C. D	E
14. $\overline{248}$	14. $\overline{27}$	$\overline{931}$
15. $\overline{1248}$	15. $\overline{27}$	$\overline{93}$
16. $\overline{16}$	16. $\overline{27}1$	$\overline{93}$
17. $\overline{116}$	17. $\overline{27}$	$\overline{91}$
18. $\overline{216}$	18. $\overline{27}$	$\overline{9}$
19. $\overline{1216}$	19. $\overline{27}1$	$\overline{9}$
20. $\overline{416}$	20. $\overline{27}3$	$\overline{91}$
21. $\overline{1416}$	21. $\overline{27}3$	$\overline{9}$
22. $\overline{2416}$	22. $\overline{27}31$	$\overline{9}$
23. $\overline{12416}$	23. $\overline{27}$	$\overline{81}$
24. $\overline{816}$	24. $\overline{27}$	$\overline{3}$
25. $\overline{1816}$	25. $\overline{27}1$	$\overline{3}$
26. $\overline{2816}$	26. $\overline{27}$	$\overline{1}$
27. $\overline{12816}$	27. $\overline{27}$	
28. $\overline{4816}$	28. $\overline{27}1$	
29. $\overline{14816}$	29. $\overline{27}3$	$\overline{1}$
30. $\overline{24816}$	30. $\overline{27}3$	
31. $\overline{124816}$	31. $\overline{27}31$	
32. $\overline{32}$	32. $\overline{27}9$	$\overline{31}$
33. $\overline{132}$	33. $\overline{27}9$	$\overline{3}$
34. $\overline{232}$	34. $\overline{27}91$	$\overline{3}$
35. $\overline{1232}$	35. $\overline{27}9$	$\overline{1}$
36. $\overline{432}$	36. $\overline{27}9$	
37. $\overline{1432}$	37. $\overline{27}91$	
38. $\overline{2432}$	38. $\overline{27}93$	$\overline{1}$
39. $\overline{12432}$	39. $\overline{27}93$	
40. $\overline{832}$	40. $\overline{27}931$	
41. $\overline{3832}$	41. $\overline{81}$	$\overline{27}931$
42. $\overline{2832}$	42. $\overline{81}$	$\overline{27}93$
43. $\overline{12832}$	43. $\overline{81}1$	$\overline{27}93$
44. $\overline{4832}$	44. $\overline{81}$	$\overline{27}91$
45. $\overline{44832}$	45. $\overline{81}$	$\overline{27}9$
46. $\overline{24832}$	46. $\overline{81}1$	$\overline{27}9$
47. $\overline{124832}$	47. $\overline{81}3$	$\overline{27}91$
48. $\overline{1632}$	48. $\overline{81}3$	$\overline{27}9$
49. $\overline{11632}$	49. $\overline{81}31$	$\overline{27}9$

Tabella prior.

C. D

50. $(\overline{2})(\overline{16})(\overline{32})$
 51. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{16})(\overline{32})$
 52. $(\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})$
 53. $(\overline{1})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})$
 54. $(\overline{2})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})$
 55. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})$
 56. $(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 57. $(\overline{1})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 58. $(\overline{2})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 59. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 60. $(\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 61. $(\overline{1})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 62. $(\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 63. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})$
 64. $(\overline{64})$
 65. $(\overline{1})(\overline{64})$
 66. $(\overline{2})(\overline{64})$
 67. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{64})$
 68. $(\overline{4})(\overline{64})$
 69. $(\overline{1})(\overline{4})(\overline{64})$
 70. $(\overline{2})(\overline{4})(\overline{64})$
 71. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{4})(\overline{64})$
 72. $(\overline{8})(\overline{64})$
 73. $(\overline{1})(\overline{8})(\overline{64})$
 74. $(\overline{2})(\overline{8})(\overline{64})$
 75. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{8})(\overline{64})$
 76. $(\overline{4})(\overline{8})(\overline{64})$
 77. $(\overline{1})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{64})$
 78. $(\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{64})$
 79. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{64})$
 80. $(\overline{16})(\overline{64})$
 81. $(\overline{1})(\overline{16})(\overline{64})$
 82. $(\overline{2})(\overline{16})(\overline{64})$
 83. $(\overline{1})(\overline{2})(\overline{16})(\overline{64})$
 84. $(\overline{4})(\overline{16})(\overline{64})$
 85. $(\overline{1})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{64})$

Tabella posterior.

C. D

E

50. $(\overline{81})$
 51. $(\overline{81})$
 52. $(\overline{81})(\overline{1})$
 53. $(\overline{81})$
 54. $(\overline{81})$
 55. $(\overline{81})(\overline{1})$
 56. $(\overline{81})(\overline{3})$
 57. $(\overline{81})(\overline{3})$
 58. $(\overline{81})(\overline{3})(\overline{1})$
 59. $(\overline{81})(\overline{9})$
 60. $(\overline{81})(\overline{9})$
 61. $(\overline{81})(\overline{9})(\overline{1})$
 62. $(\overline{81})(\overline{9})$
 63. $(\overline{81})(\overline{9})$
 64. $(\overline{81})(\overline{9})(\overline{1})$
 65. $(\overline{81})(\overline{9})(\overline{3})$
 66. $(\overline{81})(\overline{9})(\overline{3})$
 67. $(\overline{81})(\overline{9})(\overline{3})(\overline{1})$
 68. $(\overline{81})$
 69. $(\overline{81})$
 70. $(\overline{81})(\overline{1})$
 71. $(\overline{81})$
 72. $(\overline{81})$
 73. $(\overline{81})(\overline{1})$
 74. $(\overline{81})(\overline{3})$
 75. $(\overline{81})(\overline{3})$
 76. $(\overline{81})(\overline{3})(\overline{1})$
 77. $(\overline{81})$
 78. $(\overline{81})$
 79. $(\overline{81})(\overline{1})$
 80. $(\overline{81})$
 81. $(\overline{81})$
 82. $(\overline{81})(\overline{1})$
 83. $(\overline{81})(\overline{3})$
 84. $(\overline{81})(\overline{3})$
 85. $(\overline{81})(\overline{3})(\overline{1})$

Ggg

86.

Tabella prior.

Tabella posterior.

C. D	C. D	E
86. $(2\overline{4})(\overline{16})(\overline{64})$	86. $(\overline{81})\overline{9}$	$(3\overline{3})$
87. $(1\overline{2})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{64})$	87. $(\overline{81})\overline{9}$	(3)
88. $(8)(\overline{16})(\overline{64})$	88. $(\overline{81})\overline{9}\overline{1}$	(3)
89. $(1\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	89. $(\overline{81})\overline{9}$	(1)
90. $(2\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	90. $(\overline{81})\overline{9}$	
91. $(1\overline{2})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	91. $(\overline{81})\overline{9}\overline{1}$	
92. $(4\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	92. $(\overline{81})\overline{9}\overline{3}$	(1)
93. $(1\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	93. $(\overline{81})\overline{9}\overline{3}$	
94. $(2\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	94. $(\overline{81})\overline{9}\overline{3}\overline{1}$	
95. $(1\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{16})(\overline{64})$	95. $(\overline{81})(\overline{27})$	$(9\overline{3})\overline{3}$
96. $(\overline{32})(\overline{64})$	96. $(\overline{81})(\overline{27})$	$(9\overline{3})$
97. $(1)(\overline{32})(\overline{64})$	97. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{1}$	$(9\overline{3})$
98. $(2)(\overline{32})(\overline{64})$	98. $(\overline{81})(\overline{27})$	$(9\overline{1})$
99. $(1\overline{2})(\overline{32})(\overline{64})$	99. $(\overline{81})(\overline{27})$	(9)
100. $(4)(\overline{32})(\overline{64})$	100. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{1}$	(9)
101. $(1\overline{4})(\overline{32})(\overline{64})$	101. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}$	$(9\overline{1})$
102. $(2\overline{4})(\overline{32})(\overline{64})$	102. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}$	(9)
103. $(1\overline{2})(\overline{4})(\overline{32})(\overline{64})$	103. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}\overline{1}$	(9)
104. $(8)(\overline{32})(\overline{64})$	104. $(\overline{81})(\overline{27})$	$(3\overline{1})$
105. $(1\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	105. $(\overline{81})(\overline{27})$	(3)
106. $(2\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	106. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{1}$	(3)
107. $(1\overline{2})(\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	107. $(\overline{81})(\overline{27})$	(1)
108. $(4\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	108. $(\overline{81})(\overline{27})$	
109. $(1\overline{4})(\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	109. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{1}$	
110. $(2\overline{4})(\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	110. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}$	(1)
111. $(1\overline{2})(\overline{4})(\overline{8})(\overline{32})(\overline{64})$	111. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}$	
112. $(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	112. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{3}\overline{1}$	
113. $(1)(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	113. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}$	$(3\overline{3})$
114. $(2)(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	114. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}$	(3)
115. $(1\overline{2})(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	115. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}\overline{1}$	(3)
116. $(4)(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	116. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}$	(1)
117. $(1\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	117. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}$	
118. $(2\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	118. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}\overline{1}$	
119. $(1\overline{2})(\overline{4})(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	119. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}\overline{3}$	(1)
120. $(8)(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	120. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}\overline{3}$	
121. $(1\overline{8})(\overline{16})(\overline{32})(\overline{64})$	121. $(\overline{81})(\overline{27})\overline{9}\overline{3}\overline{1}$	

C. D.

122. $(2 \frac{1}{2}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$
 123. $(1 \frac{1}{2}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$
 124. $(\frac{1}{4}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$
 125. $(1 \frac{1}{2}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$
 126. $(2 \frac{1}{2}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$
 127. $(1 \frac{1}{2}) S(\frac{1}{16})(\frac{1}{32})(\frac{1}{64})$

S E C T I O IX.

Ratio inveniendi numeros amiables, hoc est, duos numeros, quorum partes aliquotæ, cum adduntur, eos ipsos vice versâ componunt.

Sunt qui existimant, plures operationes Arithmeticas reperiri, quæ Algebræ non subjiciantur, inter quos est Arithmeticus haud ignobilis Michael Stifelius, qui in commentariis suis super Algebra Christophori Rudolphi, post resolutionem quæstionum, quæ ad Cubicam Equationem ascendunt, hæc scribit:

„ Wie wol aber ein jede Cosi einen unaussprechlichen begriff hat
 „ in sich allerley künstlicher rechnung/ dennoch findet man viel seiner
 „ rechnung welche der Cosi nicht sind underworfen/ sondern neben
 „ der Cosi fließen auß der Theorica / welche ich wol wolte mit vielen
 „ seynen Exempeln beweisen / wil es aber hie bey einem oder zweyen
 „ Exempeln beruhen lassen.

Quorum sensus hic est:

At licet resolutio æquationis cujusque gradus ineffabilem usum habeat expediendi quemlibet artificiosum calculum, nihilominus tamen multa egregia supputationes reperiuntur, quæ Algebra non sunt obnoxia, sed citra eam ex Theorica fluunt, quod multis utique elegantibus exemplis demonstrare possem, nisi id uno aut altero exemplo ostendisse sufficeret.

Est autem primum, quod in eum finem adfert, hujusmodi.

Quare duos numeros, ita ut partes omnes aliquotæ minoris simul additæ faciant majorem numerum, & partes omnes aliquotæ majoris simul additæ faciant minorem numerum.

Quapropter cum ego longè aliter statuendum esse putem, ostendam quo pacto Algebræ beneficio non tantum duos hosce numeros reperire in procinctu sit; sed etiam quisnam sit progressus in infinitum

Ggg 2

tum

tum investigandi semper alios duos, qui idem præstent; siquidem hoc id ipsum est, quod præsens Sectio innuit.

Ad quos igitur inveniendos, pono pro uno numero $4x$, & pro altero $4yz$, hoc est, a^2x & a^2yz .

Unde cum per 1^{am} Sectionem partes aliquotæ ipsius $4x$ sint 1, 2, 4, x , & $2x$: erit $7 + 3x \propto 4yz$

$$\text{ \& fit } x \propto \frac{4yz - 7}{3}$$

$$\text{ adeoque } 4x \propto \frac{16yz - 28}{3}.$$

Eodem modo, cum partes aliquotæ ipsius $4yz$ sint 1, 2, 4, y , $2y$, $4y$, z , $2z$, $4z$, yz , & $2yz$:

$$\text{ erit } 4x, \text{ hoc est, } \frac{16yz - 28}{3} \propto 7 + 7y + 7z + 3yz$$

$$\text{ Unde, reducâ æquatione, invenitur } y \propto \frac{3z + 7}{z - 3}, \text{ seu } 3 + \frac{16}{z - 3},$$

$$\text{ Vel etiam } z \propto \frac{3y + 7}{y - 3}, \text{ seu } 3 + \frac{16}{y - 3}.$$

Hinc cum, pro y assumpto primo numero 5, pro z inveniat primus 11, & pro x primus 71, è quibus $4x$ fit $\propto 284$, & $4yz \propto 220$: patet, quæsitos numeros fore 284 & 220.

Jam verò ut constet num & minores duo numeri quàm 284 & 220 inveniri possint, qui idem præstent, pono pro uno numero $2x$, & pro altero $2yz$, hoc est, ax & ayz .

Vnde cum operando, ut supra, inveniat $x \propto 2yz - 3$,

$$\text{ \& } y \propto 1 + \frac{4}{z - 1},$$

$$\text{ vel } z \propto 1 + \frac{4}{y - 1}:$$

patet, si pro y sumatur primus numerus 5, tunc pro z inveniri primum 2, & pro x primum 17. Verùm quia sic pro z idem fit numerus 2, qui hypothesium $2x$ & $2yz$, quique has easdem destruit, ac in locum ax & ayz substituit ax & ayy : evidens fit inventis hisce numeris quæsito non satisfactum iri. Quare cum sumendo pro y alium primum numerum, ut 3, tunc pro z etiam inveniat 3, quod perinde

po-

positiones convertit, præterquam quod eo casu x quoque non sit primus; nec præter jam assumptos ullos alios assumere liceat (siquidem pro y , unde z & x sunt inveniendæ, talis primus numerus assumi debet, ut, ab eo sublatâ unitate, reliquum dividere possit 4): argumentum est, juxta præcedentem viam, minores duos numeros quàm supra inventos 284 & 220 non reperiri.

Sed dicet aliquis eos fortè aliâ viâ inventum iri, utpote pro iis ponendo $2x$ & yz , hoc est, $4x$ & yz ; vel etiam xy & xyz . Verùm cum juxta priorem hanc suppositionem inve-

niatur $z \propto \frac{y+7}{2y-1}$, & juxta posteriorem $1+x+y+z+xy$

+ xz + $yz \propto xy$; illic autem pro y nullus primus numerus assumi possit, ut inde z & x reperiantur, quales requiruntur; hîc verò æquatio omnino sit impossibilis, idemque hoc in quavis alia suppositione contingat: concludo 284 & 220 esse omnium eorum, qui inveniri possunt, minimos.

Porro ut quærantur duo alii majores, pono pro uno numero $8x$ & pro altero $8yz$, hoc est, 4^2x & 4^2yz : invenieturque, operando ut

$$\text{ante, } x \propto \frac{8yz-15}{7}$$

$$\& y \propto 7 + \frac{64}{z-7}$$

$$\text{vel } z \propto 7 + \frac{64}{y-7}. \text{ Unde sumendo } y \propto 11, \text{ erit } z \propto 23, \& x$$

$\propto 287$. qui numerus non est primus. Hinc sumendo $y \propto 23$, cum pro z inveniatur 11, & pro x idem numerus, qui ante, nec pro y ullus alius primus numerus assumi possit, ita ut inde z & x reperiantur, ut requiritur: constat juxta hanc hypothesein quæsitos numeros non inveniri.

Pergo itaque, ponendo pro uno numero $16x$, & pro altero $16yz$, hoc est, 4^3x & 4^3yz . Unde juxta superiorem modum invenitur

$$x \propto \frac{16yz-31}{15}$$

$$\& y \propto 15 + \frac{256}{z-15}$$

Ggg 3

vel

mus numerus primus per duplum numeri assumpti, Fiet numerus, cujus partes aliquotæ dabunt alium numerum, qui vice versâ partes aliquotas habebit æquales primo numero præcedenti.

I. Exemplum.

Sic assumendo binarium

2 binarius	2	2
per 3	per 6	2
6 ejus triplum.	12 ejus sextuplum.	4 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	toll. 1 unitas	per 18
5 num. primus.	11 num. primus.	72 ejus octodecuplum
		tollatur 1 unitas
		71 numerus primus.
		per 4 duplū numeri assumpti
		284 unus numerus quæsitus.

Alius autem numerus quæsitus producetur multiplicando duos primos inventos numeros primos unum per alterum, & productum per duplum assumpti.

Ergo. 5 numerus primus prior.
 per 11 numerus primus alter.
 55 productum
 per 4 duplum assumpti
 220 alter numerus quæsitus.

2. Ex.

Assumatur numerus

2. Exemplum.

8	8	8
per 3	per 6	8
24 ejus triplum.	48 ejus sextuplum.	64 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	tollatur 1 unitas	per 18
23 numerus	47 numerus pri-	512
primus prior.	23 mus alter.	64
	141	1152 ejus octodecuplum
	94	tollatur 1 unitas
	1081 productum.	1151 numerus primus 3 ^{cius}
per 16 duplum af-	per 16 duplum assumpti	
6486 sumpti.	6906	
1081	1151	
17296 alter nume-	18416 unus numerus quar-	
rus quæsitus.	situs.	

3. Exemplum.

Et sumendo 64, quia 191, 383, & 73727 sunt numeri primi, habeo numeros 9437056 & 9363584. Et sic de cæteris.

Ecce sequentem operationem.

64 Assumptus num.	64	64
per 3	per 6	64
192 ejus triplum.	384 ejus sextuplū.	256
tollatur 1 unitas	tollatur 1 unitas	384
191 numerus primus	383 num. primus	4096 ejus quadra-
prior.	191 alter.	per 18 tum.
	383	32768
	3447	4096
	383	73728 ejus octodecu-
		tollatur 1 unitas plum.
	73153 productum.	73727 num. prim. tert.
per 128 duplum af-	per 128 duplū assumpti.	
585224 sumpti.	589816	
146306	147454	
73153	73727	
9363584 alter num.	9437056 unus num.	
quæsitus.	quæsitus.	
11hh	Cuu	

Cum plures de partibus aliquotis quæstiones per Algebram enodare, perfectorumque numerorum naturam auxilio ejus exponere hic decrevissem, ne tamen aliorum operam, quam ea in re collocasse post deprehendi, frustrare viderer, prætermittere id æquum duxi. Cum enim, sicut Mercennus refert in Reflexionibus suis Physico-Mathematicis, Vir Eximius D. Freniclius de numeris figuratis, primis, compositis, &c. tria volumina conscripserit, quæ nondum (quod sciam) in lucem prodire: præstolari illa satius mihi visum est, quàm plura afferendo mea ipsius inventis antepondere. His adde quòd inter Cartesii monumenta, de quo supra memini, tractatus etiam extet, qui de partibus aliquotis inscribitur, cujus item editionem ut & reliquorum ipsius scriptorum à munificentia Viri Excellentissimi, D. PETRI CHANUT, harum Scientiarum peritissimi, penes quem illa religiosè asservantur, expectamus, quàm primùm graviora ejus munera id permittent. Quocirca ne tantorum Virorum inventis invidere, propriam quærendo gloriam, quin potiùs in iisdem promovendis operam conferre censear: placuit ea pauca, quæ de partibus aliquotis ac divisoribus tradidi (tanquam aditum ad illa) præmittere, donec illorum scripta impetremus.

S E C T I O X.

De modo inveniendi triangula, quorum singula latera, segmenta basis & perpendicularis exprimentur per numeros rationales absolutos.

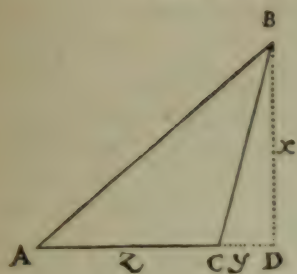
HOc Problema duos casus habet, perpendicularis enim aut cadit extra, aut intra triangulum.

1. casus, in quo perpendicularis cadit extra.

Igitur ad solvendum primum casum, pro basi A C pono z , pro perpendiculari B D x , & pro segmento externo C D y : unde segmentum A D fit $z + y$.

Quibus ita positis, cum quadratum ex C B sit æquale binis quadratis ex C D, D B, erit $xx + yy$ æquale \square^{10} . Est quadrato à latere $y + b$: eritque $xx + yy \propto yy + by + bb$. Hoc est, dempto utrinque yy , & ordinatâ æquatione ita ut y reperiatur sola, fiet $y \propto \frac{xx - bb}{2b}$.

Simi-



Similiter, quoniam quadratum ex AB æquale est binis quadratis ex AD, DB, erit $xx + zz + 2zy + yy$ æquale \square^{10} . Hujus autem latus fingatur esse $z + y + a$, eritque $xx + zz + 2zy + yy = zz + 2zy + yy + 2az + 2ay + aa$. Hoc est, rejectis utrobique $zz + 2zy + yy$, & $2az + 2ay$ in alteram partem transpositis, erit $xx - 2az - 2ay = aa$. Substitua-

tur jam in locum y valor ejus inventus, & fit $xx - 2az - 2ay = \frac{axx - abb}{b}$. Tum multiplicato utrinque per b , & translatis terminis, ita ut quantitas z unam obtineat æquationis partem: habebitur $z = \frac{bxx - axx + abb - aab}{2ab}$.

Ubi patet, fumendo x, b , & a ad libitum, quo pacto inveniantur y & z . Unde porro facile est invenire AB & BC. Cum enim pro latere quadrati, cui quadratum ex CB adæquatum est, statuerimus $y + b$: erit ipsa CB $= \frac{xx + bb}{2b}$; & AB, cujus quadratum quadrato ex $z + y + a$ æquiparatum est, $= \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ad communem denominatorem ab reductis, si ipse deinde omittatur, fiet pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx - axx + abb - aab$.

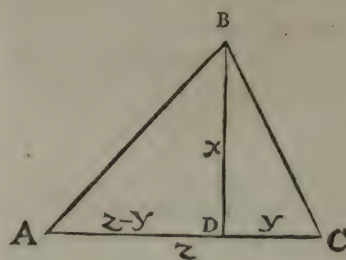
Hinc, assumptis pro x, b , & a quantitibus utcunque, ita tamen ut b & a singulæ ipsæ sint minores, liquet, quâ ratione quis tot triangula constituere possit, quot voluerit, quorum singula latera, & perpendicularis cadens extra, nec non basis segmenta per rationales numeros absolutos exprimantur.

Etenim si pro x sumatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $= 2abx = 12$, segmentum CD $= axx - abb = 5$, segmentum AD $= bxx - baa = 16$, unde basis AC fit 11; latus autem CB $= axx + abb = 13$, & latus AB $= bxx + baa = 20$. Et sic de aliis.

Hh h 2

2 dus

2^{us}. casus, in quo perpendicularis cadit intra.



Quod ad secundum casum attinet, is eodem modo resolvitur atque primus. Si enim, ut supra, basin AC ponamus $\propto z$, perpendicularem BD $\propto x$, & segmentum DC $\propto y$: erit segmentum AD $\propto z-y$.

His ita constitutis, cum quadratum ex CB æquetur duobus quadratis ex CD, DB: erit xx

+ yy æquale \square^o . Hinc ponendo pro ejus latere $y+b$, habebitur $xx + yy \propto yy + ^2by + bb$. Et fit, ut ante, $y \propto \frac{xx-bb}{2b}$.

Eodem modo, quia quadratum ex AB tantundem valet atque duo quadrata ex AD & DB: erit $xx + zz - ^2zy + yy$ æquale \square^o . Pro cuius radice si ponamus $z-y+a$, habebitur $xx + zz - ^2zy + yy \propto zz - ^2zy + yy + ^2az - ^2ay + aa$. Et fit $2ay \propto aa + ^2az - xx$. Unde subrogando valorem ipsius y invenietur $z \propto \frac{bxx + axx - abb - aab}{2ab}$.

Ubi, ut supra, patet, sumendo x, b , & a pro lubitu, quâ ratione inveniri possint y & z . E quibus porro nullo negotio inveniuntur AB & BC. Nam cum pro latere quadrati, cui quadratum ex CB æquale suppositum est, statuerimus $y+b$: erit ipsa CB $\propto \frac{xx+bb}{2b}$, & AB, cuius quadratum quadrato à radice $z-y+a$ adæquatum est, $\propto \frac{xx+aa}{2a}$.

Quibus omnibus sub eodem denominatore $2ab$ reductis, fiet, ipso deinde rejecto, pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx + axx - abb - baa$.

Unde, assumptis utcumque quantitatibus x, b , & a , ita tamen ut b & a singulæ minores sint quàm x , liquet, quo pacto ex iis triangula constitui possint, quorû latera singula, & perpendicularis cadens intra, nec non basis segmenta per num. rationales absolutos exprimantur.

Si enim pro x accipiaturs 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto 2abx \propto 12$, segmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, segmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde basis AC fit 21, latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et sic de aliis. Idem

*Idem aliter per disjunctionem & conjunctionem duorum
triangulorum rectangulorum.*

PRIMò igitur, ut inveniatur triangulum, in quo perpendicularis cadit extra, patet ex ostensis, accipiendo pro libitu duas quantitates x & b , quâ ratione ex iis inveniri possit triangulum rectangulum, quale superius CBD, cujus latera sint rationalia. Sumendo nempe latus unum circa rectum seu perpendicularem BD $\propto x$, & latus alterum seu basin DC $\propto \frac{xx - bb}{2b}$, hypotenusam verò BC $\propto \frac{xx + bb}{2b}$. Hoc est, in integris, multiplicando ubique per denominatorem $2b$, fiet, ipso deinde rejecto, perpendicularis $\propto 2bx$, basis $\propto xx - bb$, & hypotenusam $\propto xx + bb$.

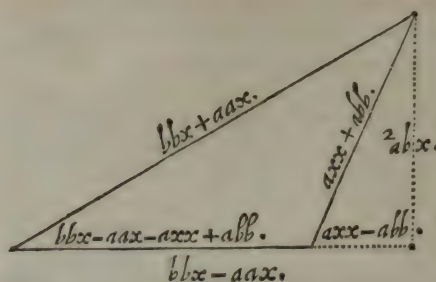
Haud secus assumptis ad libitum duabus quantitatibus b & a , invenietur ex iis alterum triangulum, cujus perpendicularis est $\propto 2ab$, & basis $\propto bb - aa$, hypotenusam verò $\propto bb + aa$.

Jam ut ex binis hisce inventis triangulis tertium efformetur, cujus perpendicularis extra cadat, quæque ut & singula ipsius latera & basis segmenta absolutis numeris exprimatur, reduco ipsa ad eandem altitudinem. quod fit querendo quantitatibus $2bx$ & $2ab$, perpendicularibus assignatis, quantitatem $2abx$, minimam scilicet, quæ per eas sine reliquo dividi potest. Hæc enim inventâ, si $2abx$ per $2bx$ & $2ab$ dividatur, & ortæ quantitates a & x per suas bases & hypotenusas multiplicentur: invenietur $axx - abb$ pro base, & $axx + abb$ pro hypotenusâ unius trianguli; at $bbx - aax$ pro basi, & $bbx + aax$ pro hypotenusâ alterius trianguli, quorum utriusque altitudo seu perpendicularis est $2abx$. Quæ duo triangula si ab eadem porro perpendicularis parte constituta intelligantur, mutuâ suâ disjunctione triangulum referent, quod queritur. Ipsum autem est quale sequitur.

Deinde, ad inveniendum triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quoniam sumendo pro libitu duas quantitates c & y , per eas obtinetur triangulum rectangulum, cujus perpendicularis est $2cy$, basis $cc - yy$, & hypotenusam $cc + yy$; similiterque assumptis y & a per eas alterum invenitur, cujus perpendicularis est $2ay$, basis $yy - aa$, & hypotenusam $yy + aa$: fit, ut si hæc ipsa ad eandem postea altitudinem reducta fuerint, quæsitum triangulum ex iis constituatur.

Hhh 3

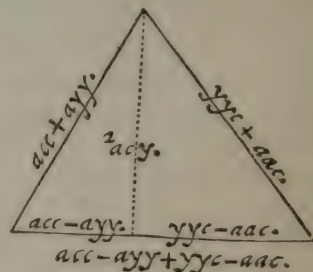
Quo-



Quocirca cum minima quantitas, quæ per $2cy$ & $2ay$ divisibilis est, sit $2acy$; & dividendo $2acy$ per $2cy$ fiat a ; at $2acy$ per $2ay$ fiat c ; ideo multiplicando $cc - yy$ & $cc + yy$ per a , fiet $acc - ayy$ pro base, & $acc + ayy$ pro hypotenusa unius trianguli;

at verò $yy - aa$ & $yy + aa$ per c , fiet $yyc - aac$ pro base, & $yyc + aac$ pro hypotenusa alterius trianguli. Quorum itaque communis altitudo seu perpendicularis est $2acy$.

Hinc si bina hæc triangula conjunctim posita intelligantur, hoc est, ut unum ab una parte perpendicularis, & alterum ab altera parte reperitur, component triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quæ haud aliter atque singula ipsius latera ac basis segmenta per absolutos numeros rationales exprimeantur. Ipsum autem tale est.



SECTIO XI.

Modus inveniendi duo triangula ejusdem basis & altitudinis, quorum singula latera, basis segmenta, & perpendiculares exprimantur per numeros rationales integros.

Problema hoc per antecedens resolvitur, ad id nempe binis huc revocatis præcedentibus triangulis, cum quantitibus adscriptis. Primò enim, quia invenienda hæc triangula ejusdem altitudinis requi-

requiruntur, habebitur æquatio inter $2abx$ & $2acy$. Unde pro x invenitur $\frac{cy}{b}$ & pro xx $\frac{ccy}{bb}$.

Deinde cum ipsa ejusdem quoque basis existere debeant, erit similiter $bbx - aax - axx + abb$ æquale $acc - ayy + yyc - aac$. Unde subrogatis valoribus ipsius x & xx , fit $\frac{bbc - aacy}{b} - \frac{accyy}{bb} + abb \propto acc - ayy + yyc - aac$. Multiplicetur ubique per bb , & æquatio ritè ordinetur, fietque:

$$\begin{array}{r} yy \propto + b^2cy + aabbc \\ - aabc + ab^2 \\ - abbc \\ \hline bbc + acc - abb. \end{array}$$

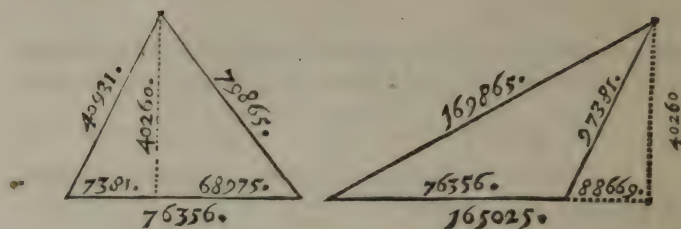
Jam ut in hac æquatione evitetur radicis extractio, supponatur $aabbc + ab^2 \propto abbc$: invenieturque $a \propto c - \frac{bb}{c}$. Quoniam autem sum-

mendo c & b ad libitum, per eas invenimus reliquas quantitates a , y , & x , statuendo nempe c majorem quàm b : fiet, ut, si accipiamus $c \propto 3$, & $b \propto 2$, pro a reperiat $\frac{1}{3}$, pro y $\frac{2}{3}$, & pro x $\frac{3}{6}$. E quibus inde facile est singula utriusque trianguli latera reperire, quemadmodum etiam basis segmenta, & perpendicularem. In priori namque triangulo fiet $2abx \propto \frac{180}{183}$, $axx - abb \propto -\frac{68975}{11163}$, $axx + abb \propto \frac{79865}{11163}$, $bbx - aax \propto \frac{121}{183}$, & $bbx + aax \propto \frac{671}{183}$. In posteriori verò triangulo, fiet $2acy$, ut ante, $\propto \frac{660}{183}$, $acc - ayy \propto \frac{165025}{11163}$, $acc + ayy \propto \frac{169865}{11163}$, $yyc - aac \propto -\frac{88669}{11163}$, & $yyc + aac \propto \frac{97381}{11163}$.

Porro ne quem moveat, quòd lineæ hæc repertæ sint, quæ nihilo sunt minores, perinde ac si solutio illegitima aut absurda foret, advertendum est, ipsas tantùm hoc casu in plus convertendas esse, easdemque ad alteram partem perpendicularis sumendas; ita ut in priori triangulo perpendicularis intra cadat, & in posteriori extra, commutando videlicet unum triangulum in alterum: siquidem sic inventa triangula quæsito omnino respondent.

Cæterùm si velimus, ut lineæ hæc omnes inventæ absolutis numeris exprimantur: oportet duntaxat illas sub communi denominatore reducere, qui est 6.61.3 seu 11163 & eundem postea ubique rejicere. Unde bina hæc emergunt triangula:

Eodem



Eodem modo infinita alia triangulorum paria invenire licet.

Ad hæc notatu dignum, ex allatis facile esse invenire trapezium, ejus duo latera sint parallela, & in quo utraque diagonalis & perpendiculares, ex angulis in opposita latera demissæ, perinde atque singula ipsius latera, eorumque ac diagonalium segmenta, rationales existant.

SECTIO XII.

Solutio Problematis, quod anno 1633 Parisiis palàm fuit propositum, qualem illam adinvenit Vir illustris

R. des CARTES.

Est autem tale.

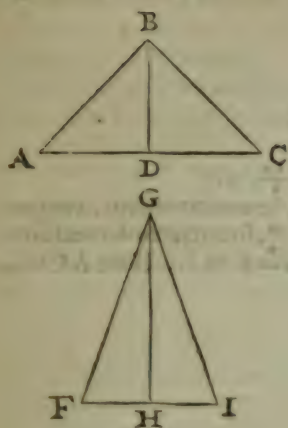
Invenire duo triangula æquicrura ejusdem areæ & ambitus, quorumque singula latera & perpendiculares sint inter se ut numerus ad numerum.

Sequitur solutio.

Primò quia latera debent exprimi numeris absolutis, pro latere AB pono $aa + bb$, & $2ab$ pro AD. Unde DB erit $aa - bb$, & ambitus $2aa + 2bb + 2ab$.

In secundo autem triangulo, si ponatur eodem modo FG $\propto kk + dd$, FB $\propto 2kd$, & HG $\propto kk - dd$; erit ambitus trianguli FGI $\propto 2kk + 2dd + 2kd$.

Unde



Unde patet $k+d$ & $a+b$ radices quantitatum $kk+dd+2kd$ & $aa+bb+2ab$ esse æquales.

Ac proinde in secundo triangulo, quia k ignoratur, ut & d , ponatur $a+x$ pro k , & $b-x$ pro d : eritque $FH \propto 2ab - 2ax + bx - xx$, & $HG \propto aa - bb + ax + bx$. quæ in se invicem ducta produciunt aream trianguli $FGI \propto 2ab - a^2x + aabx - 6aaxx - a^2b^2 + abbx - b^2x + 6bbxx - 4ax^2 - bx^2$. Quæ summa æquatur areæ prioris trianguli, quæ est $2a^2b - a^2b^2$.

Itaque demptis utrinque æqualibus $+2a^2b$, & additis $-a^2b^2$, & ponendo singula sub contrario signo: erit $4ax^2 + bx^2 + aaxx - 6bbxx + a^2x + b^2x - aabx - 6abbx \propto 0$.

Quod totum dividi potest per $4ax + 4bx$.

Eritque $xx + \frac{3a}{2}x - \frac{3b}{2}x + \frac{1}{2}aa - a^2b + \frac{1}{2}bb \propto 0$.

Sive $xx \propto -\frac{3a}{2}x + \frac{3b}{2}x - \frac{1}{2}aa + a^2b - \frac{1}{2}bb$.

Unde $x \propto \frac{-3a+3b}{4} + \frac{\sqrt{aa+14ab-bb}}{16}$.

Quia verò x numerus rationalis esse debet, necessum est, ut $aa + 14ab + bb$, rejecto denominatore, sit numerus quadratus. Igitur ponimus radicem ejus esse $a+b+c$, ubi c & b cognita præsupponuntur, a verò ignoratur.

Proinde $aa + a^2b + a^2c + bb + bc + cc \propto aa + 14ab + bb$.

Et fit $a \propto \frac{2bc+cc}{12b-c}$.

Quilibet ergo numerus pro b & c sumi potest, modò a exurgit major quam b : quia superius erat $aa - bb$.

Ut si faciam $b \propto 1$, & $c \propto 3$: habebō $a \propto \frac{5}{2}$.

lil

Ut

Ut verò eliciatur x , respiciendum est ad æquationem: $x \propto -$
 $\frac{3a+3b+\sqrt{aa+14ab+bb}}{4}$

Eritque $x \propto \frac{1}{2}$
 $a \propto \frac{1}{2}$. ergo $aa \propto \frac{1}{4}$
 $b \propto 1$. ergo $bb \propto 1$
 $\& ab \propto \frac{1}{2}$. unde $2ab \propto \frac{10}{2}$, vel 5.

Reducantur fractiones ad eandem denominationem, eritque in
 priori triangulo $AB \propto aa+bb \propto \frac{25}{4} + \frac{4}{4}$, sive, rejecto denominatore,
 $\propto 29$; $\& AD \propto 2ab \propto 20$; $\& DB \propto aa-bb \propto 21$. Unde AC fit 40,
 $\&$ ambitus 98, $\&$ area 420.

In posteriori verò triangulo

$$k \propto a+x \propto 3$$

$$d \propto b-x \propto \frac{1}{2}$$

$$kk \propto 9$$

$$dd \propto \frac{1}{4}$$

$$\text{Unde } kk+dd \propto \frac{37}{4}$$

$$kk-dd \propto \frac{35}{4}$$

$$\& kd \propto \frac{15}{4}$$

Et rejectis denominatoribus:

$$\text{Erit } FG \propto kk+dd \propto 37$$

$$HG \propto kk-dd \propto 35$$

$$\& FH \propto kd \propto 12. \text{ Unde FI erit } \propto 24.$$

Ambitus ergo erit 98, $\&$ area 420, ut ante.

SECTIO XIII

Quæstio XIX, libri V Arithmeticonum Diophanti.

Invenire tres numeros, ut cubus summæ eorum, quo-
 vis ipsorum detracto, faciat cubum.

Quæstionis hujus solutio à Diophanto perplexè tradita, cum ab
 acutissimo Arithmetico, Ludolpho à Collen, Matheseos olim
 in alma hac Universitate Professore ac prædecessore meo, aliter inven-
 ta fuerit: haud ingratum autè re fore judicavi, si eam qualem ex ipsius
 literis,

literis, benevolentia sapius laudati Viri, D. Nicolai Huberti à Persijn, addiscere mihi licuit, (cui cum illo magna intercessit familiaritas) paucis hinc exponerem.

Pono pro numerorum summa $4N$, eritque cubus summae $64C$. Dehinc ponendo pro primo numero $56C$, pro secundo $37C$, & pro tertio $63C$: fiet, singulis hisce ex $64C$ sublati, pro 1^{mo} reliquo $8C$, pro 2^{do} reliquo $27C$, & pro 3^{io} reliquo $1C$. Qui omnes cubi sunt.

Porro additis $56C$, $37C$, & $63C$, erit summa $156C$ æqualis $4N$. Dividatur utrinque per $4N$, & fit $39Q$ æquale 1 .

Jam si hic numerus 39 quadratus fuisset, soluta esset quaestio. Cum autem quadratus non sit, pro lateribus cuborum, qui relinqui debent, pono $1N-1$ pro latere primi, $4-1N$ pro latere secundi, & 2 pro latere tertii. Quorum cubi, $1C-3Q+3N-1$, $64-48N+12Q-1C$, & 8 , sigillatim à 64 subducti, relinquunt numeros $65+3Q-1C-3N$, $48N+1C-12Q$, & 56 .

Quoniam verò trium horum numerorum summa est $121+45N-9Q$: erit $121+45N-9Q$ æquale 4 . & fit $\frac{121+45N-9Q}{4}$ æquale 1 . Restat itaque ut $\frac{121+45N-9Q}{4}$ sit quadratus. Pono pro

ejus latere $\frac{11+1N}{2}$. Eritque $\frac{121+22N+1Q}{4} = \frac{121+45N-9Q}{4}$

Et fit $1N = \frac{33}{10}$. Posueram autem $1N-1$ pro latere 1^{mi} cubi, $4-1N$ pro latere 2^{di} , & 2 pro latere 3^{ti} . Erunt igitur ipsa latera $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, & 2 . Horum cubi sunt $\frac{2197}{1000}$, $\frac{4913}{1000}$, & 8 . Qui singuli ex 64 subducti, relinquunt numeros $\frac{61803}{1000}$, $\frac{59087}{1000}$, & 56 .

Inventi itaque sunt tres numeri, qui singuli ex 64 detracti relinquunt cubos, & in unam summam collecti faciunt quadratum.

Hinc supposita, ut supra, pro summa quaestitorum numerorum $4N$, & pro ejus cubo $64C$, pono jam pro 1^{mo} numero $\frac{61803}{1000}C$, $\frac{59087}{1000}C$ pro 2^{do} , & $56C$ pro 3^{io} , fit eorum summa $\frac{126899}{1000}C$ æqualis $4N$. Hoc est, $\frac{126899}{4000}$ æquale 1 . Unde $1N$ fit $\frac{3172475}{10000}$, ac proinde $1C = \frac{3172475}{2312637}$. Id quod ductum in $\frac{61803}{1000}$, dat $\frac{474434}{3172637}$ pro 1^{mo} numero, & ductum in $\frac{59087}{1000}$, dat $\frac{472696}{3172637}$ pro 2^{do} numero, ac denique ductum in 56 , dat $\frac{448000}{3172637}$ pro 3^{io} numero. Et manifestum est, his additis, summam fore $\frac{1415128}{3172637}$ seu $\frac{80}{100}$ æqualem $4N$. A cujus cubo $\frac{1415128}{3172637}$ si auferas $\frac{494434}{3172637}$, $\frac{472696}{3172637}$, & $\frac{448000}{3172637}$, relinquentur cubi $\frac{2197}{3172637}$, $\frac{4913}{3172637}$, & $\frac{52}{3172637}$. Quorum latera sunt $\frac{13}{133}$, $\frac{17}{133}$, & $\frac{2}{133}$. Con-

stat ergo, numeros ritè esse inventos. Cujus rei soli Deo debetur gloria.

Cæterùm sciendum, quæstionem hanc convenire cum quæstione 68, quæ una ex centum illis existit, quas supra dictus Arithmeticus Ludolphus à Collen ad solvendum proposuit in libro suo de Circulo, Belgicè edito, quarum sequens 69 ejusdem est argumenti, nempe:

Invenire quatuor numeros, ita ut, si à cubo eorum summa ipsi sigillatim auferantur, reliqui sint cubi.

Cujus enodatio cum eadem arte atque præcedentis obtineri queat, satis duxi numeros duntaxat, quales à Nicolao Huberti inventi sunt, hic ascribere.

Sunt autem tales: $\frac{867160}{4657463}, \frac{787400}{4631463}, \frac{13527640}{12571501}, \& \frac{14087528}{12571501}$,
aut $\frac{12172736}{64481201}, \frac{11296132}{64481201}, \frac{9112168}{64481201}, \& \frac{4724776}{64481201}$. Alios verò
tres, quos præter tres Ludolphi numeros invenit, sunt $\frac{15817815000}{86526834967},$
 $\frac{9568112000}{86526834967}, \& \frac{8925120000}{86526834967}$. Qui quoque quæstione de duo-
bus tantum numeris proposita, hosce adinvent numeros $\frac{37}{121}, \& \frac{63}{121}$,
aut $\frac{175608}{493039}, \& \frac{173888}{493039}$; aut etiã $\frac{105045092893}{692214679736}, \& \frac{14854859747}{692214679736}$.
Et sic de aliis.

SECTIO XIV.

De Progressionibus Arithmeticis.

Quoniam in his Progressionibus termini eodem continuè excessu se mutuò excipiunt, fit, ut in iis quinque præcipuè spectanda veniant: nimirum, vel minor terminus, vel major, vel excessus Progressionis, vel multitudo terminorum, vel eorundem denique aggregatum. Quocirca, ut earum doctrina ritè pertractetur, visum fuit earundem constitutionem ex origine sua deducere, atque rem omnem paucis ob oculos ponere.

Hunc in finem inspiciatur sequens Progressio $a. a+b. a+^2b.$
 $a+^3b. a+^4b.$ in qua quinque sunt termini, quorum minor designatur per a , major per $a+^4b$, & in qua b Progressionis excessus existit.

Quibus positis, patet majorem terminum $a+^4b$ componi ex minori a , & ex $4b$, Progressionis excessu toties sumpto, quot sunt termini

mini minus 1. Quod idem de quocunque terminis intelligendum est.

Hinc, datis minore extremo, Progressionis excessu, & multitudine terminorum, invenietur major extremus, si multitudo terminorum multata unitate ducatur in Progressionis excessum, & productum addatur minori.

Datis autem majori extremo, Progressionis excessu, & multitudine terminorum, invenietur minor extremus, auferendo idem productum à majori.

Deinde datis extremis, & multitudine terminorum, invenietur Progressionis excessus, si extremorum differentia per multitudinem terminorum minus 1 dividatur.

Datis verò extremis, & Progressionis excessu, invenietur multitudo terminorum, si divisâ hâc extremorum differentiâ per Progressionis excessum, ei quod oritur addatur unitas. Quæ quidem omnia ex diligenti Progressionis inspectione manifesta sunt.

Postea, quoniam in omnibus terminis ejusdem Progressionis reperitur a , & bin singulis post primum deinceps semel amplius conspicitur quàm in proximè antecedentibus, fit ut, si extremi a & $a + 4b$ simul addantur, tantundem fiat atque si addantur $a + b$ & $a + 3b$, ab extremis æq. è remoti; aut etiam atque medius $a + 2b$ bis sumptus, si multitudo terminorum (ut hic) impar fuerit. Id quod similiter de quocunque aliis terminis est accipiendum. Unde constat, si extremis datis, & multitudine terminorum, horum omnium aggregatum sit inveniendum: opus tantum esse extremorum summam multiplicare per semissem multitudinis terminorum.

Hinc si extremi fuerint a & e , & multitudo terminorum i , quæraturque eorundem aggregatum y : erit $y = \frac{ai + ei}{2}$.

Datis autem extremis a , e , & aggregato terminorum y , ad inveniendam multitudinem terminorum i , quoniam y æquatur $\frac{ai + ei}{2}$ hoc est, multiplicando utrinque per 2, $2y$ æquatur $ai + ei$, hinc si utrobique dividatur per $a + e$, fiet $i = \frac{2y}{a + e}$.

At verò datis uno extremorum a , multitudine terminorum i , & eorundem aggregato y , ut inveniatur alter extremorum

e , quoniam $2y$ æquatur $ai + ei$; transferendo ai in alteram partem, fiet $2y - ai \propto ei$. Unde, dividendo utrinque per i , invenietur $e \propto \frac{2y}{i} - a$. Haud secus, datis e, i , & y : erit $a \propto \frac{2y}{i} - e$.

Iisdem positis, si excessus Progressionis sit u , & ex eo & binis extremis a, e , quorum a minor & e major intelligatur, quærendum sit terminorum aggregatum y : oportet, invento $y \propto \frac{ai + ei}{2}$, in locum i ex

superioribus substituere $\frac{e-a}{u} + 1$, fietque $y \propto \frac{ee - aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$.

Eodem modo, datis uno extremo a , Progressionis excessu u , & multitudine terminorum i , ad inveniendum eorundem aggregatum y , quoniam y æquatur $\frac{ee - aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, oportet tantum in locum e sub-

stituere valorem inventum $\frac{2y}{i} - a$, & in locum ee ejusdem quadratum $\frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{ii} + aa$, fietque $y \propto \frac{2yy}{iii} - \frac{2ay}{ii} + \frac{y}{i}$. Unde ordinatæ æqualitate invenitur $y \propto \frac{1}{2}iii + ai - \frac{1}{2}ui$. Haud secus datis e, u , & i , erit $y \propto \frac{1}{2}iii + ei + \frac{1}{2}ui$.

Rursus datis extremis a, e , & aggregato terminorum y , ut inveniat Progressionis excessus u , quoniam y æquatur $\frac{ee - aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, hoc est, multiplicando ubique per $2u$, $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, transferendo au & eu in alteram partem, fiet $2uy - au - eu \propto ee - aa$. Unde dividendo utrinque per $2y - a - e$ invenietur $u \propto \frac{ee - aa}{2y - a - e}$.

Similiter dato uno extremo a , Progressionis excessu u , & aggregato terminorum y , ad inveniendum alterum extremum e , quoniam $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, transferendo $-aa + au + eu$ in alteram partem, fiet $ee \propto -ue + 2uy + aa - au$: critque extractâ radice $e \propto \frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}uu + 2uy + aa - au}$. Datis autem e, u , & y , si quærat a : erit $a \propto \frac{1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1}{4}uu - 2uy + ee + eu}$.

Haud secus datis excessu Progressionis u , multitudine terminorum i , & eorundem aggregato y , ut inveniantur extremi a & e , quoniam rursus $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, oportet tantum in locum e & a sub-

substituere valores inventos $\frac{2y}{i} - a$, & $\frac{2y}{i} - e$, & in locum ee & aa horum valorum quadrata, habebiturque $2uy \propto \frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + \frac{2ay}{i}$, & $2uy \propto -\frac{4yy}{ii} + \frac{4ey}{i} + \frac{2ay}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenietur $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui$.

Denique dato uno extremo a , Progressionis excessu u , & aggregato terminorum y , ad inveniendam eorum multitudinem i , quoniam a æquatur $\frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, multiplicando ubique per $2i$, fiet $2ai \propto 2y + ui - ui$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $ii \propto + ui + 2y$. Et fit,

extracta radice, $i \propto \frac{y}{\frac{1}{2}u} + \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$. Pari ratione datis e , u , & y , invenietur $i \propto \frac{y}{\frac{1}{2}e} + \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy}$.

In quorum, si lubet, illustrationem ac usum addantur sequentes quæstiones.
1. Aliquis solvere debet primâ septimana 1 fl. secundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. & sic deinceps usque ad 28 septimanas, solvendo nempe singulis septimanis sequentibus semper 3 fl. plus quàm in proximè antecedentibus. Quæritur quantum ad finem hujus temporis persolvere teneatur? Facit 82 florenos.

Ad quæstionis hujus enodationem concipiatur Progressio Arithmetica 28 terminorum, in qua primus terminus est 1, & excessus Progressionis 3, cujusque ultimus terminus est inveniendus. Is autem hoc modo invenitur. Ex 28 terminorum multitudine sublatâ unitate, ducatur reliquum 27 in Progressionis excessum 3, & ad productum 81 addatur primus terminus 1, fiet que ultimus 82, designans florenos, quos ad finem 28 septimana persolvere tenetur.

2. Si quis finitis 28 septimanis 82 fl. persolvere tenetur, & singulis septimanis retro numerandis 3 fl. minus solvere debeat quàm in proximè sequentibus: Quæritur quantum ad finem primæ septimane solvendum habeat?

Ex

Ex 82 fl. subductis 81 fl. restabit 1 fl. Quantum scilicet ad finem 1^{re} septimanæ solvendum restat.

3. Si quis per 28 septimanas ad singularum finem inæqualem pecuniæ summam erogare debeat, eodem semper excrefcentem pretio, & ad primæ quidem finem solvere teneatur 1 fl.; at ad ultimæ finem 82 fl. Quæritur in quantum pretium continuè augendum sit?

Sublato 1 fl. de 82 fl. si reliquum 81 fl. dividatur per 27, orietur 3, pretium florenorum, quibus sequens pecuniæ summa deinceps proximè antecedentem excedere debet.

4. Aliquis debet primâ septimanâ 1 fl. secundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. atque ita deinceps, sequenti septimanâ 3 fl. amplius quàm in proximè præcedenti. Quæritur, si ultima solutio fuerit 82 florenorum, per quot septimanas dictam solutionem præstare teneatur.

Sublato 1 fl. de 82 fl., reliquum 81 fl. dividatur per 3 fl., orietur quæ 27. Cui additâ unitate habebitur 28, numerus septimanarum quæsitus.

5. Est Progressio Arithmetica 28 terminorum, cujus primus terminus est 1, & ultimus 82. Quæritur summa omnium? Facit 1162.

a est 1, e est 82, & i est 28. Quæritur y . Hinc cum y sit $\propto \frac{a+e}{2}$, erit $y \propto 1162$.

6. Aliquis debet 1162 florenos, quos persolvere tenetur diversis temporibus, erogando singulis septimanis certam pecuniæ summam. Quæritur, si primâ septimanâ solvat 1 fl. & reliquis septimanis continuè pretium æqualiter augeat, sic ut in ultima ipsi numerandi sint

82 floreni, quot septimanis dicta summa persolvetur? Facit $i \propto \frac{2y}{a+e}$ 28 septimanis.

7. Si 1162 fl. solvendi sint intra 28 septimanas, & in prima quidem dari debeat 1 fl.; at in singulis sequentibus pretium continuè usque ad ultimam septimanam æqualiter augendum sit: Quæritur quantum in ultima solvere oporteat? Facit $e \propto \frac{2y}{i} - a \propto 82$ fl. Eodem modo, si 1162 fl. solvi debeant spacio 28 septimanarum, dando in fine hujus temporis 82 fl., & singulis septimanis pretium retrò æqualiter sit diminuendum, invenietur ad finem primæ septimanæ solvendum esse $a \propto \frac{2y}{i} - e \propto 1$ fl.

8. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 1, & ultimus 82. Quæritur

82. Quæritur aggregatum terminorum, si excessus Progressionis u

sit 3 . Facit $y \propto \frac{ee - aa}{2u} + \frac{a + e}{2} \propto 1162$.

9. Si quis primâ septimanâ solvere debeat 1 fl. & singulis sequentibus septimanis deinceps 3 fl. amplius quàm in proximè antecedentibus, id quæ per 28 septimanas continuare teneatur: Quæritur quid in toto solvere oporteat? Facit $y \propto \frac{1}{2} ui + ai - \frac{1}{2} ui \propto 1162$ fl. Eodem modo, si finitis 28 septimanis solvendi sint 82 fl. & singulis præcedentibus 3 floreni minus solvi debeant quàm in proximè sequentibus, donec ad primâ finem perventum fuerit, inveniatur similiter pecuniam omnem erogatam fore $y \propto -\frac{1}{2} ui + ei + \frac{1}{2} ui \propto 1162$ fl.

10. Si quis solvere debeat 1162 fl. per septimanas, ita ut in prima numerare teneatur 1 fl. & in ultima 82 fl. augendo perpetuò pretium à prima usque ad ultimam æqualiter: Quæritur quantum singulis sequentibus septimanis plus solvere teneatur quàm in proximè præcedentibus? Facit $u \propto \frac{ee - aa}{2y - a - e} \propto 3$.

11. Aliquis solvere debet 1162 fl. hâc conditione, ut ad finem 1^{ma} septimanæ eorum 1 fl. solvat, & ad finem singularum sequentium continuè 3 plus quàm ad proximè præcedentium, donec omnes 1162 fl. soluti fuerint. Quæritur quanta ultima solutio futura sit? Facit $e \propto -\frac{1}{2} u + \sqrt{\frac{1}{4} uu + uy + aa - au} \propto 82$ fl. Eodem modo, si 1162 fl. solvi debeant, ita ut ultima solutio sit 82 florenorum, eademque continuè 3 florenis sit diminuenda, donec tota summa 1162 soluta fuerit, inveniatur primam solutionem a esse $\propto +\frac{1}{2} u - \sqrt{\frac{1}{4} uu - uy + ee + eu} \propto 1$ fl.

12. Si 1162 floreni solvendi sint intra 28 septimanas, ita ut singulis sequentibus semper 3 fl. amplius numerandi sint quàm in proximè antecedentibus: Quæritur quot floreni in prima & quot in ultima erogari debeant? Facit $a \propto \frac{y}{2} + \frac{1}{2} u - \frac{1}{2} ui \propto 1$ fl. in prima septimana, & $e \propto \frac{y}{2} - \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} ui \propto 82$ fl. in ultima.

13. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 1 , excessus Progressionis 3 , & aggregatum terminorum 1162 . Quæritur multitudo terminorum. Facit $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{4} uu - au + aa + uy} \propto 28$. Haud

Kkk

secus,

secus, datis ultimo termino 82, excessu Progressionis 3, & aggregato terminorum 1162, erit $i \propto \frac{1}{2} + \frac{e}{u} + \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy} \propto 28$.

SECTIO XV.

De numeris Multangulis

seu

Polygonalibus.

Numeris Arithmetice proportionalibus proximè succedunt illi, qui vulgò Multanguli seu Polygonales appellantur, & ex iisdem originem suam ducunt.

Sunt autem ipsi omnes summæ numerorum Progressionis Arithmetice ab unitate, quorum numerus angulorum binario semper excedit Progressionis excessum, & latus multitudinem terminorum designat.

Ut si Progressio fuerit numerorum ab unitate in serie naturali, id est, per 1 excrementum, ut puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. cujus termini ab initio continuè addantur, fient inde trianguli 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. utpote qui secundum suas unitates in trianguli formam disponi possunt, hoc modo:

ni possunt, hoc modo: $\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$ &c.

Sic & si Progressio fuerit numerorum ab unitate deinceps per 2 progredientium, id est, sub qua omnes impares numeri comprehenduntur, nimirum: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, &c. & termini hujus ab initio continuè addantur, fient inde quadrati numeri 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64, &c. quorum quippe unitates in quadrati formam collocari queunt,

hoc pacto: $\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$, &c. Unde inferre licet, quadratum quemlibet duplicem originem fortiri, hoc est, vel numeri ali-

alicuius in se ipsum ductu procreari, vel etiam ex tot imparium ab unitate in unam summam collectione, quot unitates continet ejus latus, constare.

Haud secus si numeri ab unitate deinceps per 3 ascendunt, id est, Progressio illa fuerit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. &c. atque termini hujus ab initio continuè accumulentur, fient inde pentagoni 1. 5. 12. 21. 35. 51. 70. 92. &c.

Pari ratione Progressione ab unitate deinceps per 4 excrecente, utputa 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. &c. dabunt hujus termini ab initio in unam summam continuè collecti hexagonos 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120. &c. Atque ita porro in infinitum.

Hinc dato angulorum numero, si ab eo binarius auferatur, reliquum erit excessus Progressionis, è qua Polygonus componitur.

Porro, quoniam, quæ ad horum numerorum tractationem spectant, ad duo præcipua capita revocari queunt, quæ sunt, ut è dato latere inveniat polygonus, & contra ut è dato polygono eruatur latus, locus exigit, ut de his in genere scripturi, quò ad omnes simul polygonos referri possint, funditus ipsa repetamus atque ex origine sua derivemus.

Quocirca ut ex dato latere investigetur polygonus, supposito latere $\propto i$, & polygono $\propto y$, concipiatur Progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 1, excessus Progressionis u , & multitudo terminorum i , quorumque aggregatum y est inveniendum.

Hunc in finem, cum primo termino existente a , per antecedentem Sectionem, y æquetur $\frac{1}{2}ui + ai - \frac{1}{2}ai$, erit, substituto 1 in locum a , $y \propto \frac{1}{2}ui + i - \frac{1}{2}ui$. Designans in genere, quo pacto ex dato latere quilibet inveniat polygonus. Ubi advertendum, quantitatem u datam intelligi, quippe illa (uti dictum) binarii sublatione à polygona angulorum numero, qui ex cognomine ejus semper notus est, innoscit.

Quòd si verò ad Progressionis hunc excessum u respicere non lubet, sed ex solo latere i , & angulorum numero, quem n vocamus, ipse polygonus y inveniendus sit: oportet tantum in locum u subrogare $n - 2$, fietque $y \propto \frac{1}{2}ni - \frac{1}{2}ni - u + 2i$ seu $\frac{1}{2}ni - \frac{1}{2}n - i + 2$ in i .

His igitur ita se habentibus, ut pateat, quâ ratione inde speciales regulæ deducendæ sint, quibus ex quovis latere multangulus certi angulorum numeri obtineatur: opus tantum erit in locum u vel n in triangulis subrogare 1 vel 3, in quadratis 2 vel 4, in pentagonis 3 vel 5,

in hexagonis 4 vel 6, in heptagonis 5 vel 7, &c. relinquendo i indeterminatam. Unde sequentes regulæ resultant:

$$y \propto \frac{1ii + 1i}{2}, \text{ pro triangulis}$$

$$y \propto \frac{2ii + 0i}{2}, \text{ pro quadratis}$$

$$y \propto \frac{3ii - 1i}{2}, \text{ pro pentagonis}$$

$$y \propto \frac{4ii - 2i}{2}, \text{ pro hexagonis}$$

$$y \propto \frac{5ii - 3i}{2}, \text{ pro heptagonis. Atque sic ulterius in infinitum.}$$

Quibus respondent ea, quæ Bacchetus affert in Commentariis suis super Diophantum, ubi in eundem finem has depromit regulas seu canones.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod sit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semis erit quaesitus polygonus.

vel,

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, residuum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

vel etiam,

Ducito datum latus unitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. Vel alios denique canones, quos recensere omnes nimis longum foret.

Hinc si i seu latus datum sit 12, & quaeratur ejusdem triangulus, erit $y \propto \frac{1ii + 1i}{2} \propto 78$. Ac proinde cum numerus punctorum, in quibus plures rectæ indefinitæ, quarum nullæ parallelæ sunt, se invicem secant, semper triangulus existat: liquet 13 lineas in 78 punctis nec pluribus se mutuo interfecare.

Non secus latere existente 12 quinquangulus erit 210, hexangulus 276, heptangulus 342, atque ita de aliis.

De-

Denique dato polygono ut inveniatur latus, oportet, inventâ
 $y \propto \frac{1}{2}uu + i - \frac{1}{2}ui$, æqualitatem secundum artem de i ordinare, su-
 mendo i esse quantitatem incognitam, at verò u & y esse cog-
 nitas. Fietque $ii \propto + ui + 2y$. Unde extractâ radice invenitur

$$i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \frac{u}{\sqrt{uu-4u+4+8uy}}, \text{ vel } i \propto u-2 + \frac{1}{u} \sqrt{uu-4u+4+8uy}.$$

Designans in genere quâ ratione ex dato quolibet polygono latus in-
 vestigari possit.

Idem obtinere licet, si, ut in præcedenti Sectione Progressionis
 Arithmeticæ, cujus primus terminus est a , excessus Progressionis n ,
 & aggregatum terminorum y , quæratnr multitudo terminorum i .

Hæc enim cum sit $\propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{4}uu-4u+4+8uy}$, subrogato i in lo-
 cum a , erit $i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u} \sqrt{\frac{1}{4}uu-4u+4+8uy}$ seu $u-2 + \frac{1}{u} \sqrt{uu-4u+4+8uy}$,

ut ante. Aut etiam substituendo $n-2$ pro u , erit $i \propto \frac{n-4}{2n-4} + \frac{1}{2n-4}$
 $\sqrt{nn-8n+16+8ny-16y}$ seu $n-4 + \sqrt{nn-8n+16+8ny-16y}$.

Ex quibus jam facile est speciales regulas pro singulis polygonis
 conficere.

Etenim, si, ut supra, quum y relinquitur indeterminata, pro u vel
 n in triangulis subrogemus 1 vel 3, in quadrangulis 2 vel 4, in quin-
 quangulis 3 vel 5, atque ita porro, emergent inde regulæ sequentes,
 nimirum: $i \propto -1 + \sqrt{1+8y}$, pro triangulis

$$i \propto \frac{2}{2} \propto 0 + \sqrt{0+16y}, \text{ pro quadrangulis}$$

$$i \propto \frac{4}{4} \propto 1 + \sqrt{1+24y}, \text{ pro quinquangulis}$$

$$i \propto \frac{6}{6} \propto 2 + \sqrt{4+32y}, \text{ pro sexangulis}$$

Kkk 3

i x

$i \propto 3 + \sqrt[10]{9 + 40y}$, pro septangulis. Atque sic ulterius in infinitum.

Quibus similia sunt ea, quæ à Bacheto afferuntur in inventionem lateris, quando polygonus est datus, ubi sic scribit:

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summa cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam divide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quasitum latus.

Hinc si datus multangulus y sit triangulus 21, & queratur ejus latus i , ponendum tantummodò erit $\frac{11i + 11}{2} \propto 21$, hoc est, $11i + 42$. Et fit, extractâ radice, $i \propto 6$. Vel etiam, quia i æquatur $\frac{-1 + \sqrt{1 + 8y}}{2}$, & y valet 21, erit $i \propto 6$. ut ante.

Haud secus, si 21 fuerit octangulus, invenietur latus ejus fore 3. At verò 21 existente numero 21 angulorum, latus ipsius erit 2.

Pari ratione, dato numero 1225, eoque existente triangulo, quadrangulo, sexangulo, ac 1225^{gulo}, latera erunt 49, 35, 25, & 2. Atque ita de aliis.

Cæterum antequam horum numerorum tractationi finem imponamus, breviter nobis adhuc dicendum sit, quot modis datus numerus polygonus dici queat. Ut si datus numerus sit 36.

Primò itaque, quia numerus quilibet à ternario multangulus est, habens tot angulos quot ipse continet unitates, cujus latus est 2, numerus ab unitate proximus, constat 36 esse polygonum 36 angulorum, quo igitur nomine triginta-sexangulus dici poterit.

Deinde, quia ex 36 elici potest radix quadrata, quæ est 6, evidens est 36 esse quoque quadratum.

Denique quia 36 octies sumptus ac unitate inde auctus facit quadratum 289, cujus latus 17 unitate multatum ac deinde per 2 divisum dat 8, integrum numerum: patet 36 esse pariter triangulum, cujus latus est 8. Quoniam verò multiplicato 36 per 24 ac producto addito 1, aut per 32 ac producto addito 4, aut per 40 ac producto addito 9, & sic deinceps, nunquam fit quadratus: convincitur 36 tribus duntaxat prædictis modis esse multangulus. Atque ita de aliis.

SE-

SECTIO XVI.

De Progressionibus Geometricis.

PROgressionum harum naturam cum definiat terminorum secundum eandem rationem continuatio, suffecerit, si, innixi huic fundamento, ea, ex quibus reliqua, doctrinam ipsarum concernentia, facili negotio deducuntur, levi penicillo adumbremus.

Hinc si Progressio fuerit trium terminorum, ut puta a, b, c , quoniam propter eandem rationem primi termini ad secundum atque secundum ad tertium, $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{c}$, vel etiam $\frac{b}{a}$ $\frac{c}{b}$, fiet, multiplicando per crucem, ac \propto bb . Id quod ostendit, si tres quantitates sint proportionales, productum extremarum a & c esse \propto quale ei, quod fit ex media b in se ducta. Ac proinde datis duobus primis terminis a & b , ut ex iis inveniatur tertius c , opus tantum esse dividere productum utrumque per a , fietque tertius c \propto $\frac{bb}{a}$.

Similiter primo termino existente a , & secundo b , si progressio ulterius in quatuor terminis continuari debeat, quoniam tertius terminus est $\frac{bb}{a}$, atque hujus rursus quadratum \propto quetur ei quod fit ex secundo in quartum, fiet, statuendo quartum terminum esse d , $\frac{b^3}{a^2}$ \propto $b d$. Unde diviso utrinque per b , fit d \propto $\frac{b^2}{a^2}$. adeo ut $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{a^2}$ quatuor continuè proportionales existant.

Haud secus, si in eadem ratione quinque continuè proportionales inveniendi sint, & quintus terminus vocetur e , erit $\frac{bb e}{a} \propto \frac{b^6}{a^4}$. Unde multiplicando utrinque per a & dividendo per bb , invenitur e \propto $\frac{b^4}{a^3}$. Eruntque $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}$ quinque continuè proportionales in ratione a ad b . Atque sic ulterius in infinitum.

Quoniam autem sic datis duobus primis terminis a & b reliqui omnes sequentes sunt fractiones, hinc ut integri evadant ac simul ad

tot

tot, quot quis voluerit, continuè proportionales in data ratione inveniendos inserviant, oportet tantum eos omnes per denominatorem ultimi termini multiplicare.

Ut, quia $a, b, \& \frac{bb}{a}$ tres proportionales referunt, quorum duo primi termini dantur $a \& b$, hinc multiplicando omnes tres per a , inveniemus illorum loco $aa, ab, \& bb$, qui in eadem ratione tres quæsitos proportionales in integris designant.

Sic si quatuor in ratione a ad b continui requirantur, quoniam pro illis invenimus $a, b, \frac{bb}{ae} \& \frac{b^3}{aa}$, ideo multiplicando eos omnes per aa , erunt ipsi in integris $a^3, aab, abb, \& b^3$.

Pari ratione $a^4, a^3b, aabb, ab^3, \& b^4$ in integris quinque designabunt continuè proportionales in ratione a ad b ; $\& a^5, a^4b, a^3bb, aab^3, \& b^5$ sex; $\& a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, aab^4, ab^5, \& b^6$ septem. Atque ita porro in infinitum.

Hinc si a sit $\propto 3$, $\& b \propto 2$, sex proportionales continuè in ratione 3 ad 2 erunt 243, 162, 108, 72, 48, $\& 32$. At verò a existente 2, $\& b \propto 3$ septem continuè proportionales in ratione 2 ad 3 in integris erunt 64, 96, 144, 216, 324, 486, $\& 729$. Et sic de aliis.

Ubi advertendum, quòd, sicut in Arithmetice proportionalibus extremi termini simul additi tantundem faciunt atque ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius bis sumptus, si multitudo terminorum impar fuerit, ita in hisce Geometricè proportionalibus extremi $a \& \frac{b^4}{a^3}$ in se invicem ducti tantundem producant, atque $b \& \frac{b^3}{a^4}$ ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius $\frac{bb}{a}$ in se ductus. Fit enim ubique $\frac{b^4}{aa}$. Quod idem de quocunque terminis est intelligendum.

Deinde apparet, primo termino a existente 1, progressionem fore 1. $b. bb. b^3. b^4, \&c.$ adèd ut ad quemlibet sequentium terminorum inveniendum opus tantum sit secundum terminum b toties ponere $\&$ multiplicare, quotus quisque ex illis est post primum.

Ut ad inveniendum centesimum terminum, posito b nonagies $\&$ novies $\&$ multiplicato, centesimus erit b^{99} . Quòd si autem primus ter-

terminus sit a , centesimus erit $\frac{b^{100}}{a^{99}}$, dividendo nempe b^{100} , productum antecedens secundi termini, per a^{99} , productum primi a , semel minus positi & multiplicati. Atque ita de aliis.

Porro Progressione existente $1, b, bb, b^3, b^4, &c.$ quoniam terminorum ultimum antecedentium aggregatum est $1 + b + bb + b^3$, at verò primum sequentium aggregatum sit $b + bb + b^3 + b^4$, quorum unius ad alterum ratio eadem est, quæ primi termini 1 ad secundum

b , atque idem etiam in proportionalibus $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}, &c.$ vel in proportionalibus $a^4, a^3b, aabb, ab^3, b^4, &c.$ locum habeat, nec referat ad quocunque proportionales hoc restringatur: liquet Progressionis cujuscunque Geometricæ primum terminum ad secundum esse, sicut aggregatum terminorum excepto ultimo ad aggregatum terminorum excepto primo.

Hinc datis primo, secundo, & ultimo termino, facile est invenire aggregatum terminorum.

Etenim si primus terminus statuatur $\propto a$, secundus $\propto b$, & ultimus $\propto c$, & quæatur aggregatum terminorum $\propto z$: erit ut a ad b , sic $z - c$ ad $z - a$. Unde multiplicando tum extremos in se invicem, tum medios, fiet $az - aa \propto bz - bc$. Hoc est, ordinata æqualitate, erit

$$z \propto \frac{aa - bc}{a - b}.$$

Hinc si a sit $\propto 243$, $b \propto 162$, & $c \propto 32$, erit $z \propto \frac{aa - bc}{a - b} \propto 665$. At

a existente $\propto 64$, $b \propto 96$, & $c \propto 729$, erit $z \propto \frac{aa - bc}{a - b} \propto 2059$.

Denique a existente majore quàm b , si proportionales in infinitum decrescant, fiet $c \propto 0$. Ideoque destruendo bc , erit $z \propto \frac{aa}{a - b}$.

Hinc si a sit 1 , & $b \propto \frac{1}{2}$, atque cæteræ omnes sequentes proportionales deinceps in infinitum in dupla hac ratione descendant, erit z , aggregatum omnium terminorum hujus Progressionis infinitæ, $\propto \frac{aa}{a - b} \propto 2$, hoc est, duplum maximi termini a .

Eodem modo, si maximus terminus a sit 2 , & reliqui omnes ter-

Signum \propto significat differentiam
inter duas
quantitates
cum non ex-
primitur
aut cognos-
citur, penes
quas sit con-
cessus.

mini ab hoc maximo a in tripla ratione continuè usque ad nihilum decrescant, erit z , summa omnium terminorum hujus infinitæ seriei,

$\infty \frac{aa}{a-b} \infty 3$, hoc est, erit ipsa maximi termini a sesquialtera.

Similiter a existente 3, si reliquorum sequentium terminorum unus alterius subquadruplus sumatur, idque semper fiat: erit z , summa omnium, $\infty \frac{aa}{a-b} \infty 4$, hoc est, maximi termini a sesquitertia.

Atque ita de aliis.

Cætera huc spectantia, ex his perinde ut in Arithmeticis Progressionibus factum est collige.

S E C T I O XVII.

Quadratura Parabolæ.

Ad indagandam Parabolæ quadraturam investigetur ratio linearum NO, NQ, & NP, ductâ scilicet inter AC, MD rectâ NO alterutri ex ipsis parallelâ. Ponendo ad id latus rectum $\propto r$

AC vel NO $\propto x$

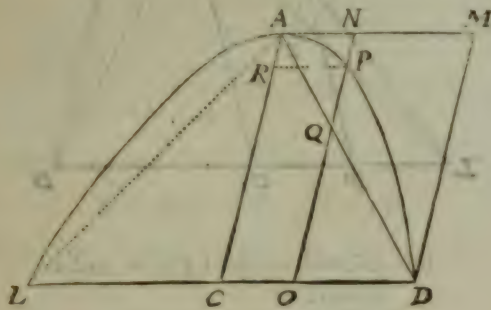
NQ $\propto y$

& AR vel NP $\propto z$.

Unde cum ex proprietate Parabolæ \square^{lum} sub latere recto r , & segmento diametri AC, per 11 Prop. 1^{ma} libri Conic. Apollonii, sit æquale \square^{to} ordinatim applicatæ CD: erit \square^{to} CD vel AM $\propto rx$, adeoque AM $\propto \sqrt{rx}$. Eâdem ratione RP vel AN erit $\propto \sqrt{rz}$. Hinc cum propter similitudinem triangulorum AMD, ANQ, AM $\propto \sqrt{rx}$ sit ad MD vel AC $\propto x$, ut AN $\propto \sqrt{rz}$ ad NQ $\propto y$: erit $y \propto \sqrt{rx}$, rectangulum sub extremis, per 16. 6, æquale $x \propto \sqrt{rz}$, rectangulo sub mediis. Hoc est, quadratis singulis partibus, erit $yy \propto xx, rz$. Et dividendo utrinque per rx , sit $yy \propto xz$. Hoc est, quadratum rectæ NQ æquale est rectangulo sub NO & NP, seu quod idem est, ON est ad NQ, sicut QN ad NP. Idem intelligendum est de rectâ quavis NO, ductâ inter AC, MD, ubi libuerit, alterutri ex ipsis parallelâ.

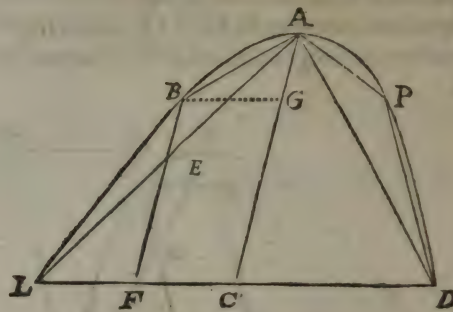
Hinc concipiendū conum & cylindrum ejusdem basis & altitudinis, quorum scilicet utriusque basis sit circulus semidiametri MD, & axis com-

communis recta AM, cum propter proportionales NO, NQ, & NP, ¹_{1^{ma}} NO sit ad ²_{2^{da}} NQ, & ³_{3^{tia}} NP, sicut quadratum ¹_{1^{ma}} NO ad quadratum ²_{2^{da}} NQ, atque hoc in infinitum intelligendum sit de rectis omnibus NO, NP & quadratis omnibus NO, NQ: erunt, regulâ existente DM, lineæ omnes parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei



APDM, sicut omnia quadrata cylindri ad omnia quadrata conî, seu quod idem est, per 2.12, sicut omnes circuli cylindri ad omnes circulos conî. Sed ut se habent omnes lineæ parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei APDM, ita per Methodum Indivisibilium Cavalieri se habet parallelogrammum ad trilineum. Similiterque sicut omnia quadrata cylindri se habent ad omnia quadrata conî, ita quoque se habet cylindrus ad conum. Quare parallelogrammum ACDM ad trilineum APDM erit, ut cylindrus ad conum. Unde cum, per 10.12, cylindrus ipsius conî sit triplus: erit itidem parallelogrammum ACDM trilinei APDM triplum. Adeoque qualium partium parallelogrammum ACDM sive triangulum LAD est 3, talium trilineum APDM erit 1, & semi-parabola CAPD 2, ac proinde tota LAPD 4. Constat ideo Parabolam LAPD trianguli LAD in ea descripti maximi esse sesquiterciam. Quod erat propositum.

ALITER, investigando rationem linearum AC, BE.



Esto $LC \propto a$, eritque $LF \propto FC \propto \frac{1}{2}a$.

$CA \propto b$

& $EB \propto z$.

Quibus positis, quoniam FB existente parallelâ diametro CA, & ipsa diameter est, ac, propter similitudinem triangulorum LCA, LFE, LC est ad CA, hoc est, a ad b , sicut LF, hoc est, $\frac{1}{2}a$, ad FE: erit $FE \propto \frac{1}{2}b$. Cui additâ EB $\propto z$, si tota FB seu CG $\propto \frac{1}{2}b + z$ ex CA $\propto b$ auferatur, relinquetur GA $\propto \frac{1}{2}b - z$.

Deinde, quia, ex natura Parabolæ, CA est ad GA, hoc est, b ad $\frac{1}{2}b - z$, sicut $\square LC$ ad $\square BG$ seu FC, hoc est, aa ad $\frac{1}{4}aa$, vel 4 ad 1 : erit $b \propto 2b - 4z$. Unde resolutâ æquatione fit $z \propto \frac{1}{4}b$. Quod ipsum docet, rectam CA ipsius EB quadruplam esse.

E quibus porro facile est invenire rationem trianguli EBA ad triangulum LAC. Cum enim propter parallelas EB, AC angulos ad E & A æquales habeant, ac proinde ipsa inter se sint sicut $\square BEA$ ad $\square LAC$: erit, assumptâ LE vel EA $\propto c$, unum ad alterum, sicut $\frac{1}{4}bc$ ad $2bc$, hoc est, ut 1 ad 8 ; ideoque $\triangle LBA$ ad $\triangle LAC$, ut 1 ad 4 .

Eodem modo, triangulo APD trianguli CAD subquadruplo existente, erunt & bina \triangle^a LBA & APD simul sumpta binorum triangulorum LAC & CAD simul sumptorum, hoc est, totius LAD, subquadrupla. Id quod eadem ratione de cæteris triangulis, quæ deinceps

deinceps in reliquis sequentibus portionibus in infinitum describuntur, est intelligendum.

Quocirca cum pateat triangulum Parabolæ inscriptum maximum ad triacula in reliquis portionibus maxima esse ut 4 ad 1; & hæc rursus ad illa in reliquis inde sequentibus maxima ut 4 ad 1, atque hoc ita in infinitum contingere: manifestum est, si illorum maximum LAD statuatur esse 3, summam omnium, hoc est, ipsam Parabolam LBAPD, per 16. Sect. fore 4: adeoque hanc eandem trianguli LAD esse sesquiterciam. Ut supra. Atque hic ipsissimus modus est, quo eam quadravit Archimedes.

Haud dissimili ratione aliarum curvarum superiorum generum quadraturæ investigari possunt.

SECTIO XVIII.

De modo investigandi relationem, quæ inter Sphæram, Cylindrum, & Conum existit.

Quam inter se rationem Sphæra, Cylindrus, atque Conus habent, demonstravit Archimedes Propositione 32 primi libri de Sphæra & Cylindro; verum quo pacto illam investigare liceat, præfenti Sectione exponere visum fuit.

Esto Sphæra ABCD, & in ea Conus ABC, basin habens æqualem circulo in Sphæra maximo, altitudinem verò BE æqualem semidiametro Sphæra. Dein circa hemisphærium ABC intelligatur Cylindrus AFGC, cuius similiter basis circulo in Sphæra maximo sit æqualis, & altitudo BE æqualis semidiametro Sphæra.

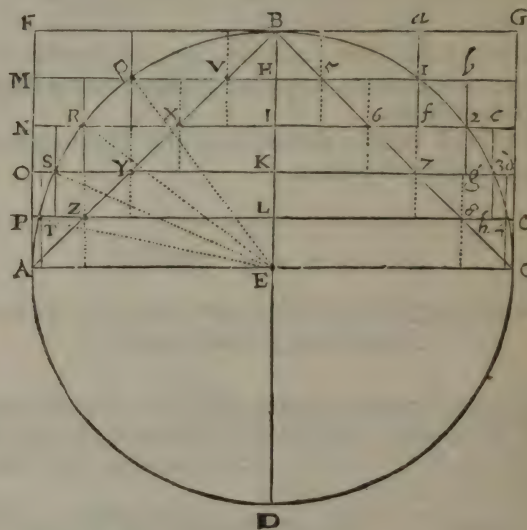
Quibus positis, oporteat investigare quam inter se habeant rationem, Sphæra, cylindrus, atque conus.

Ad hoc autem dividatur BE in partes quotcunque æquales, & per divisionum puncta H, I, K, L ducantur plana basi conii vel cylindri parallela.

Quoniam igitur, per 35 Tertii Elementorum, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB quadratis QH, RI, SK, TL, AE sunt æqualia, atque hæc quidem quadrata, per 2 Duodecimi Elementorum, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE sint sicut circuli ab his semidiametris descripti, siue etiam ut cylindri æquæ alti super hisce

LII 3 cir-

circulis constituti: patet, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB seu quadrata QH, RI, SK, TL, AE ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE esse, ut figura hemisphaerio ABC circumscripta ad cylindrum AFGC.



Quod ut magis fiat perspicuum, supponatur partium quælibet, in quas EB dissecta est, esse 1, eritque divisâ EB in 5 æquales partes, ratio quam figura hemisphaerio ABC circumscripta habet ad cylindrum AFGC,

DH 9 — HB 1	□ DHB seu □ QH 9	MH 5 — MH 5	□ MH 25
DI 8 — IB 2	□ DIB seu □ RI 16	NI 5 — NI 5	□ NI 25
DK 7 — KB 3	□ DKB seu □ SK 21	OK 5 — OK 5	□ OK 25
DL 6 — LB 4	□ DLB seu □ TL 24	PL 5 — PL 5	□ PL 25
DE 5 — EB 5	□ DEB seu □ AE 25	AE 5 — AE 5	□ AE 25
	ut 95	ad	125

Cum autem loco quadratorum QH, RI, SK, TL, AE, per 47 Primi Elementorum, substituere liceat excessus, quibus quadrata EQ,

EQ, ER, ES, ET, EA superant quadrata ex EH, EI, EK, EL, & o:
erit ratio figuræ hemisphærio ABC circumscriptæ ad cylindrum
AFGC,

□ EQ 25 — □ EH 16	□ MH 25
□ ER 25 — □ EI 9	□ NI 25
□ ES 25 — □ EK 4	□ OK 25
□ ET 25 — □ EL 1	□ PL 25
□ EA 25 — 0	□ AE 25

ut 125 — 30 ... ad ... 125. Hoc est, figura hemisphærio ABC circumscripta, constans ex cylindris æque-altis inæqualibus erit ad cylindrum AFGC, ex totidem cylindris ejusdem altitudinis, maxime quæ præcedentium æqualibus, composita; ut quadratum semidiametri sphære AE toties sumptum quot sunt cylindri linearum EB partes minus totidem quadratis rectarum à puncto vel o inchoatarum, ac juxta numeros 0.1.2.3. &c. in serie naturali usque ad radium continuè crescentium, ad totidem radii quadrata.

Quod ut generaliter percipiatur, recta EB in quotcunque partes æquales divisa, supponamus cum Clarissimo ac undequaque Doctissimo Virō D^{no} Johanne Wallisio * numerum terminorum seu multitudinem partium, in quas EB dissecta fuerit, esse a : eritque, querendo summam quadratorum hujusce Progressionis juxta Bacheti aliorumvè regulas, ratio, quam figura hemisphærio ABC circumscripta habet ad Cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 - 3a^2 - a}{6}$ ad a^3 , seu $4a^3$

+ $3a^2 - a$ ad $6a^3$, hoc est, dividendo ubique per a , ut $4a^2 + 3a - 1$ ad $6a^2$. Et manifestum est, si ratio inventa fuisset ut $4a^2$ ad $6a^2$, quod tunc quidem figura hemisphærio ABC circumscripta ipsius cylindri AFGC fuisset subseqüialtera. Quoniam verò ipsi $4a^2$ jam accedit $3a - 1$, in quo $3a$ semper majus est quàm 1, liquet, rationem, quam figura hemisphærio ABC circumscripta habet ad cylindrum AFGC, esse majorem quàm subseqüialteram.

Hinc, si EB in 2 æquales partes divisa fuerit, ratio erit, ut 21 ad 24 seu $\frac{7}{4}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; si in 3, ut 44 ad 54 seu $\frac{11}{9}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$; si in 4, ut 75 ad 96 seu $\frac{25}{24}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$; si in 5, ut 114 ad 150 seu $\frac{19}{15}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$; si in 6, ut 161 ad 216 seu $\frac{161}{216}$, hoc est, $\frac{2}{3} + \frac{1}{27}$. Et sic deinceps. Hoc est, ratio proveniens ubique major est quàm $\frac{2}{3}$, excessusque perpetuò decrescit, ut patet per $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}, \frac{1}{27}$ &c. prout

* Vide ejus
Arithmeti-
cam Infinito-
rum sive
novam Me-
thodum In-
quirendi in
Curvilineo-
rum Qua-
draturam,
aliisque dis-
ciliiora Ma-
theseos Pro-
blemata.

prout nimirum EB continuè in plures partes dividi supponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa + 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} + \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Atque hæc quidem de figuræ hemisphærio ABC circumscriptæ cum cylindro AFGC comparatione. Sequitur comparatio figuræ eidem hemisphærio ABC inscriptæ cum cylindro AFGC.

Ad hanc autem inveniendam, opus tantum est investigare rationem, quam habent rectangula DHB, DIB, DKB, DLB seu quadrata QH, RI, SK, TL five etiam excessus, quibus \square^a E Q, E R, E S, E T superant \square^a ex EH, EI, EK, EL, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE.

		\square MH 25
\square EQ 25	$-\square$ EH 16	\square NI 25
\square ER 25	$-\square$ EI 9	\square OK 25
\square ES 25	$-\square$ EK 4	\square PL 25
\square ET 25	$-\square$ EL 1	\square AE 25

Et inveniatur rationem quæstam fore, ut 100 ——— 30 ... ad ... 125.

Quod ut in genere de quavis figura hemisphærio ABC inscriptâ intelligatur, lineâ EB in quotlibet æquales partes sectâ, suppono partium harum numerum esse a ; eritque ratio figuræ hemisphærio ABC

inscriptæ ad cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 - 3aa - a}{6}$ ad a^3 , seu $4aa - 3a - 1$

ad $6aa$. Et manifestum est, si ratio hæc fuisset ut $4aa$ ad $6aa$, quod figura hemisphærio ABC inscripta ipsius cylindri AFGC tunc fuisset subsesquialtera. Quia autem ipsi $4aa$ jam decedit $3a + 1$, constat, rationem figuræ hemisphærio ABC inscriptæ ad cylindrum AFGC esse minorem quàm subsesquialteram.

Hinc, si EB in 2 æquales partes sit divisa, erit ratio ut 9 ad 24 seu $\frac{3}{4}$, hoc est, $\frac{2}{3} - \frac{7}{24}$; si in 3, ut 26 ad 54 seu $\frac{2}{3}$, hoc est, $\frac{2}{3} - \frac{10}{54}$; si in 4, ut 51 ad 96 seu $\frac{2}{3}$, hoc est, $\frac{2}{3} - \frac{13}{96}$; si in 5, ut 84 ad 150 seu $\frac{2}{3}$, hoc est, $\frac{2}{3} - \frac{16}{150}$; si in 6, ut 125 ad 216 seu $\frac{2}{3}$, hoc est, $\frac{2}{3} - \frac{19}{216}$. Et sic deinceps. Hoc est, ratio proveniens ubique minor est quàm $\frac{2}{3}$, defectusque perpetuò decrescit, ut liquet per $\frac{7}{24}, \frac{10}{54}, \frac{13}{96}, \frac{16}{150}, \frac{19}{216}$, &c. prout nimirum EB continuè in plures partes dividi supponitur.

Omnino videlicet ut per $\frac{4aa - 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} - \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Porro, quoniam cylindro AFGC existente $\propto 6aa$, figura circumscripta

scripta est $\propto 4aa + 3a - 1$, & inscripta $\propto 4aa - 3a - 1$, atque harum duarum differentia $\propto 6a$: erit ratio hujus differentie ad cylindrum AFGC, ut $6a$ ad $6aa$ seu ut 1 ad aa , hoc est, ut unitas ad multitudinem partium ipsius EB. Ut autem unitas ad multitudinem partium ipsius EB, ita quoque est cylindrus AP & C ad cylindrum AFGC. Quocirca superabit circumscripta figura ipsam inscriptam differentia AP & C. Id quod etiam patet, considerando super unoquoque circulo- rum Q 1, R 2, S 3, T 4 duos cylindros esse constitutos, quorum alter quidem versus B, alter autem versus E respiciat, quorumque illi om- nes, qui versus E constituti sunt, simul æquales sint illis omnibus simul, qui versus B reperiuntur; adeo ut, si omnibus illis qui versus B habentur cylindrus Ae addatur, tota figura circa hemisphærium ABC descripta superet figuram eidem ABC inscriptam cylindro Ae.

Ubi demum liquet, cum EB in continuum in æquales partes dividi possit, ita ut hinc tandem cylindrus Ae dato quolibet solido minor evadat, sic etiam hemisphærio ABC posse hanc ratione figuram circumscribi alteramque eidem inscribi, utramque ex cylindris æquæ- altis constantem; ut descriptarum differentia sit quocunque dato so- lido minor. Ac proinde, si partium numerus ipsius EB statuatur esse infinite magnus, hoc est, ut hemisphærium ABC & cylindrus AFGC ex æquæ multis ac infinitis quasi circulis constari intelligatur aut etiam ex cylindris altitudinis infinite exiguae: erit differentia inter cir- cumscriptam & inscriptam figuram $\propto 0$, adeoque ratio cylindri AFGC ad hemisphærium ABC, ut 3 ad 2, hoc est, sesquialtera. Hinc cum idem eodem modo de eorum duplis sit intelligendum, conclu- ditur, cylindrum, habentem basin æqualem circulo in sphæra maxi- mo & altitudinem diametro sphære æqualem, ipsius sphære sesqui- alterum haberi. Quod erat propositum.

Eodem modo, quærendo rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL, AE & quadrata MH, NI, OK, PL, AE existit, quantitate a multitudinem partium ipsius EB designante, invenietur figura cono ABC circumscripta esse ad cylindrum AFGC, ut $2aa + 3a + 1$ ad $6aa$, hoc est, rationem illam esse $\frac{2}{3} + \frac{3a+1}{6aa}$. Investigando autem rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL & quadrata MH, NI, OK, PL, AE reperitur, invenietur figura cono ABC inscripta esse ad cylindrum AFGC, ut $2aa - 3a + 1$ ad $6aa$, hoc est, rationem

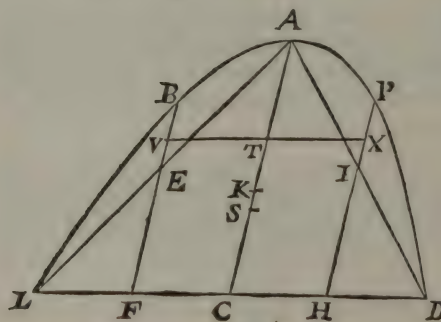
M m m illam

illam esse $\frac{1}{3} - \frac{3a+1}{6aa}$. Quocirca cum duarum harum figurarum illa, quæ cono ABC circumscibitur, ubique triente cylindri AFGC major sit; at verò hæc, quæ eidem cono ABC inscribitur, ubique triente cylindri AFGC minor existat, & quidem tam illius excessus $\frac{3a+1}{6aa}$, quàm hujus defectus $\frac{-3a+1}{6aa}$, dividendo continuè EB in plures atque plures partes, tandem usque ad nihilum decreseat: sequitur, conum ABC ipsius cylindri AFGC subtripulum esse habendum. Quod erat propositum.

Hinc, qualium partium conus ABC statuitur esse 1, talium cylindrus AFGC erit 3, & totus cylindrus, qui nempe integræ sphaeræ ABCD circumscibitur, 6. Quo quidem ipsius sphaeræ ABCD sesquialtero ostenso, hoc est, ut, cylindro hoc existente 6, sphaera ABCD sit 4: perspicuum fit, sphaeram ABCD dicti coni ABC, huic sphaeræ inscripti, esse quadruplam. Quod erat propositum.

SECTIO XIX.

Ratio investigandi centrum gravitatis Parabola.



Explicaturus quâ ratione centrū gravitatis figuræ investigari possit, supponemus illud cum Archimede aliisq; authoribus in unaquaque figura esse tantū unicum punctum, quod in respectu ad illam eundem semper situm observat; sicut eti-

am duo aut plura gravia juxta lineas parallelas, per centra hæc tendentes, deorsum ferri.

Quo-

Quocirca statuendo K esse centrum gravitatis Parabolæ LBAPD, & S centrum gravitatis trianguli LAD, puncta verò V & X centra duarum portionum LBA & APD: erit, ductâ VX, punctum T centrum gravitatis, magnitudinis ex utrisque compositæ.

Hinc si ponatur CA $\propto a$, erit EB vel IP, per antec. Sect., $\propto \frac{1}{4}a$, & AS $\propto \frac{2}{3}a$. Dein positâ AK $\propto z$, erit CK $\propto a - z$. Quibus ita constitutis, cum CA sit ad AK, hoc est, a ad z , sicut EB vel IP, hoc est, $\frac{1}{4}a$ ad BV vel PX: erit BV vel PX $\propto \frac{1}{4}z$. Quâ subductâ ex EB vel IP, relinquitur EV vel IX $\propto \frac{4-z}{4}$. Huic autem additâ FE vel HI $\propto \frac{1}{3}a$, fit FV vel HX, seu CT $\propto \frac{3a-z}{4}$.

Porrò quoniam ablatâ CK $\propto a - z$ ex CT $\propto \frac{3a-z}{4}$, remanet KT $\propto \frac{3z-a}{4}$, at AK $\propto z$ ablatâ ex AS $\propto \frac{2}{3}a$, relinquitur KS $\propto \frac{2}{3}a - z$; & quidem KT ad KS sit, sicut triangulum LAD ad duas simul portiones LBA & APD, quorum unius ad alterum ratio, per præc. Sect., est, ut 3 ad 1: erit ut $\frac{3z-a}{4}$ ad $\frac{2}{3}a - z$, sic 3 ad 1. Fietque, multiplicando tum extremos in se invicem tum medios, $\frac{3z-a}{4} \propto 2a - 3z$. Unde resolutâ æquatione invenitur $z \propto \frac{2}{3}a$. Quod ipsum docet, ad obtinendum quæsitum centrum K, dividendam esse AC in 5 æquales partes, atque earundem pro AK sumendas esse tres; conveniens cum eo, quod ab Archimede ostensum est Prop^{ne} 8. lib. 2. de Æquiponderantibus: nimirum, diametrum CA à gravitatis centro K semper sic dividi, ut pars KA, quæ ad verticem est, sit ad partem KC, quæ terminatur ad basin, in ratione sesquialtera, seu ut 3 ad 2.

Eodem modo aliarum figurarum, quæ à curvis superiorum generum comprehenduntur, centra gravitatum investigari possunt.

SECTIO XX.

De circuli projectione in planum, quæ item circulus existat.

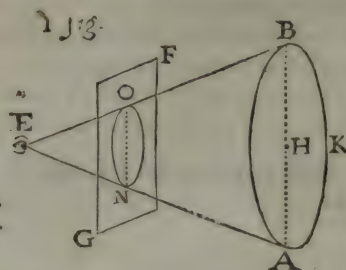
Uo pacto, datis positione circulo & plano tabulæ, locus inveniri possit, ad quem oculo adhibito circulus in circulum projiciatur,

M m m 2

ciatur,

ciatur, ostendit mihi per literas paucis abhinc annis ingeniosissimus atque exercitatissimus D. Claudius Mylon, J.C, qui super hanc rem sequentia excogitavit.

2 p 4 Prop.
Primi Coni-
corum A-
pollonii.



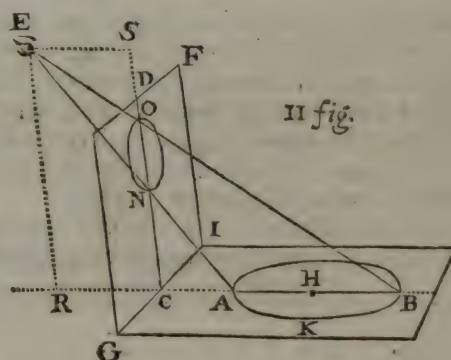
Esto planum tabulae GF, circulus autem datus AKB, oportetque punctum invenire E, ita ut NO, projectio ipsius AKB in dato plano GF, sit etiam circulus.

Primò, si planum tabulae GF & circuli AKB sunt parallela, manifestum est^a, quòd, ubicunque oculus E in spacio solido indefinito extra planum tabulae constitutus fuerit, projectio NO ipsius

AKB in plano GF semper item circulus sit futura.

Secundò verò, si planum tabulae GF & circuli AKB non sint parallela, dico punctum oculi E ubique sumi posse in Hyperbolâ, positione datâ,

Etenim GI existente utriusque plani communi sectione, & rectâ CAHB, super ipsam perpendiculari, in plano circuli AKB transeunte



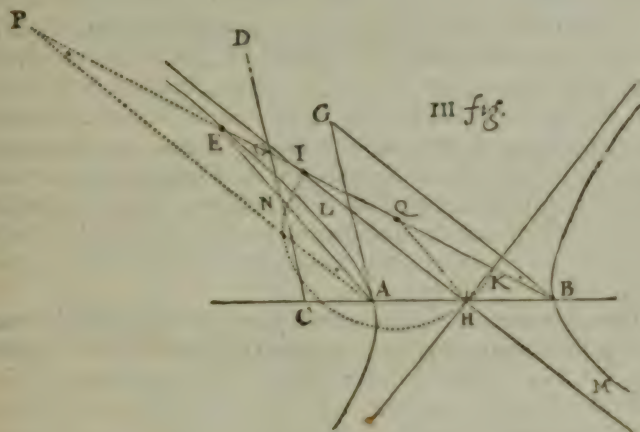
II fig.

per ejus centrum H, si ex C super GI in plano tabulae GF exciterur perpendicularis CD: erit angulus BCD aut ejus complementum^b in-

^b inclinatio horum duorum planorum, & planum, quod per duas has-
ce lineas CB, CD transit, ad utrumque ex illis ^c perpendicularare.

Dein, puncto E existente in plano BCD, quò NO, sectio con-
scaleni EAKB per planum tabulæ GF, circulus existat, requiritur ut
triangulum ENO, ad verticem E abscissum, sit ipsi EBA, triangulo
per axem ^d, simile ac subcontrariè positum, hoc est, ut EO sit ad EN,
sicut EA ad EB.

b p 6 def Vn-
decimi Ele-
mentorum.
c p 18 Prop.
Undecimi
Elem.
d p 5 Prop.
Primi Con-
nic. Apollo-
nii.



Hinc in 3^{ia} figura rectis CB, CD, unà cum punctis A, H, B, &
Eiisdem existentibus, quæ in 2^a figura, si, ductâ AG æquali AB ac
parallelâ CD, jungatur BG, & ex H huic agatur parallela HI, cui
perpendicularis sit HK, atque Asymptotis HI, HK per puncta A &
B describantur ^e Hyperbolæ oppositæ AL, BM: dico punctum oculi
E ubilibet sumi posse in Hyperbola AL vel BM, hoc est, si ex quo-
cunque in ea puncto E agantur EA, EB secantes CD in N & O, quòd
triangula ENO & EBA futura sint similia ac subcontrariè posita.

e p 4 Prop.
Secundi Con-
nic. Apollo-
nii.

Ad quod demonstrandum ducatur AP parallela HI. Hinc cum
BE occurrat ipsi BG, occurreret etiam BE ipsis HI, AP, quæ cum BG
sunt parallelæ. Esto ipsarum BE, AP concursus P. Et quoniam B E
secat Hyperbolas oppositas AL, BM, secabit & ipsa earundem Asym-
ptotos HI, HK. quod sit in I & K. Porro divisâ IK bifariam in Q, de-

Mmm 3 scri-

scribatur ex Q intervallo IQ vel QK semicirculus IHK, qui transibit per H, propter angulum rectum IHK, jungaturque QH.

His igitur sic positis, quoniam IQ est æqualis QK, atque etiam IE
f p 8 Prop. Secundi Co- nic. Apol- loni. æqualis KB, erit & tota EQ toti QB æqualis. Atqui æqualis quo-
g p 2 Prop. Sexti Elem. que est AH ipsi HB. Parallela igitur est s AE ipsi H Q. Est autem
 per constr. etiam AP ipsi H I parallela. Quocirca triangulum AEP
 simile existens triangulo isosceli H Q I, & ipsum isosceles est, ejusque
 angulus ad A æqualis angulo ad P seu huic alterno EBG. Sed in trian-
 gulo isosceli ABG angulus totalis ABG est æqualis angulo G, hoc
 est, totali GAP, ipsi alterno: è quibus æqualibus angulis ABG &
 GAP quum auferuntur æquales EBG & EAP, remanent æquales
 ABE & EAG vel ENO. Hinc cum in triangulis EBA & ENO an-
 guli ABE & ENO sint æquales, & angulus ad E utrique triangulo
 sit communis, erit & 3^{tius} EAB 3^{tius} EON^h æqualis, ac proinde tri-
h p 32 Primi Elem. angulum ENOⁱ simile triangulo EBA. Quæ cum subcontrariè
i p 4 Prop. 1 Def. Sexti Elem. sint posita, patet sectionem NO^k esse circumum. Quod erat facien-
k p 5 Prop. Primi Co- nic. Apol- loni. dum. Eadem est ratio de omni alio puncto, in Hyperbola AL assu-
 pto, aut etiam in opposita Hyperbola BM, transpositis solummodo
 literis A & B, unâ pro alia.

Cæterum notandum, demonstrationem allatam triplici datorum
 positioni convenire, nimirum, sive tabula CD inter oculum E & ob-
 jectum AB, sive oculus E inter tabulam CD & objectum AB, sive
 etiam objectum AB inter oculum E & tabulam CD sumatur; simili-
 terque facile esse demonstrare per absurdum, punctum oculi E non
 posse sumi extra Hyperbolas AL, BM; ac idcirco id ipsum non cade-
 re in Hyperbolas conjugatas.

Verum enimverò quoniam his intellectis perspicere jucundum
 est, quoniam pacto in hæc cogitationes aliquis incidere queat, ut
 punctum oculi E ubicunque in alterutra Hyperbolarum AL vel BM
 pro lubitu sumi posse autumet: non è re me facturum judicavi, si cal-
 culum analyticum, è quo totum hoc innotescit, paucis hîc subjecero.
 Ponatur itaque factum, quod quæritur, sit que

CA $\propto a$
 AB $\propto b$
 AN $\propto c$
 AR $\propto x$
 RE $\propto y$
 EB $\propto z$

Ex similitudine Δ^{rum} RBE & CBO

RB BE CB

$x + b - z - a + b$ ad BO.

$\frac{az + bz}{x + b}$

Que subducta ex BE

$\propto z$, relinquit $\frac{xz - az}{x + b}$,
 pro EO.

Ex

Ex similitudine \triangle^{um} CAN & RAE

$$\begin{array}{ccc} CA & AN & RA \\ a & - - c & - - x \end{array} \mid \text{ad AE. } \frac{cx}{a}$$

Ex suppositione quaesiti,

tanquam facti

subtr. AN. c

EA EB

Vide figuram 11.

$$\begin{array}{ccc} EO & & \\ xz - az & - - - & EN. \frac{cx - ca}{a} - \frac{cx}{a} \mid z \\ x + b & & \end{array}$$

$$\frac{xz - az}{x + b} \propto \frac{cx - ca}{a}$$

$$\frac{zx}{x + b} \propto \frac{cx}{a}$$

$$zx \propto \frac{cx + cbx}{a}$$

Ex similitudine \triangle^{lorum} REB & SEN

EB ER EN ES vel RC

$$\begin{array}{ccc} z & - - y & - - \frac{cx - ca}{a} \mid x - a \end{array}$$

$$xz - az \propto \frac{cy - ca}{a}$$

$$z \propto \frac{cy}{a}$$

$$\& z \propto \frac{cy}{a} \propto \frac{cx + cbx}{a} \propto z$$

$$\text{fit } yy \propto bx + xx$$

$$\& y \propto \sqrt{bx + xx}.$$

Ubi patet, cum in æquatione inventa $yy \propto bx + xx$ alterutra ex incognitis quantitibus x vel y ad duas dimensiones ascendat, & quidem xx signo + adficiatur, punctum quaesitum E cadere in Hyperbolam.

Ad cujus latus rectum & transversum inveniendum, quoniam, quantitate mm nullâ existente, per ea quæ pag. 31 Geometriæ docentur,

tur, latus rectum est $\frac{oz}{a}$, & quidem quantitas ox hîc pro eadem ha-

beri debeat quâ bx , hoc est, o pro eadem quâ b , atque hîc non habeantur z & a : erit latus rectum ox .

*Vide no-
vam Geo-
metria edi-
tionem.*

Deinde, quoniam ratio lateris recti ad transversum latus est ut pz ad aam , & quidem p ipsi m sit æqualis, propterea quod nulla ipsi xx fractio adhæreat, atque z & a , (licet dictum) in inventa æquatione non reperiantur vel sibi invicem sint æquales: erit similiter latus transversum AB ox .

Porrò ut inveniatur centrum, quoniam terminus illud indicans est $\frac{aom}{2pz}$, oportet facere AH ox seu $\frac{1}{2}b$: eritque H , medium ipsius AB , centrum Sectionum.

Denique ER ox $\sqrt{bx+xx}$ erit ordinatim applicata ad diametrum AR . Quæ quidem, si RC vocetur x , erit ox $\sqrt{aa+ab+^2ax+bx+xx}$. Unde cætera huc spectantia facilia sunt.

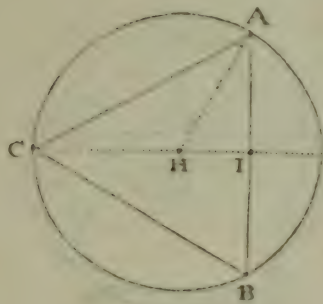
S E C T I O XXI.

De figuris ordinatis, circulo inscriptis; ac angulorum vel arcuum in partes æquales sectione.

Q Uoniam figurarum regularium in circulo descriptio non indifferenter uno eodemque modo procedit, sed pro angulorum numero una longè aliter atque alia ei inscribatur, illiusque descriptionis diversitas à diversa suorum laterum ad radium relatione dependeat: haud inutile fuerit, si, pro radio assumptâ unitate, paucis hîc ostendam, quâ ratione in simplicissimis terminis æquationes inveniri possint, quarum radices dictam hanc laterum ad radium relationem exhibeant, ipsorumque quantitatem exactè determinent. Id quod uno aut altero exemplo ostendisse suffecerit.

In

In triangulo.



Esto CH vel HA $\propto 1$
& AB $\propto x$, eritque AI vel IB $\propto \frac{1}{2}x$.

E \square^o HA. 1

subtr. \square AI. $\frac{1}{4}xx$.

* \square HI. $1 - \frac{1}{4}xx$

HI. $\sqrt{1 - \frac{1}{4}xx}$

add. CH. 1

CI. $1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}xx}$

add. $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ CI. } 2 - \frac{1}{4}xx + \sqrt{4 - xx} + \\ \square \text{ AI. } \frac{1}{4}xx \quad \square \text{ CA vel AB.} \end{array} \right.$

† fit $\square \text{ CA. } 2 + \sqrt{4 - xx} \propto xx$

$\sqrt{4 - xx} \propto xx - 2$

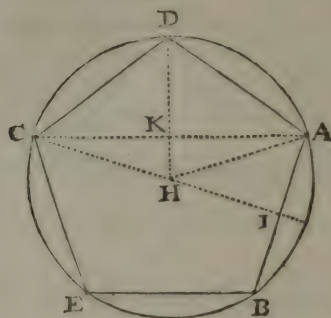
$4 - xx \propto x^2 - 2xx + 4$

$3xx \propto x^2$

$3 \propto xx$, vel $xx - 3 \propto 0$. Equatio trian-
guli.

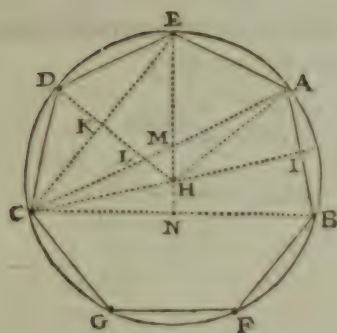
Nnn

111

In pentagono.Ex similitudine \triangle^{um} HAI & CDK $\square HA \quad * \square HI \quad \square CD \quad \square CK$ $1 \text{ --- } 1 - \frac{1}{4}xx \text{ --- } xx \mid \text{ad } xx - \frac{3}{4}x^2$

$$\begin{array}{r}
 \text{per } 4 \quad \dagger \square CA \\
 \dagger \text{ fit } \square CA. \quad 4xx - x^2 \text{ } \times 2 \dagger \sqrt{4 - xx} \\
 \text{--- } 2 + 4xx - x^2 \text{ } \times 1 / 4 - xx \\
 \hline
 4 - 16xx + 20x^2 - 8x^3 + x^4 \text{ } \times 4 - xx \\
 \hline
 x^6 - 8x^4 + 20xx - 15 \text{ } \times 0 \\
 \hline
 \text{div. per } xx - 3 \text{ } \times 0 \quad \begin{array}{l} x^4 - 5xx + 5 \text{ } \times 0. \\ \text{Aequatio pentagoni.} \end{array}
 \end{array}$$

In

In heptagono.Ex similitudine $\triangle^{sum} HAI$ & CDK

$$\left. \begin{array}{l} HA \quad AI \quad CD \quad DH. \quad 1 \\ 1 - \frac{1}{2}x - x \end{array} \right\} \text{ad } DK. \frac{1}{2}xx \text{ subtr.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ex simi-} \quad \square CH \quad KH. 1 - \frac{1}{2}xx \quad + \quad \square CE \quad \square CN \\ \text{line} \\ \triangle^{sum} \quad 1 - \square KH. 1 - xx + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xx - x^2 \mid \text{ad } 4xx - 4x^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 \\ CKH \& ENG \quad + \square CA \quad \square CB \text{ vel } CA \quad 4 \end{array}$$

$$\text{fit } 2 + \frac{1}{4} - xx \mid 16xx - 20x^2 + 8x^3 - x^4$$

$$\frac{1}{4} - xx \mid -2 + 16xx - 20x^2 + 8x^3 - x^4$$

$$\begin{array}{l} 4 - xx \mid 4 - \frac{1}{4}xx + \frac{11}{4}x^2 - \frac{67}{4}x^3 + \frac{66}{4}x^4 - \frac{33}{2}x^5 + \frac{10}{4}x^6 + \frac{1}{4}x^7 + x^8 \\ x^4. 16x^2 + 104x^{10} - 352x^8 + 660x^6 - 672x^4 + 336xx - 63 \mid 0. \text{ Equa-} \\ \text{tio h\ae c dividi potest per } xx - 3 \mid 0. \end{array}$$

Et fit

$$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \mid 0.$$

Hæc verò æquatio ulteriùs dividi nequit per binomium, quod constat ex quantitate incognita xx , + vel - aliquo numero, ultimum terminum 21 absque fractione dividente; sed per aliam summam, ut post patebit.

Nnn 2

No-

Notandum autem, tam æquationem inventam Pentagoni, quàm hanc priorem Heptagoni peridem binomium, utpote $xx - 3 \propto 0$, quæ est æquatio Trianguli, & non per aliud quodvis binomium esse divisibilem.

Aliter per modum trisectionis.

Ex similitudine $\triangle^{\text{num}} \text{HCD} \& \text{DCL}$

HC CD CD Ex DH. 1 }
1 - x - x | ad DL. xx } subtr.

HD DE

Add.

Ex similitudine $\triangle^{\text{num}} \text{HDE} \& \text{HLM}$. 1 - x - x | ad LM. x + x³

CL vel CD. x

MA vel AE. x

CA. $3x - x^3$

$3x - x^3$

$-3x^4 + x^6$

$9xx - 3x^4$

$\dagger \square \text{CA}$

fit $\square \text{CA. } 9xx - 6x^4 + x^6 \propto 2 + \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 9xx - 6x^4 + x^6 \propto \sqrt{4 - xx}$

$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 4 \propto 4 - xx$

$x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$.

Hæc æquatio per binomium est indivisibilis. Quòd si verò ipsa dividatur per æquationem inventam Pentagoni $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, prodibit $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquatio Heptagoni, in simplicissimis terminis. Quæ etiam obtinebitur dividendo æquationem ante inventam $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ per hanc summam $x^6 - 6x^4 + 9xx - 3 \propto 0$. Oritur enim rursus $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Quæ & hoc insuper modo inveniri potest: nimirum, comparando quadratum ex CA, bisectionis modo quæsitum, cum eodem quadrato CA, per trisectionis modum investigato, omitendo ejusdem quadrati valorem $\propto \dagger 2 + \sqrt{4 - xx}$.

Hoc est, ponendo $16xx - 20x^4 + x^6 - x^8 \propto 9xx - 6x^4 + x^6$

& fit $x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 7xx \propto 0$

vel $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Æquatio heptagoni, ut ante.

His

His adde reductionis modum à D^{no} Huddenio inventum, quo ex binis inventis æquationibus $x^{12} + 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ & $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$ æquationem simplicissimam sic investigat, attollendo scilicet inferiorem, ut ad æque multas cum superiore dimensiones ascendat, ac deinde operando, ut sequitur.

$$\begin{array}{r} x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 35xx \quad \propto 0 \\ x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0 \\ \hline x^{10} - 11x^8 + 45x^6 - 84x^4 + 70xx - 21 \propto 0 \\ x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0 \\ \hline \text{div. per } xx - 2x^8 - 2x^6 + 28x^4 - 35xx + 14 \propto 0 \\ \text{\& fit } x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0. \text{ Ut supra.} \end{array}$$

Porro quoniam circulo inscripsis Hexagono, Decagono, & Tetradecagono, radio, ut supra, existente $\propto 1$, & latere Polygoni $\propto x$, æquationes inveniuntur $x - 1 \propto 0$, $xx + x - 1 \propto 0$, & $x^3 - xx - x + 1 \propto 0$, quæ præcedentibus Trianguli, Pentagoni, & Heptagoni sunt simpliciores (id quod similiter de sequentibus Polygonis, dupli-angulorum numeri, intelligendum est): consultius fuerit ut in eorum descriptionem æquationes, quæ Polygonis hisce dupli-angulorum numeri respondeant, investigemus.

Quoniam autem ad æquationes hæc, sicut & ad superiores, compendiosè inveniendas plurimùm deserviunt æquationes, quibus datum angulum seu arcum in partes aliquot æquales dividere licet, subjungam eas, quæ ab eodem Huddenio hunc in finem sunt inventæ, qui ipsas tantà cum facilitate unam ex alia elicere novit, ut unius circiter horæ quadrantis spacio sequentes mihi suppeditaverit,

*Æquationes, ad dividendum angulum seu arcum
in partes æquales, numero impares.*

$x^3 - 3x + 9 \propto 0$	} æquatio, ad dividendum angulum seu arcum in	} $\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \end{array} \right.$ æquales partes.
$x^5 - 5x^3 + 9x - 9 \propto 0$		
$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 9 \propto 0$		
$x^9 - 9x^7 + 17x^5 - 30x^3 + 13x - 9 \propto 0$		
$x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + 9 \propto 0$		
$x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 157x^7 + 189x^5 - 91x^3 + 13x - 9 \propto 0$		

Nnn 3

Ratio

Ratio autem, quâ eas invenit, est talis:

Supposito radio circuli $\propto 1$, & subtensa arcus dati $\propto q$, ponatur subtensa quæsitæ partis $\propto x$. Dein operatio ad trisectionem ita instituitur

$$\begin{array}{rcl}
 x & . & 1 \\
 \text{Mult. per } x & . & 2 \\
 \text{subtr. } xx & . & 3 \\
 \text{ex unitate seu } 1 & . & 4 \\
 \hline
 1 - xx & . & v \\
 \text{Mult. per } x & . & 2 \\
 \hline
 x - x^3 & . & 6 \\
 \text{add. } x & . & 1 \\
 \hline
 2x - x^3 & . & \text{VII} \\
 \text{add. } x & . & 1
 \end{array}$$

Eritque $q \propto 3x - x^3$. 8. Aequatio trisectionis.

Ad quinque sectionem, sicut & ad omnes ulteriores sectiones impares, idem fermè est processus, modò pro primo termino nunc sumatur ille, qui ante notabatur VII, & tertii termini subtractio non ampliùs jam ex unitate sed ex eo, qui per v in immediatè antecedenti operatione denotabatur, deinceps in aliis omnibus fiat.

Quemadmodum hîc videre licet.

$$\begin{array}{rcl}
 (\text{VII}) \ 2x - x^3 & . & 1 \\
 \text{Mult. per } x & . & 2 \\
 \text{subtr. } 2xx - x^4 & . & 3 \\
 \text{ex (v)} \ 1 - xx & . & 4 \\
 \hline
 1 - 3xx + x^4 & . & v \\
 \text{Mult. per } x & . & 2 \\
 \hline
 x - 3x^3 + x^5 & . & 6 \\
 \text{add. } 2x - x^3 & . & 1 \\
 \hline
 3x - 4x^3 + x^5 & . & \text{VII} \\
 \text{add. } 2x - x^3 & . & 1 \\
 \hline
 \text{\& fit } q \propto 5x - 5x^3 + x^5 & . & 8. \text{ Aequatio quinque sectionis.}
 \end{array}$$

Ope-

Operatio autem septusectionis est hujusmodi:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(vii)} & 3x - 4x^3 + x^5 & . 1 \\
 \text{Mult. per} & x & . 2 \\
 \text{subtr.} & 3xx - 4x^4 + x^6 & . 3 \\
 \text{ex (v)} & 1 - 3xx - x^6 & . 4 \\
 & 1 - 6xx + 5x^4 - x^6 & . v \\
 \text{Mult. per} & x & . 2 \\
 & x - 6x^3 + 5x^5 - x^7 & . 6 \\
 \text{add.} & 3x - 4x^3 + x^5 & . 1 \\
 & 4x - 10x^3 + 6x^5 - x^7 & . vii \\
 \text{add.} & 3x - 4x^3 + x^5 & . 1
 \end{array}$$

Et habebitur $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$. 8. Aequatio septusectionis.
Et sic de aliis in infinitum.

Deinde ut pateat, quo pacto æquationes, quibus datus angulus seu arcus in partes numero pares dividi potest, inveniendæ sint, oportet tantum in æquatione, quâ datus angulus seu arcus in æquales partes dividitur, loco quantitatis incognitæ x , ubique $\sqrt[4]{4xx - x^4}$ substituere, & loco xx hujus quadratum, hoc est. $4xx - x^4$, atque ita porro: habebiturque alia æquatio, per quam idem angulus seu arcus in duplo plures partes secabitur.

Sic, cum, exempli gratiâ, æquatio, quâ angulus in 2 æquales partes dividitur, sit $x^4 - 4xx + qq \propto 0$, assumpto $4xx - x^4$ locum xx

$$\begin{array}{rcl}
 \text{scribo} & 16x^4 - 8x^6 + x^8 & \text{pro } x^4 \\
 & 8 - 16xx + 4x^4 & \text{pro } -4xx \\
 \text{nec non} & + qq & \text{pro } +qq.
 \end{array}$$

& inveniatur $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + qq \propto 0$. Aequatio sectionis anguli seu arcus in 4 æquales partes.

Sic &, æquatione, quâ angulus in 3 æquales partes dividitur, existente $x^3 - 3x + q \propto 0$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{scribo} & 4xx - x^3 \sqrt[3]{4xx - x^3} & \text{pro } x^3 \\
 & 8 - 3 \sqrt[3]{4xx - x^3} & \text{pro } -3x \\
 \text{ut} & + q & \text{pro } +q \\
 \text{\& habeo} & q + 4xx - x^3 - 3 \sqrt[3]{4xx - x^3} \propto 0 \\
 \text{hoc est,} & -4xx + x^3 + 1 \sqrt[3]{4xx - x^3} \propto q
 \end{array}$$

& sic,

& fit, ductâ utrâque parte in se quadratâ, ordinatâque æqualitate, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + qq = 0$. Æquatio dividendi angulum seu arcum in 6 æquales partes.

Similiterque, cum $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + qq = 0$ sit æquatio, quâ angulus in 4 æquales partes secatur, invenietur, operando ut ante, $x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64xx + qq = 0$. Quæ est æquatio dividendi angulum seu arcum in 8 æquales partes. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, æquationes hæc inventas, quibus angulus seu arcus in æquales partes sive pares sive impares dividitur, non semper esse simplicissimas, nisi tantum cum partium illorum numerus est primus. At verò reliquas quod attinet, quamvis ad præcedentes referri possint, ipsas tamen nihilominus sic ad Polygonorum æquationes, quales illas invenire intendimus, optimè omnium inservire. Id quod ostendere nunc nostrum est institutum.

In hunc finem inveniantur duæ æquationes diversæ, unam eandemque habentes quantitatem incognitam. Ad quas obtinendas, assumpto radio $= 1$, & latere Polygoni, cujus numerus angulorum sit dati duplus, $= x$, accipio duas æquationes ex jam inventis, quarum una inserviat divisioni anguli seu arcus in tot partes æquales, quot indicat minor semissis dati numeri angulorum; & altera eidem dividendo in tot partes, quot indicat ejusdem numeri major semissis. Quæ binæ si deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, & in priori pro qq substituatur $2 - x$ & in posteriori pro qq substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes diversæ, unam eandemque quantitatem incognitam habentes, quæ superiori modo reductæ dabunt æquationem simplicissimam quæsitam, in quâ incognita quantitas latus Polygoni designat, dupli angulorum numeri.

Ut ad describendum Pentagonum in circulo, quoniam, assumpto radio $= 1$, & latere Decagoni $= x$, minor semissis numeri angulorum 5, est 2, & major semissis 3, hinc duas accipio æquationes, ex supra inventis, nimirum: $qq = 4xx - x^4$ & $qq = 3x - x^3$, quarum una inserviat dividendo angulo seu arcui in 2, & altera eidem dividendo in 3 æquales partes. Quæ binæ si ad eandem quantitatem qq revocentur, atque in æquationibus inde ortis $qq = 4xx - x^4$ & $qq = 9xx - 6x^4 + x^6$ pro qq in priori substituatur $2 - x$ & pro qq in posteriori substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes differentes ejusdem radicis, nempe $x^4 - 4xx - x + 2 = 0$ & $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 = 0$, quæ,

quæ, modo supra explicato, reductæ dabunt $xx + x - 100$, æquationem simplicissimam Decagoni.

Sic & ad describendum Heptagonum in circulo, quoniam ipsius 7, numeri angulorum, minor semissis est 3, & major semissis 4, ideo assumptis binis æquationibus $q \propto 3x - x^3$ & $q \propto -x^3 + 8x^6 - 20x^4 + 16xx$, quarum prior angulo seu arcui in 3, & posterior eidem in 4 æquales partes dividendo inservit: fit, ut si ipsæ deinde ad eandem quantitatem q revocentur, ac in priori harum pro q substituatur $2 - x$, & in posteriori pro q substituatur $2 + x$, duæ ejusdem radices æquationes, sed tamen differentes, utputa $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 200$ & $-x^6 + 8x^6 - 20x^4 + 16xx - x - 200$, remaneant. Quæ si porro, ut supra, reducantur, dabunt $x^3 - xx - 2x + 100$, æquationem simplicissimam Tetradecagoni.

Haud secus ad describendum Endecagonum in circulo, ex binis æquationibus superioribus $q \propto 5x - 5x^3 + x^5$ & $q \propto -x^3 + 12x^6 - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ (quarum una ad angulum seu arcum in 5, & altera ad eundem in 6 æquales partes dividendum inservit) duæ ejusdem radices æquationes differentes inveniuntur $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 200$ & $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx - x - 200$. Quæ, ut ante, reductæ dabunt $x^5 - x^2 - 4x^3 + 3xx + 3x - 100$, æquationem simplicissimam 22goni.

Pari modo, si in circulo 13gonum sit describendum, ope æquationum $q \propto -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ & $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$, quibus datus angulus seu arcus in 6 & 7 æquales partes dividitur, inveniuntur binæ ejusdem radices æquationes differentes $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx + x - 200$ & $x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^6 - 196x^4 + 49xx - x - 200$. Ex quibus deinde, reductione ante ostensâ, invenitur $x^6 + x^3 - 5x^4 - 4x^3 + 6xx + 3x - 100$, æquatio simplicissima 26goni. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, præter æquationes inventas & alias inveniri posse, quarum reductione, ut supra, facilius ad æquationes Polygonorum simplicissimas pervenitur: nimirum, assumendo æquationem sectionis anguli seu arcus in tot partes æquales, quot Polygonum habet angulos, & in locum q substituendo deinde binarium: habebiturque æquatio, cujus incognita quantitas designat latus polygoni dupli angulorum numeri. Quæ æquatio si porro cum altera ex binis superioribus, quæ non per multiplicationem ad q est reducta, compare-

O o o tur;

tur: reductione harum duarum quæ sita simplicissima, brevius quàm supra, obtinebitur.

Ut quoniam ad describendum in circulo Pentagonum æquatio sectionis anguli seu arcus in 5 æquales partes est $x^5 - 5x^3 + 5x - q \cdot 100$, mutatâ q in 2, habebitur $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \cdot 100$. Quæ est æquatio Decagoni. Hæc autem si cum $x^4 - 4xx - x + 2 \cdot 100$, quæ altera est supra inventarum, multiplicatione ad qq non reducta, comparetur, præcedenti reductione simplicissimam Decagoni æquationem brevius quàm supra manifestabit. Et sic de aliis in infinitum.

Ad hæc notandum, cum & aliæ æquationes existant, eidem Polygono in circulum describendo inservientes, quarum reductione, sive illæ inter se, sive cum aliis præcedentibus comparentur, æquatio simplicissima Polygones inveniri queat: suffecerit id uno aut altero exemplo ostendisse. Quippe in Decagono præter tres superiores inventas, utputa $x^4 - 4xx - x + 2 \cdot 100$, $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 \cdot 100$, & $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \cdot 100$, reperiuntur etiam $x^6 - 4x^4 + 4xx - 1 \cdot 100$ & $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \cdot 100$.

Sic etiam in 14^{gono} præter tres $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \cdot 100$, $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + x + 2 \cdot 100$, & $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 2 \cdot 100$ inveniantur etiam $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \cdot 100$, & $x^6 - 5x^4 + 6xx - 1 \cdot 100$.

Haud secus in 22^{gono} præter tres $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \cdot 100$, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + x + 2 \cdot 100$, & $x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + 2 \cdot 100$ invenitur etiam $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \cdot 100$.

Præterea animadversione dignum, quòd, quemadmodum supra æquatio $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \cdot 100$, una ex binis pro Heptagono inventis, divisa per $x^4 - 5xx + 5 \cdot 100$, æquationem Pentagoni, dat $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \cdot 100$, æquationem simplicissimam Heptagoni; ita etiam hic æquatio $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \cdot 100$, una ex illis pro 14^{gono} inventis, divisa per $xx + x - 1 \cdot 100$, æquationem Decagoni, exhibeat $x^3 - xx - 2x + 1 \cdot 100$, æquationem simplicissimam 14^{goni}.

Sic etiam, quòd $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \cdot 100$, una ex illis pro 22^{gono} inventis, divisa per $x^3 - 3x + 1 \cdot 100$, æquationem 18^{goni}, exhibeat æquationem $x^6 - 5x^4 - x^3 + 6xx + 2x - 1 \cdot 100$. quæ, prout per $x + 1 \cdot 100$ divisa fuerit, ostendat $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \cdot 100$, æquationem simplicissimam 22^{goni}.

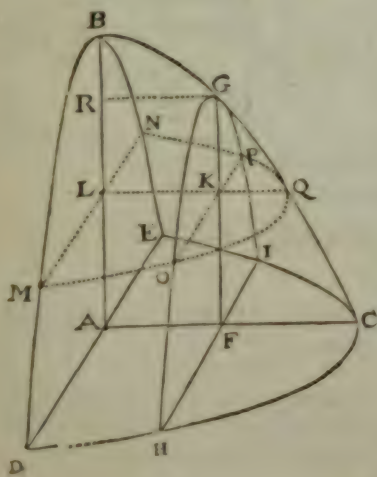
Ostendimus itaque regulas generales, quibus æquationes omnium simplicissimæ

simplicissimæ, tum ad angulum seu arcum in partes quocunque æquales dividendum, tum ad describenda in circulo quælibet Polygona regularia, inveniri queant. Ubi tandem advertendum, methodum hanc, quâ duæ aut plures æquationes differentes, unam tantum eandemque quantitatem incognitam habentes, mutuâ reductione simplicissimam æquationum subministrant, ad aliorum quoque difficultiorum Problematum æquationes simplicissimas investigandas, inservire posse.

SECTIO XXII.

De lineis curvis superiorum generum, ex solidi sectione ortis.

Cum curvarum linearum contemplatio per se jucunda pariter atque utilis existat, ac illæ, quæ superioris sunt generis vel ultra Sectiones Conicas compositæ, à nullo (quod sciam) hætenus ex solidi alicujus sectione generari ostensæ sint: visum fuit, quæ circa hanc rem tribus abhinc annis ab ingeniosissimo ac amicissimo nostro Huddenio excogitata & inventa sunt, atque illarum cognitionem mirificè promovere valent, lubenti animo hîc impertiri.



Est DHCIE Parabola primi generis, (hoc est, qualis oritur ex sectione Coni, uni laterum trianguli per axem parallelâ) cujus axis sit AC, & ordinatim ad eum applicata DAE. Erectâ autem ex A super plano hujus Parabolæ perpendiculari AB, intelligantur ex B per singula puncta Parabolæ DHCIE descriptæ esse aliæ Parabolæ, habentes communem axem AB, ita ut DMBNE tota Parabola, & ABGQC semi-Parabola existat. Quibus ita positis cum hoc pacto solidum

O o o 2

dum concipi possit, in quo sectio quævis per AB incedens, ut & quæ basi DHCIE sit parallela, Parabolæ existunt; atque in eo deinde sectio institui queat, ut HOGPI, quæ Parabolæ DMBNE sit parallela; dico sectionem hanc HOGPI curvam fore, quæ 2^{di} est generis.

Ad quod demonstrandum supponatur planum basi DHCIE æquidistans, secans quidem planum curvæ HOGPI secundum rectam lineam OKP, & planum Parabolæ DMBNE secundum rectam MLN, at planum semi-Parabolæ ABGQC secundum rectam LKQ, quodque secans solidum in sectione faciat curvam MOQPN.

His igitur sic præsuppositis, cum GF axis curvæ HOGPI sit ipsi BA axi Parabolæ DMBNE parallelus, nec non rectæ MLN & OKP ipsis ordinatis DAE, HFI parallelæ: erunt & ipsæ MLN & OKP inter se parallelæ, & ad axes BA, GF ordinatæ. Deinde, ex G ductâ GR ipsi QKL vel CFA parallelâ, donec secet ARB in R, factâque GK æ x, OK vel KP æ y, AB æ a, AC æ b, DA vel AE æ g, & GR vel KL æ c, procedo, ut sequitur.

Ex natura Parabolæ

$$\begin{array}{l}
 \square AC \square RG \text{ AB} \\
 bb \dots cc \dots a \mid \text{ad RB. } \frac{acc}{bb} \\
 \text{Ex natura} \quad \text{adde L R vel KG. } x \\
 \text{Parabolæ} \quad \text{AB} \quad a \quad \text{I. E. } \frac{acc}{bb} + x \quad \left\{ \begin{array}{l} \square DA \text{ vel AE} \\ \square AC \end{array} \right\} \text{ad} \left\{ \begin{array}{l} \square ML \text{ vel LN} \\ \square LQ \\ \square AC \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} \\ \frac{cc}{a} + \frac{bbx}{a} \\ \frac{ML \text{ vel LN}}{bb} + \frac{ggx}{a} \end{array} \right. \\
 \text{Unde LQ. } \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} \\
 \text{subtr. RG vel LK. } c \\
 \text{reliq. KQ. } \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - c.
 \end{array}$$

Jam quia sectio MOQPN, parallela basi DHCIE, quæ Parabolæ est, etiam Parabolæ existit: erit rursus

Ex

Ex natura Parabolæ

$$\frac{LQ}{\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}} \dots \frac{KQ}{\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}} - c \dots \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} \Big| \text{ad } \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} - \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} \\ \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} \propto yy.$$

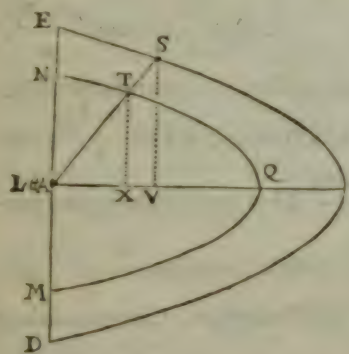
$$\text{Hoc est, } yy \propto \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} - \sqrt{\frac{ac^2g^2 + g^2ccbbx}{a^2b^2}} \text{ vel } \sqrt{\frac{ac^2g^2 + g^2ccbbx}{a^2b^2}} \propto \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} - yy.$$

Unde, quadratis singulis partibus, demptisque æqualibus, invenitur

$$\frac{g^2ccx}{abb} + \frac{g^2xx}{aa} - \frac{ggcc}{bb}yy - \frac{ggx}{a}yy + y^2 \propto 0$$

$$\text{Sed } y^2 \propto \frac{ggx}{a}yy + \frac{ggcc}{bb}yy - \frac{g^2}{aa}xx - \frac{g^2cc}{abb}x.$$

Cum igitur in hac æquatione quantitas incognita y ad quatuor dimensiones ascendant, nec ipsa æquatio ad aliam reduci possit, in qua y pauciores habeat dimensiones, & in qua nullum simul signum radicale uni vel pluribus terminis præfigatur, in quibus reperitur x : sequitur sectionem HOGPI esse lineam curvam secundi generis.



Ut verò constet curvam MOQPN esse Parabolam, quemadmodum hæcenus fuit suppositum, considerandum est, quadratum lineæ cujusque ex L ductæ ad aliquod in ea punctum, facientis cū LM vel LN quicumque angulum, eandem habere rationem ad quadratum lineæ ex A ad Parabolam DHCIE ductæ, eundem cum AD vel AE angulum facientis, quam BL habet ad BA. Proinde sumendo

in adjuncta figura similes literas similes referre lineas, erit quadratū ex LM vel LN ad quadratum ex AD vel AE, ut quadratum ex LQ ad quadratum ex AC, & ut quadratum ex LT ad quadratum ex AS; supponendo lineas LT & AS ad libitum esse ductas, sicut dictum est.

Porro ad veri inquisitionem, demissis ex T & S super LQ & AC

Ooo 3

per-

perpendicularibus TX & SV, voco AD vel AE a , LM vel LN b , AC c , & AV x , ac postea ita pergo.

$$\square AD \text{ vel } AE \quad \square LM \text{ vel } LN \quad \square AC \quad \frac{bbcc}{aa} \mid \text{ad } \square LQ. \frac{bbcc}{aa}, \text{ unde } LQ \text{ fit } \frac{bc}{a}.$$

Ex natura Parabolæ

$$\square AC \text{ VC } \square AD \text{ vel } AE \quad \frac{aac - aax}{c} \mid \text{ad } \square VS. \frac{aac - aax}{c}$$

adde $\square AV. xx$

$$\square AD \text{ vel } AE \quad \square LM \text{ vel } LN$$

$$\frac{aa}{c} \dots \frac{bb}{c} \dots \square AS. \frac{aac - aax}{c} + xx \mid \text{ad } \square LT. \frac{bbc - bbx}{c} + \frac{bb}{aa} xx \left. \vphantom{\frac{aa}{c}} \right\} \text{subtr.}$$

$$\square AS \quad \square VS \quad \square LT \quad \frac{aac - aax}{c} + xx \dots \frac{aac - aax}{c} \dots \frac{bbc - bbx}{c} + \frac{bb}{aa} xx \mid \text{ad } \square XT. \frac{bbc - bbx}{c}$$

$$\text{reliq. } \square LX. \frac{bb}{aa} xx$$

$$\text{Ergo } LX. \frac{bx}{a}, \text{ quæ subducta ex}$$

$$LQ \frac{bc}{a}, \text{ relinquit } \frac{bc - bx}{a},$$

pro XQ.

Jam si curva MOQPN Parabola existat, erit ex natura Parabolæ

$$LQ \frac{bc}{a} \text{ ad } XQ \frac{bc - bx}{a}, \text{ ut } \square LN \propto bb \text{ ad } \square XT \propto \frac{bb - bbx}{c}; \text{ adeo}$$

oque si $\frac{bc}{a}$ multiplicetur per $\frac{bbc - bbx}{c}$ debet productum æquari pro-

ducto ex $\frac{bc - bx}{a}$ in bb . Unde cum utrobique reperiatur $\frac{b^3c - b^3x}{a}$, ma-

nifestum est, curvam MOQPN esse Parabolam. Quemadmodum erat propositum.

Denique si hæc sectio HOGPI incedat perpendicularis per hujusmodi inventas curvas 2^{di} generis perinde atque ipsa jam per Parabolas 1^{mi} generis transire supposita fuit, exsurget inde alia rursus altioris generis curva linea. Per quas si denuo simili modo sectio transire fingatur, alia iterum superioris generis curva obtinebitur. Atque ita deinceps in infinitum, sicut superiori modo fit manifestum.

Cæ-

Cæterum ut pateat, & aliâ ratione hujusmodi curvas per solidi sectionem generari posse, revocetur huc prima figura, in qua, ut ante, curvâ DHCIE existente Parabolâ, cujus axis AC, & ordinatim applicatâ DAE, rectâ AB sit ad planum hujus Parabolæ DHCIE perpendicularis, & curva ABGQC semi-Parabola, cujus axis sit BA, & ordinatim applicatæ AC, LQ, RG. Deinde concipiatur Parabolam hanc DHCIE sursum moveri, ita ut, dum ejus planum continuè plano basis est æquidistans, vertex ipsius C semper reperiatur in curva CQGB, & axis ejus AC in rectâ ALRB. Quibus ita positis, describetur hâc ratione figura semi-Conoidis DMBNEC, cui si altera similis & æqualis figura adponatur, hæc binæ speciem Conoidis referent, cujus ideo semissis est DMBNEC. In qua Conoide si porro, ut supra, sectio instituitur, qualis est HOGPI, exhibebit ipsa curvam lineam 2^{di} generis.

Etenim factâ eâdem, quâ prius, præparatione, erit KQ, ut ante, $x \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - c$; adeoque $\square OK$ vel KP (propter Parabolam

DHCIE) $x \frac{gg}{b} \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - \frac{ggc}{b} xy$. Quæ æquatio, à signo radicali

liberata, dat $y^4 + \frac{2ggc}{b} y - \frac{g^4}{a} x = 0$. In hac verò cum incognita quantitas y ad quatuor dimensiones ascendat, nec ipsa, ut ante, reduci possit: sequitur lineam curvam HOGPI esse 2^{di} generis.

Jam si, in locum describendi semi-Conoidem DMBNEC per Parabolam DHCIE, ipsa per hanc inventam curvam HOGPI describatur, exurget inde alia altioris generis curva linea.

Ut patet, si in æquatione $y^4 + \frac{2ggc}{b} y - \frac{g^4}{a} x = 0$ in locum x substituitur $\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - c$, atque ipsa deinde à signo radicali liberetur:

habebitur enim $y^4 + \frac{2ggc}{b} y^6 + \frac{g^4c}{a} y^4 + \frac{2ggcc}{ab} y - \frac{g^4bbx}{a^2} = 0$. In quâ

cum incognita quantitas y ad 8 dimensiones assurgat, nec ipsa, ut supra, reduci possit: sequitur, curvam hanc HOGPI fore quarti generis.

Eodem modo, si, ad describendam hanc semi-Conoidem DMBNEC,

DMBNE C, in locum præcedentis curvæ adhibeatur jam posterior hæc inventa curva, exhibebit sectio HOGPI aliam iterum altioris generis curvam, quæ octavi erit generis; atque hæc aliam rursus altiore 16^{ti} generis. Et sic ulterius in Geometrica Progreſſione in infinitum.

Porro ſi in locum deſcribendi hanc ſemi-Conoidem per Parabolam ipſa deſcribatur per motum ſemi-Circuli, aut ſemi-Ellipſis, aut etiam Hyperbolæ, cujus axis ſit AC, & ordinatim adplicata DAE: erit ſimiliter ſectio HOGPI linea curva ſecundi generis. Quæ ſingulæ rursus in locum ſemi-Circuli, ſemi-Ellipſis, aut Hyperbolæ adhibita alias ſimiliter curvas quarti generis producent; & hæc denuo alias 8^{vi} generis, atque ita deinceps in infinitum, ut ſupra.

Similiter quæ ſi loco ſemi-Parabolæ ABGQC ſumatur ſemi-Hyperbola, vel Ellipſis aut Circuli quadrans, ſectio HOGPI pariter curvam lineam altioris generis exhibebit, & hæc rursus aliam altiore, atque ita porro in infinitum.

SECTIO XXIII.

*Demonſtratio primi modi conſtructionis Problematis 7^{mi},
Appendicis, Problematum Simplicium.*

Quoniam conſtructionis hujus veritas in profundo magis latere videatur, quàm ut ipſa à quovis, ut quidem aliarum conſtructionum, in eadem Appendice traditarum, demonſtrationes inveniri poſſit, quæque idcirco à nobis, ne aliis exercendi materiam præriperemus, conſultò ſunt omiſſæ: non è re fuerit in ejusdem conſtructionis demonſtrationem ſequentia in medium afferre.

Esto AC $\propto a$

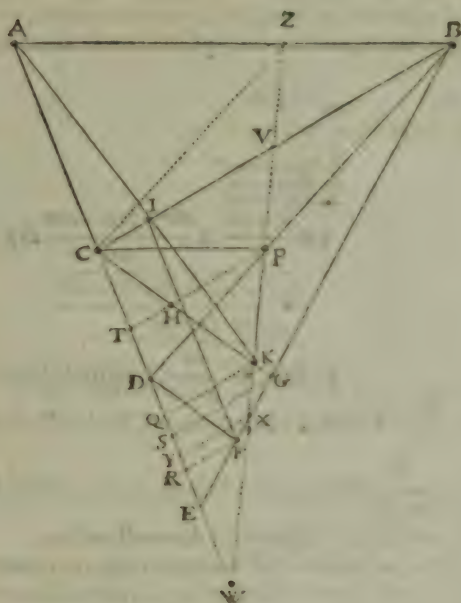
CD vel DE $\propto b$, eritque CE $\propto 2b$

CB $\propto c$

CQ $\propto x$, eritque AQ $\propto a + x$

& QK $\propto y$.

AQ QK AC
 $a + x - y - a$ | ad CI ſeu RF $\frac{yy}{a + x}$. Unde SG erit $\frac{2ay}{a + x}$.
 CB



$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} CB \cdot CE \cdot SG \\ c - 2b - \frac{2ay}{a+x} \end{array} \right| \text{ad SE. } \left. \begin{array}{l} CE \cdot 2b \\ 4aby \\ ca+cx \end{array} \right\} \text{subtr.} \\
 \hline
 QK \cdot CQ \cdot SG \\
 y - x - \frac{2ay}{a+x} \left| \text{ad CS. } \frac{2ax}{a+x} \right. \text{CS. } \frac{abc+bcx-aby}{ca+cx} \\
 \hline
 \frac{acx \mp abc+bcx-aby}{aby \mp abc+bcx-acx} \\
 \hline
 \text{fit } y \mp \frac{abc+bcx-acx}{ab}. \text{ Jam cum hac}
 \end{array}$$

æquatio id omne, quod puncti K vel O determinationem concernit, cujusmodi illud hic est inventum, includat, atque ipsa pari modo ad infinita alia determinanda (propter x vel y pro lubitu sumendam) se
 P p p exten-

ratur 4^{ta} proportionalis CW: erit W punctum intersectionis qua-
situm.

Porò ut constet, quâ ratione linea AB à recta, in qua reperiuntur
puncta inventa K & O, secetur: opus tantum erit considerare, post-
quam CP ostensa est ipsi AB parallela & CB in V bifariam divisa,
triangulum CVP triangulo BVZ, per 26 primi Elem., esse æquale.
hoc est, quòd præter æqualia latera CV, VB, & duos angulos VCP
& PVC, ipsis VBZ & ZVB æquales, etiam latera PV & VZ, ut &
CP & ZB æqualia sint. His enim æqualibus existentibus, erunt & in
triangulis PVB & ZVC, propter laterum æqualitatem, angulos ad
verticem V comprehendentium, qui ad bases anguli BPV & VZC,
per 4 Primi Elem., æquales; adeoque CZ ipsi DPB, per 27 Primi
Elem., parallela. Ac proinde, per 2 sexti Elem., AZ ad ZB, sicut AC
ad CD. E quibus exinde quoque inferre licet, AC ad CD esse, sicut
AW ad CW: quandoquidem tam AC ad CD, quàm AW ad CW
eandem rationem habet, quam AZ ad ZB vel CP.

Denique, lineæ EB & rectæ, in quam cadunt puncta inventa K &
O, intersectio eodem investigatur pacto, quo rectæ hujus & lineæ
DB intersectio supra fuit inventa, quemadmodum hic videre licet.

$$\begin{array}{l} \frac{CB}{c-2b-y} \cdot \frac{CE}{y} \cdot \frac{YX}{x} \mid \text{ad } YE. \frac{2by}{c} \propto 2b-x \\ \frac{2by \propto bc - cx}{y \propto \frac{bc - cx}{b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y} \\ \frac{2ab - ax \propto ab + bx - ax}{ab \propto bx} \end{array}$$

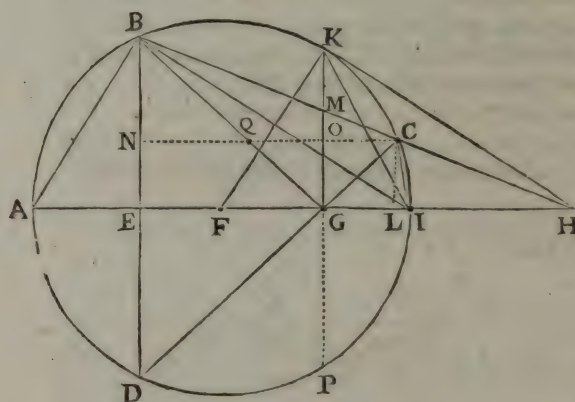
sit CY $\propto x \propto a$. Id quod ostendit, sumptâ
CY, ut ante, æquali CA, si ex Y agatur
YX ipsi CB parallela, hoc est, ut EB se-
cetur in X, ita ut EX ad XB sit, sicut EY
ad YC, punctum inventum X fore qua-
situm.

SECTIO XXIV.

Ratio disquirendi proprietates circa objecta Mathematica.

Cum ad contemplationem naturæ eorum, quæ in his scientiis proponi queunt, non modò jucundum sed etiam utile sit intelligere, quâ ratione plures proprietates detegantur: visum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de aliis objectis iudicium fiat) indagavimus atque invenimus, sicut videre est in sequenti Porismate.

PORISMA.



Sit $AE \propto a$
 $EG \propto b$
 $GI \propto c$
 $DE \propto EB \propto d$
 $DG \propto GB \propto e$
 $GC \propto f$
 $BM \propto g$
 $MC \propto h$
 $BH \propto i$
 $CH \propto k$
 $AH \propto l$
 $IH \propto m$
 $FG \propto n$
 $GM \propto p$
 $PG \propto GK \propto q$
 $KH \propto r$

ABKCIPD est circulus

AH est recta linea, ducta per centrum F

BD est perpendicularis ad AH

DC est linea ad libitum ducta, secans diametrum AI in G

BCH est recta linea, ducta ex B per C, donec occurrat ipsi AH in H

GK est linea ducta ex G ad angulos rectos super AH

AB, BG, BI, IC, IK, & KH sunt recte linea

Investigare quanam circa hæc contingant.

Mult.

Mult. AE. a Mult. DE. d
 per EI. $b + e$ per EB. d
 \square AEI. $\frac{ab + ae}{ac \propto dd - ab} \propto \square$ DEB. $\frac{dd}{dd}$ per 35. 3 Elem.

Mult. AG. $a + b$ Mult. DG. e
 per GI. c per GC. f
 \square AGI. $\frac{ac + bc}{ac \propto ef - bc \propto dd - ab \propto ac} \propto \square$ DGC. $\frac{ef}{ef}$ & fit $\frac{ac + bc}{f} \propto e, ac \frac{ackk + bckk}{f} \propto ekk$
 Elem. $\frac{ef + ab \propto dd + bc}{f}$

Hoc est,

\square DGC + \square AEG est $\propto \square$ DEB + \square EGI.

Corollarium.

Hinc si supponatur AE \propto GI, hoc est, $a \propto c$, erit $ef + bc \propto dd + bc$, adeoque $ef \propto dd$. Hoc est, \square DGC $\propto \square$ DEB.

Fiat propter similia \triangle^1 EBH, LCH

ut BH ad BE, ita CH ad CL

$i \text{ --- } d \text{ --- } k \mid \frac{dk}{i}$

Rursus, quia \triangle DEG, vel ipsi æquale

BEG, est simile \triangle^1 CLG: erit

ut DG vel GB ad DE vel EB, ita GC ad CL

$e \text{ --- } d \text{ --- } f \mid \frac{dk}{i}$ BH HC DG vel GB GC

Et fit $ek \propto f$. Hoc est, erit i ad k , sicut e ad f .

vel $\frac{if}{e} \propto k$. Hoc est, erit e ad i , sicut f ad k .

Hinc resultat, cum BG ad GC etiam sit, ut EG ad GL, id est, ut NO ad OC, aut ut BM ad MC: esse quoque BH ad HC, sicut BM ad MC; vel etiam MB ad BH, sicut MC ad CH. Unde simul emanat Prop. 3^{ia} libr. 6 Elem. videlicet, BG esse ad GC, sicut BM ad MC, quando angulus BGC per rectam GK bifariam dividitur: quemadmodum hic patet, auferendo à rectis angulis AGK & LGK æquales angulos EGB & LGC.

Ppp 3

ABH.

à BH. i ad BM. g
 subtr. CH. k add. MC. h

BC. $i - k \propto$ BC. $g + h$
 dele k $i - \frac{if}{e} \propto g + h$

$ei - if \propto eg + eh$. Hoc est, erit e ad i , sicut $e - f$ ad $g + h$.

$i \propto \frac{eg + eh}{e - f}$

GCCH BG-GC BC

Vel etiam, quia e est ad i , sicut f ad k ; erit item f ad k , sicut $e - f$ ad $g + h$.

Similiter quia ex similitudine $\triangle^{rum} GOC$, DNC est

ut GC ad GO vel CL, ita DC ad DN

$f \text{ --- } \frac{dk}{i} \text{ --- } e + f \mid d + \frac{dk}{i}$

Erit item GC ad CH, sicut BG + GC ad BH + HC

$f \text{ --- } k \text{ --- } e + f \mid i + k$

Hinc patet rationes GB ad BH, GC ad CH, BG + GC ad BC, & BG + GC ad BH + HC omnes inter se easdem esse.

Mult. BI. i Mult. AH. l

per HC. k per HI. m

$\square BHC. ik \propto \square AHI. lm$. p. 36. 3 Elem.

$i \propto \frac{lm}{k}$
 $f \text{ --- } f$

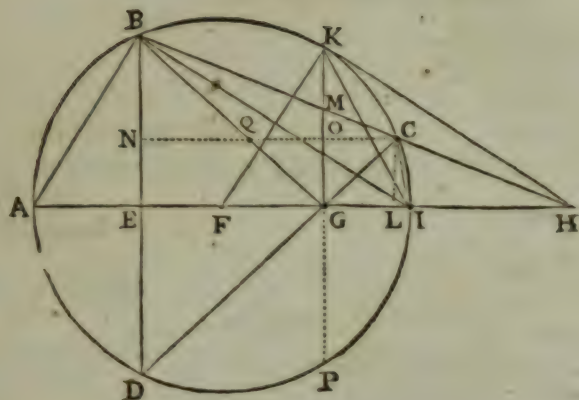
$fi \propto \frac{flm}{k} \propto ek \propto fi$

$ekk \propto \frac{ackk + bckk}{f} \propto flm \propto ekk$

$ackk + bckk \propto flm$. Hoc est, erit ff ad kk , sicut $actbc$ ad lm vel ik .

$\square GC \square AGI$ vel $\square GK \square CH \square HB$
 vel ff ad $ac + bc$ vel qq , sicut k ad i .

Hinc liquet, cum supra quoque inventum sit GB esse ad BH, sicut GC ad CH: fore similiter $\square GB$ ad $\square BH$, sicut $\square AGI$ ad $\square AHI$.



$$\begin{array}{r} ac + bc \propto ef \\ ac + bc \propto f \\ \hline f \propto ek \propto \frac{ac + bc}{e} \propto fg \end{array}$$

$$\square AGI \text{ vel } \square GK \square CB \quad CH \quad HB$$

$cek \propto aci + bci$. Hoc est, erit $ac + bc$ vel qq ad ee , sicut k ad i .

Hinc patet, cum $\square GC$ ad $\square GK$ sit, ut CH ad HB ; itemque $\square GK$ ad $\square GB$, ut CH ad HB : quod tria quadrata ex GC , GK , & GB proportionalia sint; adeoque tres rectæ GC , GK , & GB .

$$\square BGC \quad \square GK \quad \square AGI \quad AG \quad GB$$

Unde fit ut ef sit $\propto qq$, aut etiam $ac + bc$, hoc est, ut $a + b$ sit ad e , si GC GI

cut f ad e .

E quibus inde per 6. 6 Elem. sequitur: $\triangle ABG$ simile esse $\triangle GCL$.

Similiter liquet, cum BM ad MC inventa sit, ut BH ad HC , esse quoque BM ad MC , sicut $\square BG$ ad $\square GK$, vel $\square GK$ ad $\square GC$.

$$\begin{array}{r} \text{Mult. PM. } q + p \quad \text{Mult. BM. } g \\ \text{per MK. } q - p \quad \text{per MC. } h \end{array}$$

$$\square PMK. \quad qq - pp \propto \square BMC. \quad gh. \text{ per 35.3 Elem.}$$

$$\begin{array}{r} qq \propto pp + gh. \text{ Hoc est, } \square GK \text{ est } \propto \square GM + \square BMC. \\ \text{dele } qq \quad ef \propto pp + gh. \text{ Hoc est, } \square BGC \text{ est } \propto \square GM + \square BMC. \end{array}$$

Sup-

Supponatur $k \propto m$, eritque $f \propto c$.

$$ackk + bckk \propto flm$$

$$acmm + bcmm \propto flm$$

$$acm + bcm \propto fl$$

$$acm + bcm \propto ccl$$

$$am + bm \propto cl. \text{ Hoc est, erit } l \text{ ad } m, \text{ sicut } a+b \text{ ad } c; \text{ vel etiam } a+b \text{ ad } l,$$

$$a+b \propto \frac{cl}{m}$$

$$\frac{GI}{IH} \text{ sicut } c \text{ ad } m.$$

$$\text{Add. } \begin{cases} \square GK. qq \\ \square CH. cctzcm + mm \end{cases}$$

$$\square KH$$

$$\text{dele } qq. \frac{gg + cctzcm + mm \propto rr.}{ac + bc + cctzcm + mm \propto rr.} \text{ per 47. 1 Elem.}$$

$$\text{dele } actbetctcm. \frac{cl + ccm + mm \propto rr.}{am + bm + ccm + mm \propto rr.}$$

$$\text{dele } cl. \frac{am + bm + ccm + mm \propto rr.}{ml \propto rr}$$

$$AE + EG + GI + IH \text{ AH}$$

$$\frac{a + b + c + m \propto l}{c}$$

$$\frac{ac + bc + cctzcm \propto cl}{a + b + c + m \propto l}$$

$$\frac{am + bm + ccm + mm \propto ml}{am + bm + ccm + mm \propto ml}$$

Hoc est,

$\square AHI$ est $\propto \square KH$. Unde sequitur lineam KH , per 37. 3 Elem., tangere circulum in K ; hoc est, angulum FKH esse rectum.

Ubi notandum, quod, sicut $\square^{1a} AGI$ & BGC æqualia sunt ac singula æqualia ex GK , in quo definunt, perinde etiam $\square^{1a} AHI$ & BHC æqualia sint ac singula æqualia quadrato ex KH , in quo similiter hæc ipsa definant.

$$FG \quad GK \quad GH$$

per Cor. 8. 6. Elem. $n - q - c + m$, sunt 3 proportionales

Et fit $nc + nm \propto qq$. per 16. 6 Elem.

$$\text{dele } qq. \frac{nc + nm \propto ac + bc.}{nc \propto ac + bc - nm.} \text{ HG } \text{ GA } \text{ IG } \text{ GE}$$

$$\frac{2nc \propto 2ac + 2bc - 2nm}{2nc \propto 2ac + 2bc - 2nm}$$

$$i \propto \frac{lm}{k} \propto \frac{eg + eh}{e - f} \propto i$$

Hoc est,

$$\square GBGC \text{ seu } \square QB \quad \square CH \quad \square GBC \quad \square AHI \quad \square BAC \quad \square KH$$

$$\text{erit } e - f \dots \text{ ad } \dots k, \text{ sicut } eg + eh \text{ ad } lm \text{ vel } ik \text{ vel } rr.$$

Add.

Add. $\begin{cases} \square FG. mn \\ \square GK. qq \end{cases} \quad \square FK \text{ vel } FI$

dele qq & $2nc$.

$$\frac{mn + qq \propto mn + 2nc + cc}{ac + bc \propto ac + bc + mn + cc}$$

$$\frac{ac + bc \propto mn - cc}{ac + bc + cc}$$

$\propto mn$, Hoc est, erit e ad m , sicut n ad z .

GI	IH	GF	$\frac{a+b}{c}$
HI	IF	IG	GF

vel m ad $\frac{a+b}{c}$, sicut e ad n .

Hinc cum supra quoque HG ad GA sit, sicut IG ad GF: erit similiter HG ad GA, sicut HI ad IF.

dele $ac + bc$, & lm .

$$\frac{ackk + bckk \propto flm}{qqkk \propto frr}$$

$qk \propto fr$. Hoc est, erit q ad r , sicut f ad k .

Quocirca, cum supra etiam sit G B ad B H, sicut G C ad C H, erit pariter GB ad BH, sicut GK ad K H.

dele qq .

$$\frac{ekkk \propto frr}{ackk + bckk \propto flm}$$

$ek \propto fr$. Hoc est, erit e ad f , sicut rr ad kk . Quoniam autem B G ad G C supra quoque fuit inventa ut B M ad M C, vel etiam ut B H ad C H: erit pariter B M ad M C, vel B H ad H C, sicut $\square KH$ ad $\square CH$.

dele $a + b$.

$$\frac{ckkk \propto flm}{ck \propto fm}$$

Hoc est, erit e ad m , sicut f ad k .

Hinc cum supra quoque sit G B ad B H, ut & G K ad K H, sicut G C ad C H; & G C ad C H, nec non G F ad F I, sicut G I ad I H: erunt rationes G F ad F I, G C ad C H, G B ad B H, G K ad K H, & G I ad I H omnes inter se eadem. Ex quibus porro, per 3. 6 Elem., sequitur, rectas I B, I K, & I C secare angulos G B H, G K H, & G C H bifariam.

Atque ita porro, comparando inter se quantitates, sic ut alie atque alie semper obtineantur æquationes, licebit circa ea, quæ propositasunt, invenire proprietates innumeras.

Q q q

S E.

SECTIO XXV.

Specimina de Algebra præstantia.

Cum in Algebra ad modum solutionis indagandum alicujus Problematis, imponendo nomina quantitibus tum datis, tum quæsitis, difficultas tota eò sit reducenda, ut inveniatur Aequatio, atque illud ipsum ad hoc tanquam jam factum supponatur: facile constat, quòd, dum illa omnes determinationes sive conditiones includit, quæcunque circa Aequationis constructionem aut solutionem considerata veniunt, etiam ad modum, quo Problema resolvendum sit, pertineant. Quocirca, cum infinita Problemata sint, quæ licet toto genere diversa videantur, ad eandem tamen Aequationem recurrant, hæcque ratione pro eodem Problemate haberi possint: ita quoque contingit, ut unus idemque constructionis aut solutionis modus omnibus illis simul conveniat. Id quod sequentibus Problematibus ceu exemplis patefacere non injucundum duximus.

- Probl. 1.* Trianguli rectanguli datâ base $\propto a$, & aggregato hypotenusæ & perpendicularis $\propto b$: invenire hypotenusam $\propto x$.
- Probl. 2.* Trianguli rectanguli datâ base $\propto a$, & differentiâ inter hypotenusam & perpendicularem $\propto b$: invenire hypotenusam $\propto x$.
- Probl. 3.* E termino datæ rectæ $\propto a$ erectâ super ipsam perpendiculari indefinitâ, invenire longitudinem lineæ rectæ x , ex altero termino ad hanc ducendæ, quæ sit æqualis perpendiculari abscissæ unâ cum ipsius datæ a segmento præfinito contermino b .
- Probl. 4.* Datam rectam lineam $\propto b$ producere, ita ut quadratum productæ x unâ cum quadrato datæ rectæ a sit æquale quadrato totius lineæ $b+x$.
- Probl. 5.* Datam rectam lineam $\propto b$ secare in duo segmenta, ita ut quadratum minoris segmenti x unâ cum quadrato datæ rectæ a sit æquale quadrato majoris segmenti $b-x$.
- Probl. 6.* Datam rectam lineam $\propto b$ secare in duo segmenta x & $b-x$, ita ut differentia quadratorum ex ipsis sit æqualis dato spacio aa . Quæritur majus segmentum $\propto x$.
- Probl. 7.* Invenire numerum x , à cujus quadrato xx si auferatur datus quadratus aa , relinquatur quadratus $xx - bx + bb$. Fit $x \propto \frac{bb + aa}{2b}$.

Igi-

Igitur assumendo ad arbitrium alium atque alium numerum pro b , inveniri hinc poterunt infinita triangula rectangula, eandem, datam-
que altitudinem habentia, quorum latera exprimantur per numeros
rationales. Etenim si altitudo illa, sive perpendicularis data, fuerit
 a , hypotenusa erit $\frac{bb+aa}{2b}$. Unde basis fiet $\frac{bb-aa}{2b}$.

Vbi porro liquet, si quis tot triangula rectangula invenire velit
quot libuerit, quorum singula latera exprimantur per numeros ratio-
nales integros, multiplicandum esse tantum ubique per denomina-
torem communem $2b$, & fiet $2ab$ pro perpendiculari, $bb+aa$ pro hy-
potenusa, & $bb-aa$ pro basi.

Hinc si a sit 1, & b sit 2, perpendicularis erit 4, hypotenusa 5, &
basis 3. At si a sumatur 3, & b 2, perpendicularis erit 12, hypo-
tenusa 13, & basis 5. Et sic de aliis in infinitum.

Idem quoque obtinere licet beneficio 1^{mi}, 2^{di}, 3^{ti}, 4^{ti}, aut 5^{ti}
Problematis, atque etiam beneficio 6^{ti}, si datum spacium fuerit qua-
dratum.

Datis duobus numeris b & a , invenire tertium x , minorem majore *Probl. 8.*
 b , majorem autem minori a ; ita ut, si ipsi minor addatur atque etiam
ab eo auferatur, summa per reliquum multiplicata tantundem produ-
cat ac si excessus, quo major quæsitum superat, in se multiplicetur.

In symposio fuerunt x pueri, b 8 mulieres, & a 12 viri. Quo- *Probl. 9.*
rum quilibet virorum tot expendit stufros, quot ipsi sunt; similiter-
que quævis mulier tot stufros, quos sunt mulieres. Comperitur au-
tem, si pueri singuli tot stufros solvissent, quot existunt mulieres,
quod numerus stufro-
rum, quos soluturi fuissent, tantum excessisset
mulierum stufros, quantum idem numerus minor est numero stufro-
rum, à viris expensorum. Quæritur quot pueri adtuerint?

Data rectæ lineæ $b+a$, sectæ in duo inæqualia segmenta a & b , *Probl. 10.*
majus segmentum b rursus secare in duo alia segmenta x & $b-x$; ita
ut rectangulum contentum sub $x+a$, aggregato minoris segmenti a
& intermedii x , & $x-a$, excessu quo idem medium segmentum x su-
perat minus a , sit æquale quadrato reliqui segmenti $b-x$.

Datam rectam lineam $a+b$, sectam in 2 partes a & b , producere ad *Probl. 11.*
alterutram partem rectâ x ; ita ut quadrata trium partium totius
simul sumpta æquantur rectangulo contento sub producta x , & com-
positâ ex producta & duplo conterminæ partis.

Qq q 2

Da-

- Probl. 12.* Datam rectam lineam αb sectam in 3 partes proportionales, ita ut aggregatum quadratorum ex illis sit æquale dato spacio aa : invenire summam extremarum partium αx .
- Probl. 13.* Rectanguli datâ differentia laterum αb , & differentiâ quadratorum ex ipsis αaa : invenire latus majus αx .
- Probl. 14.* In triangulo æquicruri obtusângulo, cujus utrumque crus datur αb , & latus 3^{ti}um αa , demissâ ex vertice super alterutro crure producto perpendiculari: quæritur x , aggregatum majoris segmenti & semissis basis?
- Probl. 15.* Similiter: In triangulo æquicrure acutângulo, cujus utrumque crus datur αb , & 3^{ti}um latus αa , demissâ ex vertice super crus alterutrum perpendiculari: quæritur x , aggregatum minoris segmenti ex semissis basis?

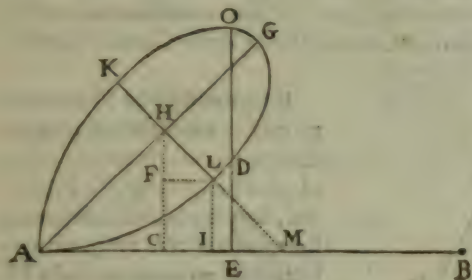
In his omnibus Problematis cum x fiat $\alpha \frac{bb+aa}{2b}$, idemque simi-

liter in infinitis aliis contingat: manifestum est ad illa simul omnia solvenda, & quantitatem x inveniendam, nil aliud faciendum esse quàm addere quadrata datarum quantitatum b & a , & earum summam dividere per duplum ipsius b . Adeo ut hinc constet Algebram, cum æquationis beneficio infinita Problemata pro uno habeat eaque simul resolvat, & ex datis notivæ quantitibus quæstas ignotavæ cujuslibet generis doceat invenire, haud immerito veram Logicam ac inveniendi artem, quâ mens in cognitionem rerum Mathematicarum & inde dependentium perducatur, existimandam esse: ac proinde eam non sine ratione Artem Magnam & divinam Scientiam ab aliis fuisse appellatam.

Patet itaque ex allatis Algebrae præstantia ac utilitas. Verùm ut utrumque cuivis magis adhuc obvium sit, vellem Lector consideret ea, quæ hinc tractatu à me exposita sunt, ut & Problemata tam diversa, quæ sparsim per totum librum soluta reperiuntur, quorumque solutiones, paucis exceptis, per Algebram sunt inventæ; sicut etiam illa, quæ à Vieta ac præsertim Cartesio in sua Geometria, & aliis denique præcellentibus Mathematicis ejusdem beneficio præstita sunt ac perfecta. Vix enim futurum confido, ut, qui eximie hujus scientiæ infallibili fretus certitudine sedulus hæc mecum perpendit, de veritate mearum conclusionum in hac Sectione ullatenus sit dubitaturus. Verùm tamen ut rei colophonem addam, sequens Problema in medium afferre lubet unâ cum ejusdem constructione, qualem

lem eam subtilissimus ac præclarè doctus vir Juvenis D. Johannes Huddenius, Amst. Batavus, atque amicus meus integerimus, haud ita pridem adinvenit.

PROBLEMA.



Est curva linea, cujus hæc est proprietas, ut, assumpto ubicunque puncto E in recta AB, si ex E ad curvam ducatur perpendicularis EO vel ED, voceturque AE $\propto x$, & EO vel ED $\propto y$, & data sit recta linea AB $\propto n$, habeatur $xxx + yyy$

$\propto xym$: Oportet autem ducere KL, quæ curvæ maximam latitudinem designet.

Constructio.

Duco AG, ita ut angulus GAB sit $\propto 45$ gr., tum assumptâ AH $\propto \frac{1}{2} nm$: erit KHL, secans AG ad rectos angulos in H, maxima latitudo quaesita.

Quomodo autem Problematis hujus constructio præter Algebram inveniri possit, non video. Cum enim curva hæc ex nullo Theoremate prædemonstrato, quod eam concernit, definiri aut describi hic intelligatur, quippe illa omnia huc spectantia adhuc ignorantur; sed ex sola æquatione $x^3 + y^3 \propto xym$ determinetur & ab hac dependeat: manifestum est, ea, quæ circa hanc curvam construenda aut cognoscenda veniunt, ex hac ipsa æquatione esse deducenda, adeoque eam illorum omnium esse quasi fontem seu pro primo Theoremate habendam.

Cæterum ut pateat quo pacto ex præsupposito aliquo Theoremate aut etiam ex sola subjecti definitione, infinita alia Theoremata per Algebram eliciantur: placet hic ulterius ea, quæ circa hanc rem ingeniosissimus noster Huddenius olim mihi communicavit, lubenti animo impertire.

Cum verò illa ad quasvis quæstiones, sive determinatas,

Qq 3

sive

AD DB AF

$$a - b - x \mid \text{ad FI. } \frac{bx}{a}$$

$$\begin{array}{c} \text{subtr. FE. } \frac{y}{a} \\ \text{AB AD EI. } \frac{bx}{a} - y \mid \text{ad } \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y \propto v \end{array}$$

$$\frac{bx - ay \propto 2av}{bx \propto ay + 2av}$$

$$\frac{bx \propto ay + 2av}{bx \propto ay + 2av}$$

$$2^{\text{dum}} \text{Theor. } b \propto \frac{ay + 2av}{x}$$

DC DB FC

$$a - b - 2a - x \mid \text{ad FK. } \frac{2ab - bx}{a}$$

$$\text{subtr. FE. } \frac{y}{a}$$

$$\begin{array}{c} \text{BC CD EH EH} \\ 2a - a - EK. \frac{2ab - bx}{a} - y \mid \text{ad } \frac{2ab - bx}{2a} - \frac{1}{2}y \propto z \end{array}$$

$$\text{Ex FK. } \frac{2ab - bx}{a}$$

$$\text{subtr. FI. } \frac{bx}{a}$$

$$\text{Ex EK. } \frac{2x}{a}$$

$$\text{subtr. EI. } \frac{2v}{a}$$

$$\text{rel. IK. } \frac{2ab - 2bx}{a}$$

$$\propto \text{rel. IK. } \frac{2z}{a}$$

$$\frac{2ab - 2bx \propto 2az - 2av}{ab - bx \propto az - av}$$

$$4^{\text{tum}} \text{Theor. } b \propto \frac{az - av}{a - x}$$

$$3^{\text{tium}} \text{Theor. } b \propto \frac{ay + 2az}{2a - x} \text{ Nota.}$$

Hoc Theorema à 2^{do} in eo tantum differt, quòd quantitas b hic inveniatur ex a, x, y , & z , & in 2^{do} ex a, x, v , & y . Aliàs autem ratio quærendi b utrobique eadem est.

$$\begin{array}{c} \text{EI EG EK EH EH} \\ \frac{bx}{a} - y \dots \frac{2ab - bx}{a} - y \mid \text{ad } \frac{2ab - bx - ay}{bx - ay} \propto z \end{array}$$

$$\frac{2abv - bvx - avy \propto bxz - ayz}{2abv - bvx - bxz \propto avy - ayz}$$

$$5^{\text{tum}} \text{Theor. } b \propto \frac{avy - ayz}{2av - vx - xz}$$

1. Apparet itaque DB, quam vocavi b , quintupliciter posse enunciari. Nam præter terminorum inæqualitatem, eorumque diversificationem.

dam connexionem primus modus caret terminis a & x , 2^{dus} z , 3^{tius} y , 4^{tus} y , & 5^{tus} nullo caret. Atque ideo 5 habemus Theoremata distincta, quorum 2^{dum} , 3^{tium} , & 4^{tum} ejusdem cum 1^{mo} sunt naturæ, hoc est, Loci ad Superficiem; at verò 5^{tum} Loci ad Solidum.

II. Inventis autem quinque hisce Theorematis, poterunt exinde diversis modis infinita alia inveniri. 1^{mo} . Per additionem & divisionem, utpote dividendo summam 1^{mi} & 2^{di} , 1^{mi} & 3^{tii} , 1^{mi} & 4^{tii} , 1^{mi} & 5^{ti} , 2^{di} & 3^{tii} , 2^{di} & 4^{ti} , &c. per 2 . erit enim quotiens a b . Similiter addendo tres, quatuor, aut quinque, &c., & summam dividendo per 3 , 4 , aut 5 , &c. 2^{do} . Sicut autem jam infinita ope additionis & divisionis invenimus, ita & infinita beneficio multiplicationis & extractionis investigare licet. Etenim si duæ, tres, aut quatuor, &c. diversæ istarum summæ in se invicem ducantur, atque ex producto extrahatur \sqrt{Q} , \sqrt{C} , aut \sqrt{QQ} , &c: erit similiter radix inventa ipsi b æqualis. 3^{tio} . Per multiplicationem & divisionem, quippe multiplicando duas, tres, aut quatuor, &c. diversas, & productum dividendo per 1 , 2 , aut 3 , &c. alias; sive ad id una sola sumatur, eaque in se ducatur quadratè, aut cubicè, &c.; sive ad hoc ipsum sumantur 2 , aut 3 , &c. diversæ, divisioque per earum productum instituitur: quoniam semper quotiens ipsi b æqualis est. 4^{to} . Per additionem & subtractionem, quemadmodum per se manifestum est. 5^{to} . Ex quibus infinitis summis demum ope dictæ additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis & extractionis rursus infinitæ aliæ pro b inveniri poterunt.

III. Hinc sicut infinitos modos exprimendi valorem lineæ DB seu b invenimus, ita & infinitos alios quærere licet linearum AD vel DC , AF , FE , EG , EH , quas vocavimus a , x , y , v , z : Sumendo nempe quamlibet summam pro b inventam, in quâ a , x , y , v , vel z , quarum valores investigare volumus, reperitur; ac deinde ex illa quærendo valores ipsarum a , $(x, y, v, \& z)$. Quemadmodum hæc liquet.

$1. \quad \frac{ay + 2av}{x} \propto b$ $\frac{ay + 2av \propto bx}{bx}$ $\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{y + 2v}$	$2. \quad b \propto \frac{ay + 2az}{2a - x}$ $\frac{2ab - bx \propto ay + 2az}{2ab - 2az - ay \propto bx}$ $\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{2b - 2z - y}$	$3. \quad b \propto \frac{az - av}{a - x}$ $\frac{ab - bx \propto az - av}{ab + av - az \propto bx}$ $\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{b + v - z}$
---	--	--

Atque ita de aliis,

1 V.

IV. Jam sicut omnia hæc Theoremata invenimus, quatenus consideravimus lineas in triangulo hîc ductas; ita quoque idem obtineri potest circa alias; adeò ut solummodò aliam atque aliam linearum positionem in eo excogitare opus sit, ad infinitis modis, ut supra, alia infinita Theoremata, quæ à se invicem distincta sint, omniaque æquilaterum triangulum concernant, invenienda. Id quod de his similiter circa alias figuras cum rectilineas tum curvilineas intelligi debet, & se ad Circuli, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipsis, aliarumque superiorum generum curvarum linearum ut & solidorum inde ortorum proprietates investigandas extendit, neque solo æquilatèro triangulo hoc limitatur.

Liquet itaque quâ ratione infinitis modis ex præsupposito aliquo Theoremate aut etiam solâ figuræ vel subjecti definitione, quâ ipsius natura omnino determinetur, infinita deduci possint Theoremata, quæ omnia primo intuitu aut ex definitione illa, aut unum ex alio, nisi paucis fortè exceptis, non eliciantur; tam parùm, quin imò minùs, quàm ex natura circuli Theoremata omnia, quæ in 3^{to} & 4^{to} libro Elementorum continentur, deducta fuerint. Quod autem reverà Theoremata existant, de eo quidem dubitari nequit, cum Theorema nil nisi Propositio, quæ aliquam subjecti proprietatem continet ac declarat, censeri debeat.

Ad hæc si Geometriæ præstantiam, in demonstrandis multis pulcherrimis ac admirabilibus Theorematis, (hoc est, quæ (meo quidem judicio) primâ fronte è subjecti natura haud ita facilè deducantur, sed per complures consequentias secundum artis regulas ex eâ elici debeant), consistere, à quovis fermè hætenus judicatum esse, perpendatur: satis obvia cuivis erit Algebræ præstantia ac utilitas, quippe quæ levi negotio innumera nobis admirabiliorum Theorematum subministrare potest volumina. Unde facilè judicare licet, quanta laus Illustri Viro Renato des Cartes meritò conferenda sit, è cujus Methodo hæc quasi ultrò emanant, & his longè majora maximeque utilia ad nos redundant.

SECTIO XXVI.

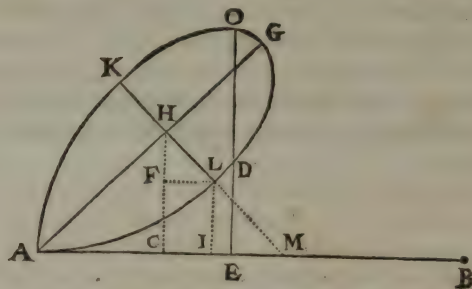
Investigatio Constructionis, præcedenti sectione traditæ.

Quandoquidem cōstructio Problematis, præcedenti Sectione expolita, una ex simplicissimis existit, quæ circa id inveniri queunt:

R r r

non

non ingratum fore existimavi, si modum eandem investigandi, qualem eum acutissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Gerh. Fil., omnium artificiosissime excogitavit, sequenti calculo exhiberem.



Angulum G A B esse 45 graduum, convincitur ex æquatione $y^3 - nyx + x^3 = 0$, in qua y & x eodem modo reperiuntur. Unde porro concluditur, suppositis $AI = x$, $IL = y$, & $AM = z$, quod IM sit y , & $AM = z = x + y$, id est, $z = x + y$, quæ 2^a est æquatio; ac deinde, quod AC vel CH sit $\frac{1}{2}z$, adeoque $FH = \frac{1}{2}z - y = x$, omnium intellige hujusmodi linearum maximæ. Quæ 3^{ia} est æquatio.

Quibus ita existentibus, si in 1^{ma} & 3^{ia}, nimirum, $y^3 = nyx - x^3$ & $\frac{1}{2}z - y = x$, in locum y substituatur $z - x$, habebitur $z^3 - 3zxx + 3zxx - x^3 = nxz - nxx - x^3$ vel $z^3 - 3zxx + 3zxx = nxz - nxx$, & $x = z + \frac{1}{2}z$. Cætera calculus manifestabit.

$$\begin{array}{r}
 z^3 - 3zxx + 3zxx = nxz - nxx \\
 \text{dele } x. \quad \frac{1}{4}z^3 + 3z\int \frac{1}{4}n\frac{1}{2}z - n\int\int \\
 \text{Mult. per } \frac{3}{4}z^2 + 3\int\int \frac{1}{2}nz \\
 \text{dele } f. \quad \frac{3z^2 + 12\int\int \frac{1}{2}nz}{6z^2 + 12xx - 12z\int \frac{1}{2}nz} \\
 \frac{z^3 - 3zxx + 3zxx = nxz - nxx}{3zxx + nxx = n\frac{1}{2}z + 3zxx - z^3} \quad \frac{12xx = 12z\int \frac{1}{2}nz - 6z^2}{xx = z\int \frac{1}{2}nz - \frac{1}{2}z^2} \\
 \frac{xx = z\int \frac{1}{2}nz - \frac{1}{2}z^2}{3z^2 + n}
 \end{array}$$

$z^2 -$

$$\begin{aligned}
 & \frac{zx - \frac{z^3}{3z+n}}{3z+n} \propto \frac{zx + \frac{1}{6}nz - \frac{1}{2}zz}{3z+n} \\
 & \frac{\frac{1}{2}zz \propto \frac{z^3}{3z+n} + \frac{1}{6}nz}{3z+n} \\
 & \frac{3zz \propto \frac{6z^3}{3z+n} + nz}{3z+n} \\
 & \frac{9z^3 + 3nzz \propto 6z^3 + 3nzz + nnz}{3z+n} \\
 & \frac{3zz \propto nn}{3z+n} \\
 & \text{fit } z \propto \sqrt{\frac{1}{3}nn} \\
 & \text{Ergo AH} \propto \sqrt{\frac{1}{6}nn}.
 \end{aligned}$$

SECTIO XXVII.

De investigatione angulorum trianguli plani, cujus latera sunt nota, absque demissione perpendicularis.

Quò ad planorum triangulorum dimensionem expeditiorem haud quidquam deficiat, lubet hoc loco in medium afferre quatuor Theoremata seu regulas, quibus ex cognitis lateribus trianguli cujuscunque plani, absque ejusdem in rectangula triangula divisione, quilibet angulus quadrupliciter investigari possit: qualia illa ab eorum inventore D. Guilielmo Purfero, Mathematicum peritissimo, Dublinii quondam addiscere licuit. Sunt autem omnia Logarithmorum usui accommodata, ut, vitato multiplicationis, divisionis, atque extractionis tædio, operatio omnis per additionem, subtractionem, & bipartitionem procederet.

THEOREMA I.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub semissis omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli, quæsito adjacentis.

Rrr 2

THE-

THEOREMA II.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unâ cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unâ cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli quæsit.

THEOREMA III.

Ut rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unâ cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unâ cum basi superat latus primum, ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli, quæsito adjacentis.

THEOREMA IV.

Ut rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ duo latera basin superant, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unâ cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unâ cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli quæsit.

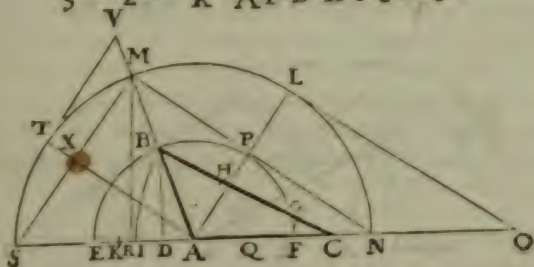
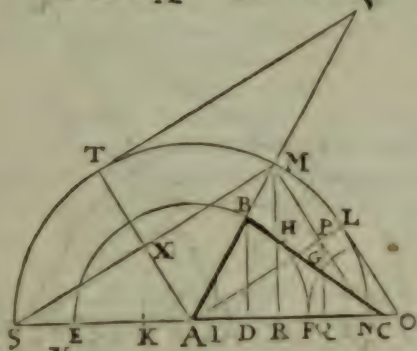
Voco angulum adjacentem alterius, eum, qui cum illo semicirculum complet vel illius ad 180 gr. est differentia; basin verò latus illud, quod angulo quæsito opponitur. Denique triangulum hic intelligitur rectangulum, acutangulum, vel obtusangulum, prout quæsitus angulus est rectus, acutus, vel obtusus.

Sit triangulum ABC, in quo ex notis lateribus eliciendus sit angulus A.

Deducatur ex B in AC, vel in ipsam, hinc inde productam, perpendicularis BD; atque radio AB describatur ex A semicirculus EBF,

508

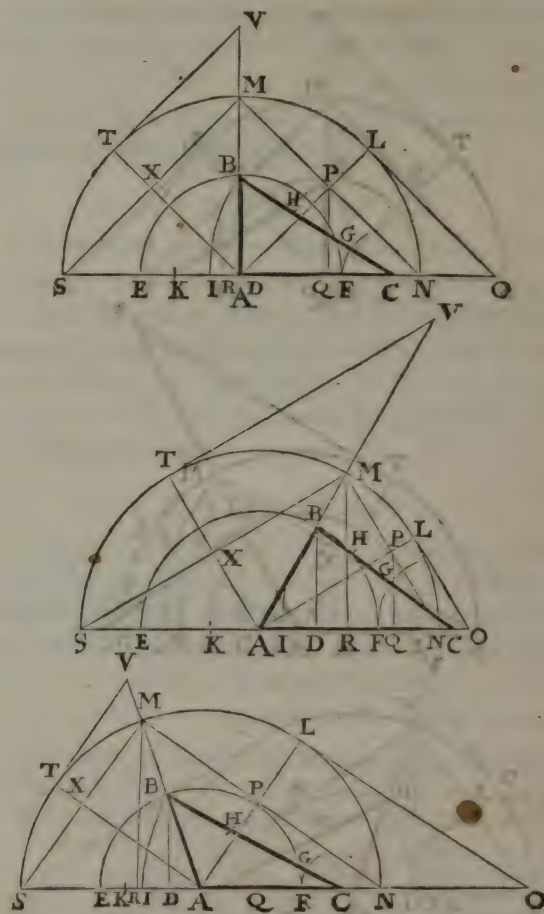
EBF, secans AC in E & F, tum ex C intervallo FC arcus FG, secans BC in G; seceturque BG bifariam in H. Rursus centro C intervallo



Rrr 3

cantic

cante AC in S & N, ipsam autem AB, vel eam productam in M, bifariam secetur arcus NM & MS in L & T, junganturque AL, AT,



& NM, MS, se mutuò secantes in P & X. Denique ductis LO, TV
tangentibus semicirculum SMLN in L & T, secantibus verò AC,
AB

AB in O & V, demittantur ex P & M in AC perpendiculares PQ, MR.

His ita positis, constat KI dimidiam esse differentiam, quâ bina latera AB, AC superant basin BC; at verò semissem omnium laterum esse KC. Deinde etiam patet, sumendo AM pro radio, sinum semissis anguli quæsito BAC adjacentis esse SX vel XM.

Dico igitur 1^{mo} loco rectangulum BAC esse ad rectangulum CKI, ut quadratum AM ad quadratum SX vel XM.

Quoniam enim ^a $\square EC - \square EA$ vel $\square AB - \square AC$ æquatur $2 \square EA$, ^{a p 4 Secun-}
AC; & in acutangolo quidem triangulo ^b $\square AC + \square AB - \square BC$ ^{di Elem.}
æquetur $2 \square AD$, AC; in rectangolo autem ^c $\square AC + \square AB - \square BC$ ^{b p 13 Secun-}
æquetur nihilo; at verò in obtusangolo ^d $\square BC - \square AB - \square AC$ ^{di Elem.}
æquetur $2 \square AD$, AC: fiet, æqualibus æqualia addendo in acutan- ^{c p 47 Primi}
gulo & rectangolo, hoc est, ad $\square EC - \square AB - \square AC$ addendo $\square AC$ ^{Elem.}
 $+ \square AB - \square BC$; & ab æqualibus æqualia auferendo in obtusangolo, ^{d p 12 Secun-}
hoc est, à $\square EC - \square AB - \square AC$ auferendo $\square BC - \square AB - \square AC$, ^{di Elem.}
in acutangolo quidem summa $\square EC - \square BC$ vel $\square IC$ æqualis summa ^{e p 1 Secundi}
 $2 \square EA$, AC $+ 2 \square AD$, AC, hoc est, æqualis $2 \square ED$, AC; in ^{Elem.}
rectangolo autem summa $\square EC - \square BC$ vel $\square IC$ æqualis $2 \square EA$, ^{f p 1 Secundi}
AC vel $2 \square ED$, AC; at verò in obtusangolo reliquum $\square EC - \square BC$ ^{Elem.}
vel $\square IC$ æquale reliquo $2 \square EA$, AC $- 2 \square AD$, AC, hoc est, æquale ^{g p 8 Secun-}
 $2 \square ED$, AC. Tribus igitur casibus $\square EC - \square IC$ æquale est ^{di Elem.}
 $2 \square ED$, AC. Sed $\square EC - \square IC$ est æquale $4 \square KC$, KI. Quare
etiam $2 \square ED$, AC ipsi $4 \square KC$, KI est æquale, ac proinde & se-
missis semissis, hoc est, $\square ED$, AC ipsi $2 \square KC$, KI. Porro cum AB
sit ad ED, ut AM ad SR; ut autem AB ad ED, ita ^h, assumptâ com- ^{p 1 Sexti}
muni altitudine AC, est $\square AB$, AC ad $\square ED$, AC seu $2 \square KC$, KI, ^{Elem.}
at verò ut AM ad SR, ita, assumptâ communi altitudine AM, est
 $\square AM$ ad $\square AM$, SR: Erit ite $\square AB$, AC ad $2 \square KC$, KI, ita $\square AM$
ad $\square AM$, SR. Sumptisq; consequentium semissibus, ut $\square AB$,
AC ad $\square KC$, KI, ita $\square AM$ ad $\frac{1}{2} \square AM$, SR. Est autem $\frac{1}{2} \square AM$,
SR, hoc est, $\frac{1}{2} \square AS$, SR æquale $\square SX$ vel $\square XM$: siquidem ^{i p 4 & 16}
similitudinem triangulorum ASX, MSR, AS est ad SX, ut MS ad ^{Sexti Elem.}
SR, aut ut $\frac{1}{2} MS$, hoc est, $\square SX$ vel $\square XM$ ad $\frac{1}{2} SR$. Quare erit ut $\square AB$,
AC ad $\square KC$, KI, ita $\square AM$ ad $\square SX$ vel $\square XM$. Quod primo erat
ostendendum.

Porro constat, dimidiam differentiam, quâ latus unum AC unâ cum base CB superat latus alterum AB esse HC; & dimidiam diffe-
ren-

rentiam, quâ latus alterum AB unâ cum base CB superat latus primum AC esse BH. Deinde etiam patet, sumendo AM pro radio, sinum semissis anguli quæsiti BAC esse MP vel PN.

Dico igitur 2^{do} loco rectangulum BAC esse ad rectangulum BHC, ut quadratum AM ad quadratum MP vel PN.

*k p 7 Secun-
di Elem.* Quoniam enim k $\square AC + \square AF$ vel $AB - \square FC$ æquatur $2 \square AF$,
*l p 13 Secun-
di Elem.* AC; & in acutangulo quidem triangulo l $\square AC + \square AB - \square BC$
*m p 47 Pri-
mi Elem.* æquetur $2 \square AD, AC$; in rectangulo autem m $\square AC + \square AB -$
*n p 12 Secun-
di Elem.* $\square BC$ æquetur nihilo; at verò in obtusangulo n $\square BC - \square AB -$
 $\square AC$ æquetur $2 \square AD, AC$: fiet, ab æqualibus æqualia auferendo
in acutangulo & rectangulo, hoc est, à $\square AC + \square AB - \square FC$ auferendo
 $\square AC + \square AB - \square BC$, & æqualibus æqualia addendo in obtusangulo,
hoc est, ad $\square AC + \square AB - \square FC$ addendo $\square BC - \square AB - \square AC$; in acutangulo quidem reliquum $\square BC - \square FC$ vel
*o p 1 Secun-
di Elem.* CG æquale reliquo $2 \square AF, AC - 2 \square AD, AC$, hoc est, \square æquale
 $2 \square DF, AC$; in rectangulo autem reliquum $\square BC - \square FC$ vel CG
æquale reliquo $2 \square AF, AC$ vel $2 \square DF, AC$; at verò in obtusangulo
summa $\square BC - \square FC$ vel CG æqualis summa $2 \square AF, AC$
*p p 1 Secun-
di Elem.* + $2 \square AD, AC$, hoc est, p æquale $2 \square DF, AC$. Triplici igitur
casu $\square BC - \square CG$ æquale est $2 \square DF, AC$. Sed $\square BC - \square CG$
*q p 8 Secun-
di Elem.* est æquale $4 \square BH, HC$. Quare etiam $2 \square DF, AC$ ipsi $4 \square BH, HC$
est æquale, adeoque & semissis semissi, hoc est, $\square DF, AC$ ipsi
 $2 \square BH, HC$. Porro cum AB sit ad DF, ita AM ad RN; ut autem
*r p 1 Sexti
Elem.* AB ad DF, ita, r assumptâ communi altitudine AC, est $\square AB, AC$
ad $\square DF, AC$ seu $2 \square BH, HC$; at verò ut AM ad RN, ita, assumptâ
communi altitudine AM, est $\square AM$ ad $\square AM, RN$: Erit ut $\square AB,$
AC ad $2 \square BH, HC$, ita $\square AM$ ad $\square AM, RN$. Sumptisque consequentium
semissibus, ut $\square AB, AC$ ad $\square BH, HC$, ita $\square AM$ ad $\frac{1}{2} \square AM, RN$. Est autem
*s p 4 & 16
Sexti Elem.* $\frac{1}{2} \square AM, RN$, hoc est, $\frac{1}{2} \square AN, RN$ æquale $\square MP$ vel PN: siquidem s propter similitudinem triangulorum
ANP, MNR, AN est ad PN, ut MC ad RN, aut ut $\frac{1}{2} MC$, hoc est,
MP vel PN ad $\frac{1}{2} RN$. Quare erit ut $\square AB, AC$ ad $\square BH, HC$, ita
 $\square AM$ ad $\square MP$ vel PN. Quod secundò erat ostendendum.

Præterea constat, sumendo AT pro radio, tangentem semissis anguli quæsiti BAC adjacentis esse TV.

Dico igitur 3^{io} loco rectangulum BHC esse ad rectangulum IKC, ut $\square AT$ ad $\square TV$.

Cum enim ex proximè demonstratis $\square AB, AC$ sit ad $\square BH, HC$,

HC, sicut $\square AM$ ad $\square MP$ vel PN : permutando erit $\square AB, AC$ ad $\square AM$, sic $\square BH, HC$ ad $\square MP$ vel PN , seu AX . Rursus cum paulò ante ostentum sit $\square AB, AC$ ad $\square KC, KI$ esse, sicut $\square AM$ ad $\square SX$ vel XM : similiter permutando erit, ut $\square AB, AC$ ad $\square AM$, sic $\square KC, KI$ ad $\square SX$ vel XM . Unde $\square BH, HC$ ad $\square AX$, sic $\square KC, KI$ ad $\square XM$: & rursus permutando ut $\square BH, HC$ ad $\square KC, KI$, ita $\square AX$ ad $\square XM$, seu $\square AT$ ad $\square TV$. Quod tertio erat ostendendum.

Denique constat, fumendo AL pro radio, tangentem semissis anguli quæsitæ BAC , esse LO .

Dico igitur 4^{to} loco rectangulum IKC esse ad rectangulum BHC , ut $\square AL$ ad $\square LO$.

Etenim cum ostensum sit $\square BH, HC$ esse ad $\square KC, KI$, sicut $\square AX$ ad $\square XM$: convertendo erit $\square KC, KI$ ad $\square BH, HC$, ita $\square XM$ ad $\square AX$, vel $\square AP$ ad $\square PN$, seu $\square AL$ ad $\square LO$. Quod quarto ac ultimo erat ostendendum.

Illustratio per numeros.

Trianguli ABC esto latus AB 59152, & latus AC 912, basis vero BC 95552. Quæritur angulus BAC .

Siquidem igitur angulus hic per præcedentes regulas quatuor modis inveniri potest, suffecerit si eum per 1^{am} regulam investigemus: cum reliquarum elucidatio huic parum dissimilis habenda sit. Ut autem operatio tota per additionem, subtractionem, & bipartitionem absolvatur: loco numerorum multiplicandorum & dividendorum accipiantur eorum Logarithmi, quales illos Clarissimi Briggsii tabula nobis suppeditat, quam Vir industrius ac de Mathesi præctica optime meritus D. Adrianus Vlaccus ad umbilicum postea perduxit, replendo Logarithmos numerorum à 20.000 ad 90 000, in serie naturali ab 1 ad 100.000 ante desiderator. Cui porro tabula, ad quæsitæ anguli investigationem, altera adhibenda est, Logarithmos continens sinuum, quos idem Vir Clarissimus ad graduum centesimus construxit, assumpto radio circuli 1000000000000000 partium, qualis illa in opere absolutissimo, quod Trigonometria Britannica inscribitur, contenta est; vel etiam illa, quam Vir laudandus Adr. Vlaccus, (sequendo usitatam hæcenus graduum in sexagenas partes divisionem) pro sinibus & tangentibus ad decades secundorum scrupulorum condidit, statuendo radium 1000000000

S s s

par-

partium, sicut illam in opere, cui Trigonometria Artificialis titulum fecit, videre licet. Quarum tabularum ope quacunque ad faciliorem & perfectionem quorumvis triangulorum dimensionem spectant, calculo facillimo expediuntur.

Hinc additis AB 5915② & AC 91①, si à summa EC 15015② auferatur CB 9555②: erit reliqui semissis KI 273①. Cui addendo IC vel CB 9555②, habebitur KC 12285②.

Deinde cum \square AB, AC sit ad \square KC, KI, sicut \square AM ad \square SX vel XM, atque Logarithmi multiplicationem & divisionem mutant in additionem & subtractionem, extractionem verò in bipartitionem: fiet, ut, si loco multiplicandi \square KC, KI per \square AM ad ipsarum KC, KI Logarithmos addamus duplum radii AM Logarithmum, & in locum dividendi productum per \square AB, AC ab hac summa auferamus summam Logarithmorum ipsarum AB, AC, reliquum 197945417 sit Logarithmus quadrati ex SX vel XM. Cujus sumendo semissem, loco extrahendi è \square SX vel XM radicem quadratum, habebitur 98972708, pro Logarithmo ipsius SX vel XM. Vnde cum utraque hac sinus existat semissis anguli, quasito BAC adjacentis, si in tabula queratur cujus sinus Logarithmo inventus numerus 98972708 proximè conveniat: reperietur SX vel XM fore sinum graduum 5213② seu 52 $\frac{13}{100}$, vel etiam 52 gr. 7', & 48". Cujus ideo duplum, ut 10426, vel 104 gr. 15, & 36", erit quantitas anguli adjacentis. Quo subducto ex 180 gradibus, relinquetur quasitus BAC 7574, vel 75.44'.24".

Vbi demum notandum, si pro Logarithmis auferendis addantur eorum complementa ad radium, non alià opus fore subtractione. Ut liquet inferius ex collatione utriusque praxeos.

	Logarithmi.	Logarithmi
Add. $\left\{ \begin{array}{l} \text{AB. } 5915 \\ \text{AC. } 91 \end{array} \right.$	1.7719.547 1.9190.414	Compl. 8.2280.453 8.0409.586
summa EC. 15015	summa 3.7309.961	
subtr. IC vel CB. 9555		
reliquum EI. 546		
semisiss EK vel KI. 273	1.4361.626 1.4361.626	
add. IC. 9555		
summa KC. 12285	2.0893.752 2.0893.752	
	20.0000.000	
	summa 23.5255.378	
	differentia summarum 19.7945.417	summa 19.7945.417
	semisiss 9.8972.708	semisiss 9.8972.708. Log. Sin.

52, 13 gr.

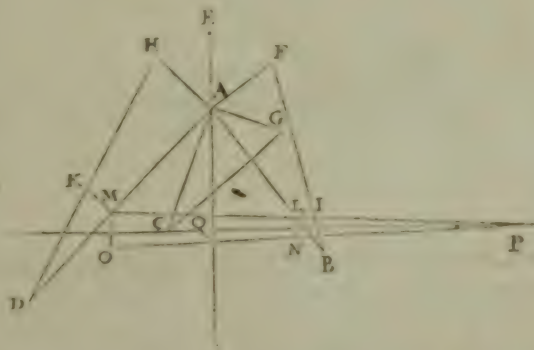
graduum
 52. 1., vel 52. 7. 48
 duplum 104. 26., vel 104. 15. 36. ang. adjacens
 reliq. ex 180 gr. 75. 74., vel 75. 44. 24. angulus quatuor BAC.

SECTIO XXVIII.

Ratio Geometrica inveniendæ lineæ meridiane.

Quâ ratione ex tribus observationibus umbræ Solis, uno die in plano Horizontali factis, Geometricè inveniatur linea Meridiana, ostendit mihi Parisiis ante aliquot annos Mathematicum peritiâ non minùs quàm omni virtute insignis D. Claudius Mylon, J.C, cum quo tunc temporis familiarissimè sum versatus, ac etiamnum amicitiam arctam colo. Quam quidem rationem se didicisse ait ex libro Italico, cui titulus: *Gli Horologi Solari nelle superficie piane: Trattato di Matteo Oddi da Urbino*. Verùm cum ipsa absque demonstratione sit allata, placuit demonstrationem qualem adinveni, unâ cum Autoris methodo hîc subjicere.

Sint igitur AB, AC, & AD tres umbræ, factæ in plano uno die per umbram styli AE, super eodem in A perpendiculariter erecti. Quarum quidem umbrarum, si duæ reperiantur æquales, patet, li-



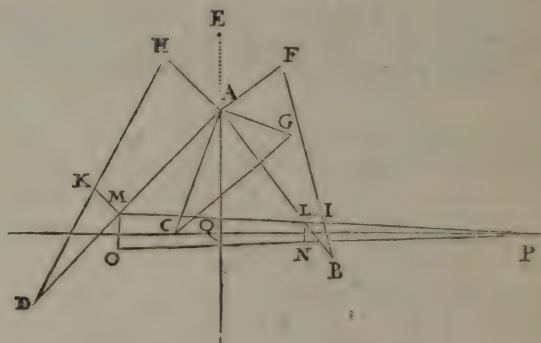
neam à puncto A perpendiculariter demissam in eam, quæ conjungit illarum extrema, esse lineam Meridianam.

S E S 2

Si

Si autem omnes tres sint inæquales, ut si AC ponatur minima; erigendæ erunt in puncto A super AB , AC , & AD perpendiculares AF , AG , & AH , ipsi stylo AE æquales, jungendæque FB , GC , & HD . Hinc quoniam AC minor est quàm AB , erit & GC minor quàm FB . Ob eandem rationem erit quoque GC minor quàm HD . Quocirca oportebit ex FB & HD auferre FI & HK ipsi GC æquales, & ex punctis I & K super AB , AD deducere perpendiculares IL , KM ; inde verò ex punctis L & M super rectam hæc puncta jungentem alias duas perpendiculares erigere, ut LN & MO , quæ ipsis LI & MK sint æquales. Siquidem autem duæ umbræ AB , AD inæquales sunt, erunt similiter FB , HD inæquales. Cum verò FI & HK æquales sint ex constructione, sequitur LI , KM seu LN , MO inæquales fore, adeoque, cum ipsæ sint parallelæ, rectam, quæ puncta O & N conjungit cum recta ML producta concurrere. Concurrent igitur in punctum P , quo juncto cum puncto C , ex A in PC perpendicularis demittatur AQ , eritque linea Meridiana quæ sita.

Atque hic ferè sensus Autoris est, sequitur demonstratio.



Quoniam itaque AC minor est quàm AB , ac ideo quadratum AC minus quadrato AB : erunt etiam, si æqualia utrinque addantur quadrata AG , AF , quadrata CA , AG simul sumpta quadratis BA , AF simul sumptis minora. Sunt autem per 47 primi Elem. quadrata CA , AG æqualia quadrato GC ; at verò quadrata BA , AF æqualia quadrato FB . Quare & quadratum GC quadrato FB minus erit, adeoque GC minor

nor quàm FB. Eodem modo GC minor ostenditur quàm HD; ut &, cum AB & AD inæquales ponuntur, quòd FB & HD inæquales sint: adeò ut, si AD major fuerit quàm AB, HD quoque major sit futura quàm FB. è quibus si porro æquales auferantur HK, FI, relinquetur etiam KD major quàm IB.

Siquidem igitur KD major est quàm IB, habebit, per 8 Quinti Elem., HK ad KD minorem rationem, quàm FI ad IB. Unde & componendo, per 28 Quinti Elem., HD ad DK minorem rationem habebit quàm FB ad BI. Sed ut HD ad DK, ita est per 4 Sexti Elem. HA ad KM; & ut FB ad BI, ita est FA seu HA ad IL. Quamobrem & HA ad KM minorem rationem habebit quàm HA ad IL: unde, per 10 Quinti Elem., major erit KM quàm IL, sive MO quam LN, ac proinde ML & ON productæ concurrent in P.

Intelligentur jam tria triangula ABF, ACG, & ADH perpendiculariter erecta ad subiectum planum super rectas AB, AC, & AD. Quo fiet, ut tria puncta F, G, & H in unum coincident punctum, ut E, in verticem nempe styli AE; & ut rectæ FB, GC, & HD sint in Conica superficie umbræ, quam Sol motu suo eo die describit; cujus vertex sit punctum E. Quocirca si in ipsis rectis sumantur rectæ FI, GC, & HK inter se æquales, cadent puncta I, C, & K in circuli circumferentiam, cujus planum plano Aequatoris est parallelum. Ideoque si per puncta K & I in ejusmodi positione recta linea concipiatur, ad planum Horizontale producta, concurrent illa cum ML producta in punctum P, ubi videlicet ON producta cum ipsa concurrat. Adeò ut, puncto P existente in plano illius circuli atque etiam in subiecto plano, nec non puncto C in utroque plano, recta linea per puncta P & C ducta communis interseccio utriusque plani sit futura. Quoniam verò hæc duo plana ad Meridiani planum recta sunt, erit etiam illorum communis interseccio PC, per 19 undecimi Elem., ad idem Meridiani planum recta, ac proinde etiam ad lineam Meridianam, per 3 defin. undecimi Elementorum. Unde patet, lineam AQ perpendiculariter demissam ex A super rectam PC, lineam Meridianam esse. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem porro est, rationem hanc inveniendæ lineæ Meridianæ, non solum locum habere in planis Horizontalibus, verum etiam in verticalibus & in inclinatis, sicut ex demonstratione colligere licet.

Quòd si verò supra dictum planum plano Aequatoris parallelum

310

SECTIONES

pro ipso *Æquatoris* plano sumatur, referet linea *PC* in omni alio plano lineam *Æquinoctialem*; perpendicularis autem *AQ* lineam *Substilarem*. Quod quidem adnotasse visum fuit operæ pretium.

SECTIO XXIX.

Ratio describendi horologia sciatherica per triangulum isosceles.

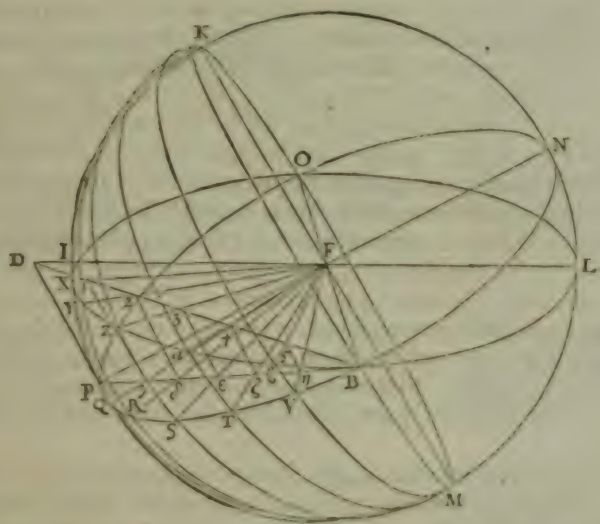
Cum ad describenda horologia sciatherica modum ingeniosissimum, qui ope trianguli isoscelis perficitur, jam ante annos aliquot excogitavit Vir eruditus D. Samuel Forsterus, apud Londinenses in Collegio Greshamensi Astronomiæ Professor: visum fuit eum, qualem Dublinii primum apud Purserum videre mihi contigit; unâ cum scalarum constructione, quibus in finem illum utitur, paucis hîc exponere; præmittens ad ejusdem demonstrationem, hoc, postmodum à me inventum,

LEMMA.

Estò circulus *IKLM* meridianus, cujus pariter atque mundi centrum sit *F*: sitque circulus *IBLO* horizon, linea verò *IL* plani horizonis & meridiani communis intersecctio seu linea meridiana: & puncta *K* & *M* poli mundi: at *KM* axis: circulus autem *BNOP* æquinoctialis; cujus quidem & meridiani communis sectio sit *PN*; ipsius autem & horizonis *BO*. Circuli porrò horarii à meridie seu secantes sunt *KQ*, *KRM*, *KSM*, *KTM*, *KVM*, & *KBM*, qui secant æquinoctialem quidem in *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, & *B*; horizontem verò in *X*, *Y*, *Z*, α , β , & γ : ducanturque *FQ*, *FR*, *FS*, *FT*, *FV*, & *FB*, nec non *FX*, *FY*, *FZ*, *F\alpha*, *F\beta*, & *F\gamma*. Denique junctâ *BP*, & ex *P* ductâ *PD* ipsi *FK* parallelâ, conveniente cum *LI* productâ in *D*, connectatur *BD*. Dico hanc secari à planis circulorum secantium in eadem ratione, in quâ recta *BP* ab iisdem secta est.

Secent enim rectæ *FQ*, *FR*, *FS*, *FT*, & *FV* rectam *BP* in punctis

Etis $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \& \eta$, eruntque ipsa in quibus plana circulorum secantium secant rectam BP. Eodem modo, rectæ FX, FY, FZ, Fa, & FB, secantes rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, erunt hæc ipsa puncta intersectionum, in quibus recta BD secatur à planis eorum-



dem circulorum. Dico igitur rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 similiter sectam esse atque recta BP in punctis $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \& \eta$.

Quoniam enim PD parallela est ipsi FK, atque FK ad planum circuli BNOP recta, erit quoque PD eidem plano ad rectos angulos, per 8 undecimi Elementorum. Jam verò si per ipsam & rectam PB vel BD planum transire intelligatur, utpote planum trianguli BPD, erit utique & illud ad planum circuli BNOP rectum, per 18 undecimi Elementorum. Porro, siquidem omne planum quod per FK du-

ctum est, concipiatur planum per

rectam BNOP rectum est, concipiatur planum per

rectam KPM, KQM,

intersectiones sint

rectæ

rectæ PD , γ 1, δ 2, ϵ 3, ζ 4, & η 5, sequitur rectas hæcæ axi FK ut & inter se esse parallelas, per 16 & 9 undecimi Elementorum. Quare per 2 Sexti Elem. vel per ea, quæ demonstrantur Prop^{ne} 10 ejusdem libri, BD in eandem rationem secabitur in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, in quam recta BP in punctis γ , δ , ϵ , ζ , & η secta est. Quod erat propositum.

Hinc liquet, si fiat triangulum rectangulum $BF D$, cujus unum latus BF sit instar radii; alterum verò FD instar secantis arcus complementi elevationis Poli; & cujus basis BD divisa sit in punctis 1, 2, 3, 4 & 5 similiter ac recta PB in punctis γ , δ , ϵ , ζ , & η ; & in quo porro triangulo ex angulo recto F ad puncta divisionis opposita ductæ sint rectæ F 1, F 2, F 3, F 4, & F 5, has ipsas fore lineas horarias Horologii Horizontalis ad propositam Poli elevationem. Quarum quidem FD lineam meridianam seu horam 12 indicabit, F 1 horam 1 pomeridianam vel horam 11 ante meridiem, F 2 horam 2 pomeridianam vel horam 10 ante meridiem, F 3 horam 3 pomeridianam vel horam 9 ante meridiem, F 4 horam 4 pomeridianam vel horam 8 ante meridiem, F 5 horam 5 pomeridianam vel horam 7 ante meridiem, & F 6 horam 6 ante vel post meridiem. Ex quibus reliquæ lineæ horariæ facile inveniuntur. In quo denique triangulo centrum horologii erit E , ubi stylus obliquus supra FD ad altitudinem Poli est erigendus.

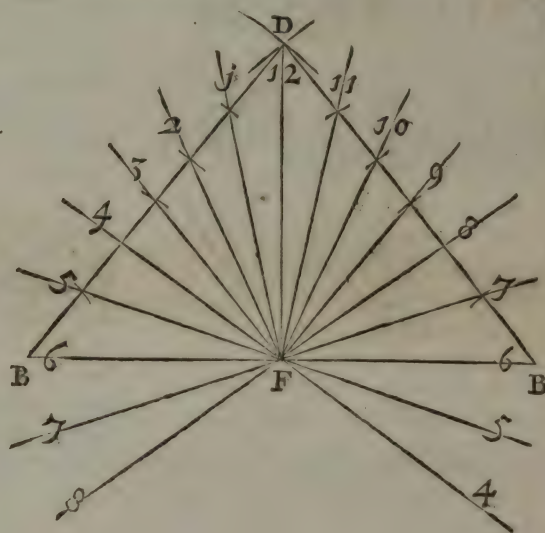
Unde rursus infertur, si loco trianguli rectanguli, in quo unum latus circa rectum sit instar radii, & alterum instar secantis complementi elevationis Poli, aliud assumatur triangulum rectangulum; cujus unum latus circa rectum sit instar sinus elevationis Poli, & alterum instar radii (siquidem sinus arcus alicujus est ad radium, ut radius ad secantem complementi ejusdem arcus); cujusque basis rursus dividatur similiter ac recta PB : idem obtineri, quod diximus.

Quibus præmissis perceptisque accedimus porro ad constructionem scalarum, quæ sic se habet.

Centro A intervallo quocunque describatur circulus, qui diametris BD , CE ad angulos rectos sese decussantibus in quatuor quadrantes dispescatur. Horum autem BC & CD in 90 gradus dividantur, & à puncto E ad gradus tricenos oppositæ secant rectam

Deinde dividatur
positaque regul

pertinam, oportet tantum jam inventas producere ex parte puncti F. Cujus quidem descriptionis ratio ex superiori Lemmate perspicua est. Liquet enim ex constructione, si triangulum rectangulum BDF circulo BCDE inscriptum fuerit, ita ut latus ejus DF secet radium AC in G, tunc quidem AG sinum fore grad. 52. min. 10. datæ videlicet Poli elevationis. In quo præterea triangulo latus unum BF est ad latus alterum FD, ut GA ad AD, hoc est, ut sinus elevationis Poli ad radium; & in quo basis BD similiter secta est in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 sicut superius recta BP in punctis γ, δ, ε, ζ, & η à planis circulorum secantium, &c.

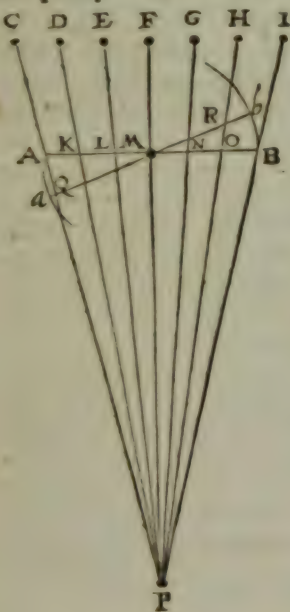


Operæ pretium duxissem reliquorum pariter horologiorum generum descriptionem hîc ostendere, verum cum in Angliam postea reversus Londini tractatum ea de re à Forstero ipso vernaculâ linguâ conscriptum invenerim, ac anno 1638 in lucem editum, cui titulus: *The Art of Dialling by a new, easie and most speedii way*, quem adire licet: animum immutavi, sufficere existimans nie ea hîc, quibus cætera innituntur, fundamenta demonstrasse.

SECTIO XXX.

*Quemadmodum centrum gravitatis in magnitudinibus
mobile sit intelligendum.*

Gravitatis centrum in unoquoque corpore non fixum existere, ex proprio principio ante complures annos deduxit Vir illustris Renatus des Cartes in tractatu suo de Mechanica, ubi naturam Vectis persequitur. Quoniam autem eo nondum edito centri hujus naturam cujusvis ex illo perspicere haud obvium est, visum fuit hoc loco aliam ejusdem centri explicationem, quâ natura ejus perfacile ab unoquoque intelligatur, in medium afferre; Qualem eam ingeniosissimus ac sæpius laudatus D. Joh. Huddenius Ger. Fil. excogitavit, mihi quæ illius participem fecit, statuens cum D. des-Cartes gravitatem in corpore, quod grave dicitur, nil esse præter conatum aut vim descendendi versum Terræ centrum, qui per aliorum corporum motum causetur. Quocirca ut centri hujus gravitatis mobilitas quàm facillimè percipiatur, suffecerit id in recta linea ostendisse, hoc pacto:

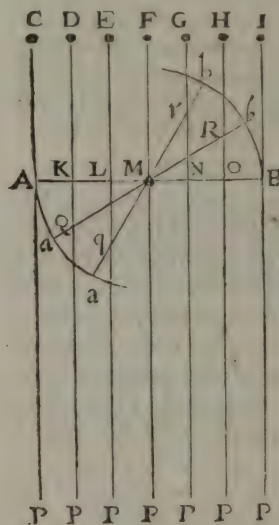


Esto recta illa AB, divisa in partes aliquot æquales, ut puta sex AK, KL, LM, MN, NO, & OB; supponantur quæ C, D, E, F, G, H, & I septem sphaerulæ æquales, in recta versum Terræ centrum P eadem vi tendentes, quæque eodem temporis momento ipsi AB occurrant in A, K, L, M, N, O, & B. Quo posito, manifestum est, rectâ AB immotâ existente, ac super MP cum ejus medio M quiescente, angulis AMP & PMB existentibus rectis, quòd per hunc motum sphaerularum causari non possit, ut terminorum A, B alter altero prius descendat: quandoquidem vis, quæ illud præstaret, utrinque omnino eadem existit. Adeò ut AB eo casu in æquilibrio permanere teneatur, punctum quæ M pro illius centro gravitatis sit habendum.

T t t 1

Quòd

Quòd si verò ipsi AB alia positio tribuatur, ut hinc aMb , debet necessario pars una aM , quæ Terræ centro P vicinior est, plus semper ponderare quàm pars altera Mb , quæ à centro P est remotior: quoniam prædicta vis hâc ratione inæqualis redditur, atque illa hoc pacto in inferiorem partem aM accrescit, dum in eam non solum plures sphaerulæ impingunt, sed ipsæ etiam in angulis, ad rectos magis accedentibus, occurrunt; ac proinde in eam fortius agunt. Ita ut recta aMb aliam positionem appetere teneatur, parsque Mb ipsâ parte aM major sumenda sit, quò ipsa in eodem statu seu æquilibrio permaneat; ac idcirco ejus centrum gravitatis non fixum sed mobile existere. Cujus quidem ad corpora applicatio ex se manifesta est.



Cæterum sciendum, differentiam hanc, ex ingenti horum corporum à Terræ centro distantia, cum eorundem magnitudine comparatâ, esse planè imperceptibilem seu insensibilem; ac proinde considerationem hujus mutabilitatis centri in praxi nullius esse usus. Quoniam, rectis CP, DP, EP, FP, GP, HP, & IP, propter immensam hujus lineæ AB à Terræ centro P elongationem & ex illius ad hanc relatione parvitatem, parallelis existentibus (quemadmodum absq; ullo experientie detrimento, quæ hinc nullam diversitatem agnoscit, supponi potest) æquemultæ semper sphaerulæ in utramque partem ipsius AB, quamcunque illa positionem habuerit, impingunt; eademque etiam, propter angulorum utrinque æqualitatem, in eam hinc inde æquè fortiter agunt. Adèd ut M punctum centrum gravitatis ipsius AB existens ejusdem quoque gravitatis centrum in omni alia ejus positione existat, ipsaque positionem omnem, quam quis ei dederit, retineat. Indicans quo sensu gravitatis centrum in magnitudinibus immobile seu fixum sit intelligendum non secus ac illud Sectione 19 à nobis cum aliis fuit acceptum.

AD

A D

L E C T O R E M.

Postquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram, diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesse deprehendi, quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè studiis adjumenti commodiquè attulissent; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio inveniri possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberio rem hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihi què conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem.

T t t 3

Quem

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & subtiliora & à vulgo remotiora esse invenies; præsertim cum ad horum investigationem eadem mecum Analyfi, cujus olim fundamenta à me edoctus est, utatur; atque ita ejus studiosis viam ad consimiles quæstiones resolvendas aperiat. In quibus si cum reliquis nostris laboribus amplam tibi satis, Benevole Lector, in hoc studiorum genere exercitationis ansam præbuisse videar; animum exinde meum tui studiosissimum (ut spero) agnosces, ac nostram proinde operam in tui & Reipublicæ Literariæ bonum susceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

CHRI-

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

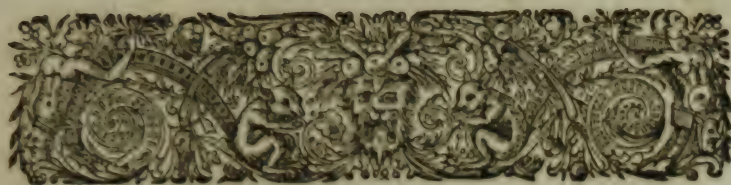
Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam prae manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cetera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisi, ostendas quam late se protendat divina Analyticae scientia, facile intelligo etiam illa plurimum proposito tuo inservire posse, quae de alea ratiocinii conscripsimus; quanto enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quae fortuita sunt atque incerta, tanto admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primum illa exponenda suscepim, tuque digna existimes, quae simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam de re mea esse existimem hanc potissimum ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri aliqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quod tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore de vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitus ea quae tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuo reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchra subtilissimaque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quae in hoc genere proponuntur, nihilo minus profunda indaginis visum iri confido, quam quae Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendam verò, quod jam pridem inter praestantissimos tota Gallia Geometras

metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi prima inventionis gloriam hac in re tribuat. Caterum illi, difficillimis quibusque quaestionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinere, adeo ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire saepenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, ommissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.

27 Apr. 1657.

DE .



D E
R A T I O C I N I I S
I N
L U D O A L E Æ.

Eti lusionum, quas sola fors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum relinquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, plurève collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam live tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad ali-

V v v

quid

quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me incio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihiq̃ue optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idq̃ue æquolusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facillè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solum demonstrandam, verum etiam primitus eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x , ac ut victor victo traditurus sit a . Hic autem lusus iustus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a , si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a . Quod si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b , æqua mihi fors obtingeret ad a quàm ad b . Pono itaque $2x - a = b$, & fit $x = \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a . Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a , si perdam, aut ad obtinendum b , si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alteriq̃ue inde concedo a .

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua fors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3; erit hic lusus omnino iustus, & patet

ret mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b , vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cum x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse iusto lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hæc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x , & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b , & ego ipsi traditurus sim b , si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c , aut ego ipsi sim daturus c , si ego vincam. Et patet hunc ludum iustum esse. Æquam autem hæc ratione sortem habeo ad obtinendum b , si nimirum primus vincat, aut c , si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b , & alteri c . Quod si $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a , eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a , quæ ad b , aut ad c . Pono itaque $3x - b - c = a$, & fit $x = \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c , aut d æqua fors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porro.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a , sit p , numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q , sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qg}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cum x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, iusto lusu. Ad hoc autem tot collutores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p + q$ efficiant, quorum

VVV 2

deponat

deponat quisque x , ita ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æquā expectatione ad vincendum. Porro cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q , sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b , aut ego contra ipsi idem b , si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p - 1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a , & ego tantundem (scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hanc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b , & $p - 1$ expectationes ad a , & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px + qx - bq - ap + a$, tunc enim obtineo $px + qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p - 1$ lusorum, quæ simul conficiunt $ab + pa - a$. Si itaque $qx + bx - bq - ap + a$ æquale esset ipsi a , haberem p expectationes ad a , (quandoquidem jam $p - 1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b , & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocirca porro $px + qx - bq - ap + a \propto a$, & fit $x \propto \frac{ap + bq}{p - q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collutores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui prius ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusum, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbigratià, ut quod depositum est lucretur is, qui prius vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam quantò hic melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusum sed ipsi duo deficiunt.

Porro ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a . Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sortis foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1^{am} Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collutori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquam alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collutori meo tres lusum. Oportet hic facere distributionem.

VVV 3.

Adver-

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lufum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a ; quod si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lufus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihi quæ obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1^{am} Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea fors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4^{or} lufus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{13}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lufus & collusori meo tres lufus.

Fiet itaque primo lufus; vel ut mihi unus lufus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrum adhuc duo lufus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua fors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{9}{16}a$, per 1^{am} Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lufus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi fors obtingat ad $\frac{5}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{3}{4}a$, per 1^{am} Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lufus vincere debet dum alter quatuor, quam eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^{am} Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quam $\frac{13}{16}a$.

P R O -

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collutores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lulum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a . Quod si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideòque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{2}a$. Et fit primo una expectatio ad a , una ad 0, & una ad $\frac{1}{2}a$, (quandoquidem æquè facillè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{2}{3}a$, per 2^{dam} Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{2}{3}a$, & remanet tertio $\frac{1}{3}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collutorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiant, cujusque pars inveniat, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collutorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collutores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere; ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q .

Primo examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur 0. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu debetur $\frac{2}{3}q$, per 3^{iam} Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C sin-

C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8^{am}. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, 0, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsitæ pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2^{da} Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum 0, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dam} Propositionem tantundem ac $0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q$, id est, $\frac{5}{9}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuiquam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primò investigare, & horum medio-sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusus erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt 1, 2, 3, quin primum calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8^{am} Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 collusoribus.

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3		
Eorum partes.	4 . 4 . 4	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2		
	9	27	27	27		
Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5		
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 3		
	81	243	243	729		
Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5			
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 11	629 . 87 . 13			
	81	729	729			
Lusus, qui ipsis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5	
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 55	355 . 355 . 23	433 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod

Quod

Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tessera senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesserais, aut tres senarios tribus tesserais jacere sit tentandum. Et plures aliarum hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tessera sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facillè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porro duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facillè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tessera potest unus sex jactus alterius tessera simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactus, qui in 3^{ta} sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulterius jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tessera sexies jactus præcedentis.

Porro notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patere posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta; vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{te} sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{te} sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesserais reperiuntur	{	3 vel 18	}	punctorum	{	1 ^{us}	}	jactus.
		4 vel 17				2 ^{us}		
		5 vel 16				3 ^{us}		
		6 vel 15				4 ^{us}		
		7 vel 14				5 ^{us}		
		8 vel 13				6 ^{us}		
		9 vel 12				7 ^{us}		
		10 vel 11						

Xxx

Pro-

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ transferâ 6 puncta jaciât.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantum unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur a . Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum a , sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, fors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciât, obtinet a . Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciât, unus tantum casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a ; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{5}{6}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{2}{3}a$; adeò ut fors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd fors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{9}{16}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{67}{128}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plus quàm 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{46}{77}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{31}{46}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

P R O-

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tessellis 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum 4; & 35 esse casus, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet, per 2^{am} Propositionem, $\frac{1}{36}$.

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciât, obtinebit 4; si verò primâ vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id quod ipsi, per illud quod jam dictum est, valet $\frac{1}{36}$.

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciât, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi 4, & 35 qui dent $\frac{1}{36}$ 4; id quod per 2^{am} Propositionem valet $\frac{7}{1296}$ 4. Et remanet contracertanti $\frac{1231}{1296}$ 4.

Ex his invenire licet, qualis sit ei fors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætercundo casum eum, cum quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui 4^{or} vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1^{ma} aut 2^{da} vice faciat, obtinet 4; sin minus, restant ipsi duo jactus, qui per illud quod superius dictum est, valent $\frac{7}{1296}$ 4. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciât, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent 4, & 1225 casus, qui dent ipsi $\frac{7}{1296}$ 4. Quod ipsi per 2^{am} Propositionem valet $\frac{17899}{1679616}$ 4. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}$ 4. Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porro eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipue quæritur in quo numero jactuum æqualis fors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiore conditionem inire, cum 25 jactibus aggreditur.

XXX 2

PRO-

PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseriis suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispian unâ tessera suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quod si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{3}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{3}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opus est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{1}{3}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{1}{3}a$, & 5 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod per 2^dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{2}a$ seu $\frac{2}{4}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum amplius, invenitur 10 jactibus unâ tessera, aut 10 tesseriis primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseriis unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeat.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseriis proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verum si id non obtingat, habeo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2^dam Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2^dam Propositionem, tantundem est ac $\frac{1}{2}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1}{2}a$.

P R O-

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hanc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaci-
clam, ille verò quàm primùm senarium jaciat; ita vide-
licet, ut ipsi primùm jactum concedam: Invenire ratio-
nem meam ad ipsius sortem.

Ponatur, sortem meam valere x , & id quod depositum est vocari a ;
eritque fors alterius $x a - x$. Et patet, quodocunque ipsius vices ja-
ciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse x . At
quodocunque mea vices sunt ut jaciā, fors mea pluris æstimanda
est. Ponatur itaque pro ejus valore y . Iam quoniam ex 36 jactibus
reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lususque
victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id
est, qui meas jaciendi vices promovent: habeo, priusquam jacti,
5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y . id quod per
3^{iam} Propositionem valet $\frac{31y}{36}$. Posuimus autem casum meum à prin-
cipio esse x . Quocirca erit $\frac{31y}{36} = x$, adeoque $y = \frac{36x}{31}$. Deinde po-
situm fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y . Ego
verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a , quandoquidem 6 ja-
ctus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque
30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi ob-
tineam x . id quod per 3^{iam} Propositionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem
cum sit y , erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} = y$, $\frac{6a + 30x}{36} = \frac{36x}{31}$. Unde inve-
nitur $x = \frac{31a}{61}$, valor mea sortis. Et per consequens collusoris mei
erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hanc conditione, ut A vincat, si *Probl. 1.*
senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum
instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos
jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæri-
tur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

Xxx 3

Tres

534 DE RATIOC. IN LUDO ALEÆ.

Probl. 1. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Probl. 3. A certat cum B quod ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Probl. 4. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quod velatis oculis 7 calcul. ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Probl. 5. A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

F I N I S.



Errata quæ irrepsere Benevolus Lector sic corrigat.

Pag. 10. lin. 11 omiffa sunt hæc verba : & tripla plures autem quàm solidi. P. 13. l. penult. lege & 6 poma. P. 16. in fine Prop. 26 lege 7^{ta} meli. & supra huius numeros scribe molit. Pag. 25 in margine lege ad 22 Prop. P. 26 in fine Prop. 39 lege C. 3520. P. 34 ad finitiam in margine lege fer. 17017016 (3). P. 45 & 46 in 2 fig. loco superioris literæ D scribe B. P. 50. l. 12 lege & ED, DF. P. 52. l. 3 lege sub AC, AB. P. 53. l. 13 lege & FE. ibid. loco literæ E, quæ prope I reperiunt, scribe E. ibid. l. 14 lege AGB & C. P. 55. l. 4 lege CK, 26 (Y). P. 74. l. 11 lege Prop. 11^{ma}. P. 79. l. 4 lege Vnde LB erit 16. P. 100. l. 9 lege ABD 17. P. 108 in sinistra duarum superiorum figurarum literæ M & N sunt una in alterius locum collocanda. P. 143 uelle superius Simplicium Problematum. P. 151. l. 5 lege quàm 18 Crux. P. 153. l. 7 lege uerius D. P. 200. l. ult. scribe in margine 1. Pag. 204. l. 1. Pag. 206. l. 9. Pag. 208. l. penult. P. 211. l. 1. Pag. 213. l. 6. Pag. 215. l. ult. Pag. 218. l. 1. Pag. 220. l. 17. & Pag. 314. l. 14 lege in eadem lineam. Pag. 204. l. 9. Pag. 207. l. 1. Pag. 209. l. 13. Pag. 212. l. antep. Pag. 214. l. 1. Pag. 216. l. 13. Pag. 218. l. penult. Pag. 221. l. 5 lege in circulo circumferentiam. P. 228. l. 3 lege sunt. P. 233. in fig. ad dextram loco superioris literæ C scribe G. P. 230. l. penult. pro ED scribe BG. Pag. 222 in fig. inferiori, quæ est ad sinistram, omiffa est lit. I. P. 227. l. 6 lege Prop. 33. P. 228. l. penult. lege in circumferentiam. P. 245. l. 13 lege inuentum. P. 261. l. 11 lege datam AB. P. 295. l. 27 lege descripta. P. 300. l. 30 lege in lapide ibi. l. antep. lege, requisitum. P. 313. l. ult. dele m. P. 316. l. 25 lege sicut EM. P. 404. l. 5 lege Collisio 25. P. 479. infra lin. 25 lege ²⁵⁴ & dele lineam subductam. P. 488 in fine lege BHC.

2

184













005644626